

2次元格子系における非線形局在モードの構造

阪大・工 土井 祐介 (Yusuke Doi),
阪大・工 中谷 彰宏 (Akihiro Nakatani)
Graduate School of Engineering, Osaka University

概要

非線形格子系におけるエネルギー局在現象である非線形局在モードは系の次元数によらず出現する。2次元FPU格子系における非線形局在モードの局在構造を数値的に計算し、1次元系の場合との差異を検討する。

1 はじめに

Fermi-Pasta-Ulam(FPU) β 格子系などの非線形格子系に出現する非線形局在モード (Intrinsic Localized Mode, ILM)/離散ブリーザー (Discrete Breather, DB)[1] は系の非線形性と離散性によって出現する局在構造である。これは格子系に励起された振動の角振動数が非線形性の影響によって大きくなり、線形の分散関係式によって示される定在波の存在領域の上限を超えることによって、その振動が系全体に伝播できなくなることによって出現する。また ILM は局在のピークを中心にした数個の格子点が、隣接格子点同士が逆方向に変位しながら内部角振動数 ω_{DB} で周期的に振動するという格子スケールの局在構造を持っている。

ILM は FPU- β といった理想的な格子モデルにおいて、その局在構造、安定性、ダイナミクスなどが解析的、数値的に研究されてきている [2]。さらに最近では非可積分系で出現するという性質から、現実の現象としての ILM の研究も行われてきており、例えばフォトリック結晶での光の局在現象 [3]、分子動力学シミュレーションによる原子振動の局在 [4] などの数値シミュレーション、またマイクロカンチレバーアレイの局在振動 [5]、光導波路アレイにおける光の局在 [6, 7]、ジョセフソン接合系における局在 [8, 9] などの観測が報告されている。このような現実の物理現象としての ILM の研究は今後さらに重要になっていくと考えられる。

これまでの多くの ILM の研究は1次元格子モデルにおいて行われている。すなわち、各格子点は1自由度の変位成分をもち、それぞれその隣接する格子点とのみ相互作用を行う系である。このような系の Hamiltonian は次のように書ける。

$$H = \sum_i \frac{1}{2} \dot{x}_i^2 + \sum_i V(x_i, x_{i+1}) + \sum_i W(x_i). \quad (1)$$

ここで x_i は i 番目の格子点のつりあいの位置からの変位、 $V(x_i, x_{i+1})$ は i 番目と $i+1$ 番目の格子点の間に働く相互作用ポテンシャル、 $W(x_i)$ は i 番目の格子点の on-site ポテンシャル

ルをあらわす. $V(x_i, x_{i+1})$, $W(x_i)$ の形によって様々な格子モデルが構成されるが, 幅広いクラスの系において ILM が存在することが知られている.

一方, 自然界における格子モデルおよびモデル上での局在現象を考える場合, 系の 2 次元性や 3 次元性は重要な要素の一つである. この場合, 1 次元系の場合と比較して, 各格子点が 2 つ以上の変位成分をもち, 格子間の相互作用は最近接格子間のみでは記述できないなど, 複雑な性質を持つと考えられる. 2 次元系, 3 次元系での Hamiltonian は以下のように表すことができる.

$$H = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_{i,j}^2 + \sum_{i,j} V(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x}_{m,n}) + \sum_{i,j} W(\mathbf{x}_{i,j}), \quad (2)$$

$$H = \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_{i,j,k}^2 + \sum_{i,j,k} V(\mathbf{x}_{i,j,k}, \mathbf{x}_{m,n,p}) + \sum_{i,j,k} W(\mathbf{x}_{i,j,k}), \quad (3)$$

ここで $\mathbf{x}_{i,j}$, $\mathbf{x}_{i,j,k}$ はそれぞれ 2 次元, 3 次元格子系での格子点の位置ベクトルである.

このような 2 次元, 3 次元系においても系に非線形性および離散性が共に存在する場合には ILM が存在する. Flach らは系の次元が大きくなると, 系に存在しうる ILM のエネルギーに下限が生じることを示している [10]. 一方, Marín らは相互作用ポテンシャル V が Lenard-Jones 型, on-site ポテンシャル W が調和ポテンシャルで与えられる 2 次元格子系において隣接した 3 粒子の擾乱からの ILM が励起されることをシミュレーションで示している [11]. また池田は相互作用ポテンシャル V が Morse 型, on-site ポテンシャル W が調和ポテンシャルで与えられる格子系について線形分散関係の最大角振動数モード (Zone Boundary Mode, ZBM) の変調不安定からエネルギーが局在する過程 (Chaos 的ブリーザー) を数値シミュレーションによって示している [12]. さらに Kevlekidis らは 2 次元離散非線形 Schrödinger モデルにおける局在構造を計算し, 系の 2 次元性によって新しい局在構造が出現することを示している [13].

しかしながら, 各格子点が 2 成分の変位を持つ 2 次元格子系における ILM の局在構造については数値解を含めてその解析を行った研究はほとんどなされておらず, 前述の 2 次元性を導入したことによって系に現れる性質が ILM の局在構造にどのような影響を及ぼすかについての解析はなされていない. そこで, 本研究では各格子点が 2 成分の変位を持つ 2 次元格子系における ILM を数値的に解析し, ILM の構造が 1 次元系の場合と比較してどのように変化するのかを解析する.

2 モデル

2.1 基礎方程式

モデルとして図 1 に示す 2 次元正方格子モデルを考える. 格子点は碁盤目状に並んでおり, x 方向に i , y 方向に j でラベル付けする. また格子間の相互作用は上下左右の 4 つの

最近接格子間および斜め方向の4つの第2近接格子間で働くものとする。on-site ポテンシャルは考慮しない。この場合、系の Hamiltonian は

$$H = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_{i,j}^2 + \sum_{i,j} [V(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x}_{i+1,j}, d_1) + V(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x}_{i,j+1}, d_1)] \\ + \alpha \sum_{i,j} [V(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x}_{i+1,j+1}, d_2) + V(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x}_{i-1,j+1}, d_2)], \quad (4)$$

となる。ここで $\mathbf{x}_{i,j}$ は (i, j) 番目の格子点の位置を示すベクトルであり、2つの変位成分 $(x_{i,j}, y_{i,j})$ で構成される。また、 α は第2近接相互作用の強さを表すパラメータである。相互作用ポテンシャル V は FPU- β 型の相互作用ポテンシャルを用いる。

$$V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, d) = v(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| - d), \quad (5)$$

$$v(r) = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{4}\beta r^4, \quad (6)$$

ここで $d(d_1, d_2)$ は格子間のつりあいの長さ、 β は系の非線形性の大きさを表すパラメータである。以下では $d_1 = 1$ であるとする。

この Hamiltonian から各格子点 $\mathbf{x}_{i,j}$ の運動方程式は

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_{i,j}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x}_{i+1,j}, 1) + \mathbf{F}(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x}_{i-1,j}, 1) + \mathbf{F}(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x}_{i,j+1}, 1) + \mathbf{F}(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x}_{i,j-1}, 1) \\ + \alpha \mathbf{F}(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x}_{i+1,j+1}, d_2) + \alpha \mathbf{F}(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x}_{i-1,j+1}, d_2) \\ + \alpha \mathbf{F}(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x}_{i+1,j-1}, d_2) + \alpha \mathbf{F}(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x}_{i-1,j-1}, d_2), \quad (7)$$

となる。 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, d)$ は格子間に作用する力をあらわす関数であり

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, d) = -f(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| - d) \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}, \quad (8)$$

$$f(r) = r + \beta r^3. \quad (9)$$

で与えられる。

2.2 線形分散関係

運動方程式 (7) をベクトル $\mathbf{u}_{i,j}$ の成分 $(x_{i,j}, y_{i,j})$ に書き下し、さらに、各格子点のつりあいの位置からの変位 $(\tilde{x}_{i,j}, \tilde{y}_{i,j})$ を導入する。

$$x_{i,j} = \tilde{x}_{i,j} + i, \quad (10)$$

$$y_{i,j} = \tilde{y}_{i,j} + j. \quad (11)$$

さらに $\tilde{x}_{i,j}, \tilde{y}_{i,j} \ll 1$ であるとして運動方程式を線形化すると次の式が得られる。

$$\frac{d^2 \tilde{x}_{i,j}}{dt^2} = A(\tilde{x}_{i-1,j-1} + \tilde{x}_{i-1,j+1} + \tilde{x}_{i+1,j-1} + \tilde{x}_{i+1,j+1}) + \tilde{x}_{i+1,j} + \tilde{x}_{i-1,j} - C\tilde{x}_{i,j}$$

$$+B(\tilde{y}_{i-1,j-1} - \tilde{y}_{i-1,j+1} - \tilde{y}_{i+1,j-1} + \tilde{y}_{i+1,j+1}), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{y}_{i,j}}{dt^2} = & A(\tilde{y}_{i-1,j-1} + \tilde{y}_{i-1,j+1} + \tilde{y}_{i+1,j-1} + \tilde{y}_{i+1,j+1}) + \tilde{y}_{i,j-1} + \tilde{y}_{i,j+1} - C\tilde{y}_{i,j} \\ & + B(\tilde{x}_{i-1,j-1} - \tilde{x}_{i-1,j+1} - \tilde{x}_{i+1,j-1} + \tilde{x}_{i+1,j+1}). \end{aligned} \quad (13)$$

ただし

$$A = \frac{\alpha}{4}(4 - \sqrt{2}d_2 + 16\beta - 18\sqrt{2}d_2\beta + 12d_2^2\beta - \sqrt{2}d_2^3\beta), \quad (14)$$

$$B = \frac{\alpha}{4}(\sqrt{2}d_2 + 8\beta - 6\sqrt{2}d_2\beta + \sqrt{2}d_2^3\beta), \quad (15)$$

$$C = (2 + 4\alpha - \sqrt{2}d_2\alpha + 16\alpha\beta - 18\sqrt{2}d_2\alpha\beta + 12d_2^2\alpha\beta - \sqrt{2}d_2^3\alpha\beta), \quad (16)$$

である。得られた線形化方程式に対して

$$\tilde{x}_{m,n} = X \exp[i(km + ln - \omega t)], \quad (17)$$

$$\tilde{y}_{m,n} = Y \exp[i(km + ln - \omega t)], \quad (18)$$

を代入して計算を行うことによって、線形分散関係式

$$\omega^2 = -4A \cos k \cos l + C - (\cos k + \cos l) \pm \sqrt{(\cos k - \cos l)^2 + 16B^2 \sin^2 k \sin^2 l} \quad (19)$$

が得られる。この式によって得られる分散曲線の例を図2に示す。式(19)は $k = \pi, l = 0$ または $k = 0, l = \pi$ の時に最大値

$$\omega_{\max}^2 = C + 2 - 4A, \quad (20)$$

をとる。この時の格子点の変位パターンは図3に示すように x, y のいずれかの軸に沿って1次元格子の π モード的な変位を示し、もう一方の軸に沿っては一樣な形を示す。

図4に最大角振動数 $\omega_{\max}$ と第2近接格子のつりあいの長さ d_2 、第2近接格子の相互作用の大きさ α および非線形パラメータ β との関係を示す。第2近接格子間相互作用が大きくなるにつれて $\omega_{\max}$ が大きくなるのが分かる。また第2近接格子間のつりあいの長さは $d_2 = \sqrt{2}$ の場合は平衡点において各格子間に力が働かないが、 $d_2 < \sqrt{2}$ の場合、第2近接格子間には引っ張り力が働いており、4方向からの力が打ち消しあうことによって釣り合いが保たれている状態である。このような場合 ($d_2 \ll \sqrt{2}$)、 d_2 が小さくなるほど $\omega_{\max}$ が大きくなるのが分かる。また、 $d = \sqrt{2}$ の場合は $A = \alpha/2$ 、 $B = \alpha/2$ 、 $c = 2(1 + \alpha)$ となり $\omega_{\max}$ に非線形パラメータ β の影響が現れないが、それ以外の場合には一般に β が大きくなるにつれて $\omega_{\max}$ が大きくなる。これらの効果は第2近接相互作用を考慮することによって現れる系の2次元性の影響と見ることができる。

3 近似方程式

ILM は周期解であり位相空間で周期軌道をとる。このことから反復法を用いて数値解を求めることが可能である。しかし反復法で解を収束させるためには、初期値として、真

の解に近い値を用意する必要がある。そのため、第2近接相互作用がない場合 ($\alpha = 0$) の運動方程式 (7) に対して ILM の局在性が大きいと仮定して近似運動方程式を構成し、その解を反復法の初期値として用いることにする。

具体的には以下の仮定を行う。

1. 絶対変位から相対変位への変換。

$$\begin{aligned} u_{x(i,j)} &= x_{i+1,j} - x_{i,j} - d_1, \\ u_{y(i,j)} &= y_{i+1,j} - y_{i,j} - d_1, \\ v_{x(i,j)} &= x_{i,j+1} - x_{i,j} - d_1, \\ v_{y(i,j)} &= y_{i,j+1} - y_{i,j} - d_1. \end{aligned} \quad (21)$$

2. 局在構造はある1列 ($j = 0$) にのみ出現するとする。
3. 局在振動は $j = 0$ 列の質点の x 方向変位のみが出現し、 y 方向変位は0である。
4. $j=0$ 列に対して各格子点の変位は対称である。

これらを運動方程式 (7) に適用し、微小項を無視すると、近似運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_{x(i,0)}}{dt^2} &= u_{x(i-1,0)} - 2u_{x(i,0)} + u_{x(i,0)} + \beta(u_{x(i-1,0)}^3 - 2u_{x(i,0)}^3 + u_{x(i+1,0)}^3) \\ &\quad - 2e(v_{x(i,0)}) + 2e(v_{x(i+1,0)}), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{d^2 v_{x(i,0)}}{dt^2} = u_{x(i-1,0)} - u_{x(i,0)} + \beta(u_{x(i-1,0)}^3 - u_{x(i,0)}^3) - 3e(v_{x(i,0)}), \quad (23)$$

$$\frac{d^2 u_{x(i,1)}}{dt^2} = e(v_{x(i,0)}) - e(v_{x(i+1,0)}), \quad (24)$$

$$\frac{d^2 v_{x(i,1)}}{dt^2} = e(v_{x(i,0)}), \quad (25)$$

$$\frac{d^2 u_{x(i,j>1)}}{dt^2} = \frac{d^2 v_{x(i,j>1)}}{dt^2} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{d^2 u_{y(i,0)}}{dt^2} = \frac{d^2 u_{y(i,1)}}{dt^2} = 0, \quad (27)$$

$$\frac{d^2 v_{y(i,0)}}{dt^2} = -e'(v_{x(i,0)}), \quad (28)$$

$$\frac{d^2 v_{y(i,1)}}{dt^2} = e'(v_{x(i,0)}), \quad (29)$$

$$\frac{d^2 u_{y(i,j>1)}}{dt^2} = \frac{d^2 v_{y(i,j>1)}}{dt^2} = 0. \quad (30)$$

を得る。ただし、

$$e(x) = \frac{x(-d_2 + \sqrt{d_2^2 + x^2} + \beta(-d_2 + \sqrt{d_2^2 + x^2})^3)}{\sqrt{d_2^2 + x^2}} \quad (31)$$

$$e'(x) = \frac{d_2(-d_2 + \sqrt{d_2^2 + x^2} + \beta(-d_2 + \sqrt{d_2^2 + x^2})^3)}{\sqrt{d_2^2 + x^2}} \quad (32)$$

である。

式 (22) からこの近似運動方程式では $j = 0$ 列の x 方向の相互作用は 1 次元の FPU- β モデルと同じ形であり、この相互作用に上下の列からの影響が on-site ポテンシャル (31) による復元力として付け加えられた形になっていることが分かる。

近似運動方程式に対し、回転波近似 (平均化法) を適用して反復法の初期解として用いることのできる精度の解を求めることが可能である。

初期解として得られる解は第 2 近接相互作用のない系に対する局在が大きな場合の解であるが、この解を延長することによって第 2 近接相互作用を含んだ系や局在度の低い場合についても計算を行うことが可能である。次節にその結果を示す。

4 数値計算

図 5-7 に反復法による ILM の数値解の例を示す。それぞれの図の (a) は $j = 0$ および $j = 1$ 列の格子点の x 方向の変位、(b) は局在付近の格子点の 2 次元的な変位の大きさを表しており、ILM の局在構造を示している。

図 5 は第 2 近接相互作用がない場合 ($\alpha = 0$) の ILM である。この場合、局在は $j = 0$ 列にのみ顕著に現れている。また、大振幅振動は x 方向の変位としてのみ現れている。したがって、この系に出現する ILM は 1 次元的な局在構造となっている。これは前節の近似運動方程式によって記述される FPU- β 格子に on-site ポテンシャルが付け加えられた形の 1 次元格子モデルでの ILM と同様の構造である。

図 6 は第 2 近接相互作用を考慮した系における ILM である。この場合、ILM による大振幅の振動は $j = 0$ 列のみならず、 $j = 1$ の列にも出現している。 x 方向の隣接格子点は逆位相で振動しているが、 y 方向の隣接格子点は同位相で振動している。これは図 3 に示された ZBM の変位パターン (図 3) と同じ特徴であり、1 次元系と同様に 2 次元系でも ZBM と ILM の間に関連があることを示唆している。さらに、ILM の空間変位パターンから第 2 近接相互作用が存在する場合には y 方向の変位もわずかなではあるが励起されることが分かる。

これらの第 2 近接相互作用を導入したことによって出現する ILM の構造の変化は局在性が低い場合にはさらに顕著に観測することが可能である。その例を図 7 に示した。この場合、 $j = 1$ の列の変位は $j = 0$ の列の変位とほぼ同じ大きさになっている。このような比較的幅の広い局在解でも時間発展シミュレーションにおいて局在性を失うことなく長時間にわたって振動を続けることを確認している。

さらに、図 6, 7 からは第 2 近接相互作用が存在する系においては ILM の構造の対称性の破れが出現することが分かる。すなわち図 5 においては ILM の変位パターンは局在の

ピークの格子点を中心に対称であるが、図6, 7においてはもはや対称形ではなくなっている。この対称性の破れは第2近接格子間のつりあいの長さが $\sqrt{2}$ から離れるほど大きくなる傾向がある。このようなILMの対称性の破れは1次元系において相互作用ポテンシャルやon-siteポテンシャルが平衡点の周りに対称でない場合に出現することが報告されている。たとえばBickhamらはFPU- β モデルに3次の非線形性を加えたモデル、

$$H = \sum_i \left[\frac{1}{2} \dot{x}_i^2 \right] + \sum_i \left[\frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{3} \alpha (x_{i+1} - x_i)^3 + \frac{1}{4} \beta (x_{i+1} - x_i)^4 \right], \quad (33)$$

において同様の対称性の破れに相当する格子系の歪み(DC効果)が現れることを示している[14]。今回取り扱った2次元格子モデルの場合、第2近接相互作用は局在振動の方向に対して45度ずれた方向に作用しており、振動の方向に作用する力成分を考える場合、ばねと振動方向のなす角の影響によって圧縮方向と伸張方向で大きさが異なってくる。このことがポテンシャルの非対称性を生み出し、ILMの対称性が破れるものと考えられる。

最後に、図8に得られたILMの角振動数と振幅の関係を示す。図中に示した縦線はそれぞれのパラメータに対応する系の最大固有角振動数である。第2近接相互作用のつりあいの長さが $\sqrt{2}$ から離れるほどILMの角振動数が大きくなっていることがわかる。励起したILMは線形の固有角振動数よりも大きな値をとることは明らかである。これらの結果から、系に2次元性を導入した結果、系に励起されるILMの振動数は大きくなる傾向があることが分かる。

5 おわりに

本研究では、2次元格子系におけるILMの性質を調べるために、反復法を用いてILMの数値解を求めてその構造を調べた。その結果、2次元系においても1次元的な局在構造をもつILMが励起されることを確かめた。さらに、2次元的な構造として第2近接相互作用を考慮すると局在構造の対称性の破れや、局在の2次元的な広がり、また角振動数の増大などの影響が現れることが分かった。今後の課題としては、ILMの安定性解析、移動型ILMについての研究などが挙げられる。また、2体相互作用ポテンシャルそのものに非対称性を導入した場合の局在構造の変化を調べることは現実の物理系でのILMの性質を調べる上では重要であると考えられる。

参考文献

- [1] A.J. Seivers and S. Takeno, "Intrinsic localized modes in anharmonic crystals", Phys. Rev. Lett., 61 (1988), pp. 970-973.
- [2] S. Flach and C.R. Willis, "Discrete Breathers", Phys. Rep., 295 (1998), pp. 181-264.

- [3] S.F. Mingaleev, Yu.S. Kivshar and R.A. Sammut, "Long-range interaction and non-linear localized modes in photonic crystal waveguides", *Phys. Rev. E* 62 (2000), pp. 5777-5782.
- [4] 山寄優, 土井祐介, 中谷彰宏, 北村隆行, "分子動力学法によるグラフェンシートにおける非線形局在モードの解析", 第18回計算力学講演会講演論文集 (2005), pp.657-658.
- [5] M. Sato, B.E. Hubbard, A.J. Sievers, B. Ilic, D.A. Czaplewski and H.G. Craighead, "Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array", *Phys. Rev. Lett.*, 90 (2003), 044102.
- [6] H.S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A.R. Boyd and J.S. Aitchison, "Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays", *Phys. Rev. Lett.*, 81 (1998), pp. 3383-3386.
- [7] A.A. Sukorukov, Yu.S. Kivshar, H.S. Eisenberg and Y. Silberberg, "Spatial optical solitons in waveguide arrays", *IEEE J. Quantum Electron.*, 39 (2003), pp. 31-50.
- [8] E. Trias, J.J. Mazo and T.P. Orlando, "Discrete breathers in nonlinear lattices: Experimental detection in a Josephson array", *Phys. Rev. Lett.*, 84 (2000), pp. 741-744.
- [9] P. Binber, D. Abraimov, A.V. Ustinov, S. Flach and Y. Zolotaryuk, "Observation of breathers in Josephson ladders", *Phys. Rev. Lett.*, 84 (2000), pp. 745-748.
- [10] S. Flach, K. Kladko and R.S. MacKay, "Energy thresholds for discrete breathers in one-, two-, and three-dimensional lattices", *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997), pp. 1207-1210.
- [11] J.L. Marín, J.C. Eilbeck and F.M. Russell, "Localized moving breathers in a 2D hexagonal lattice", *Phys. Lett. A*, 248 (1998), pp. 225-229.
- [12] 池田公輔, "Morse potential を持つ格子系における非線形局在モードの生成", 数理解析研究所講究録, 1368 (2004), pp. 189-196.
- [13] P.G. Kevrekidis, K.Ø. Rasmussen and A.R. Bishop, "Two-dimensional discrete breathers: Construction, stability, and bifurcations", *Phys. Rev. E*, 61 (2000), pp. 2006-2009.
- [14] S.R. Bickham, S.A. Kiselev and A.J. Sievers, "Stationary and moving intrinsic localized modes in one-dimensional monatomic lattices with cubic and quartic anharmonicity", *Phys. Rev. B*, 47 (1993), pp. 14206-14211.

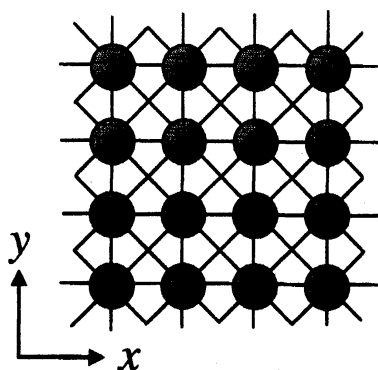


図 1: モデル

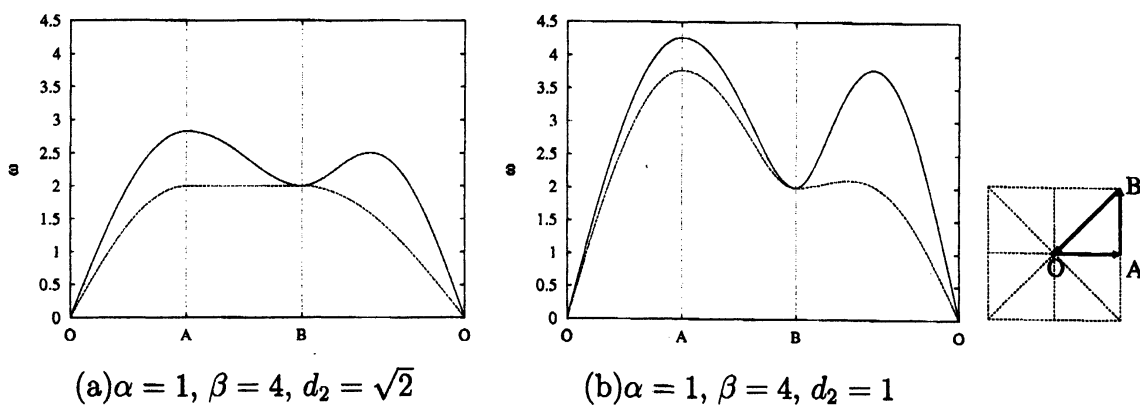


図 2: 分散曲線

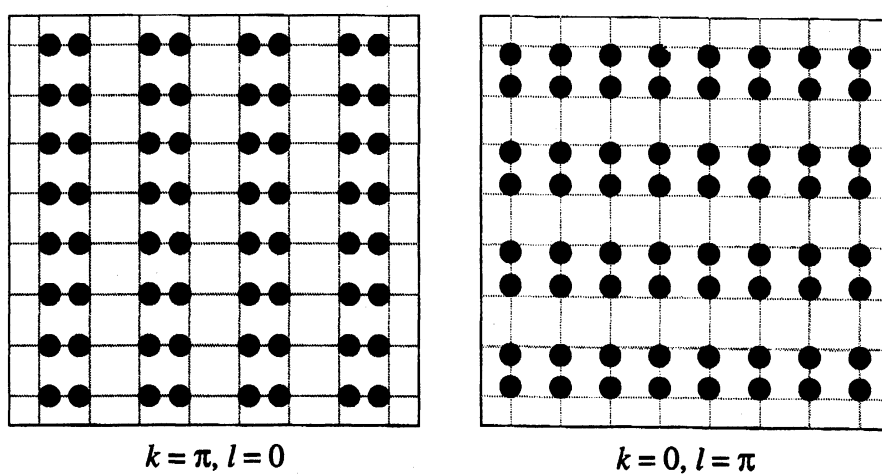


図 3: Zone Boundary Mode の変位パターン

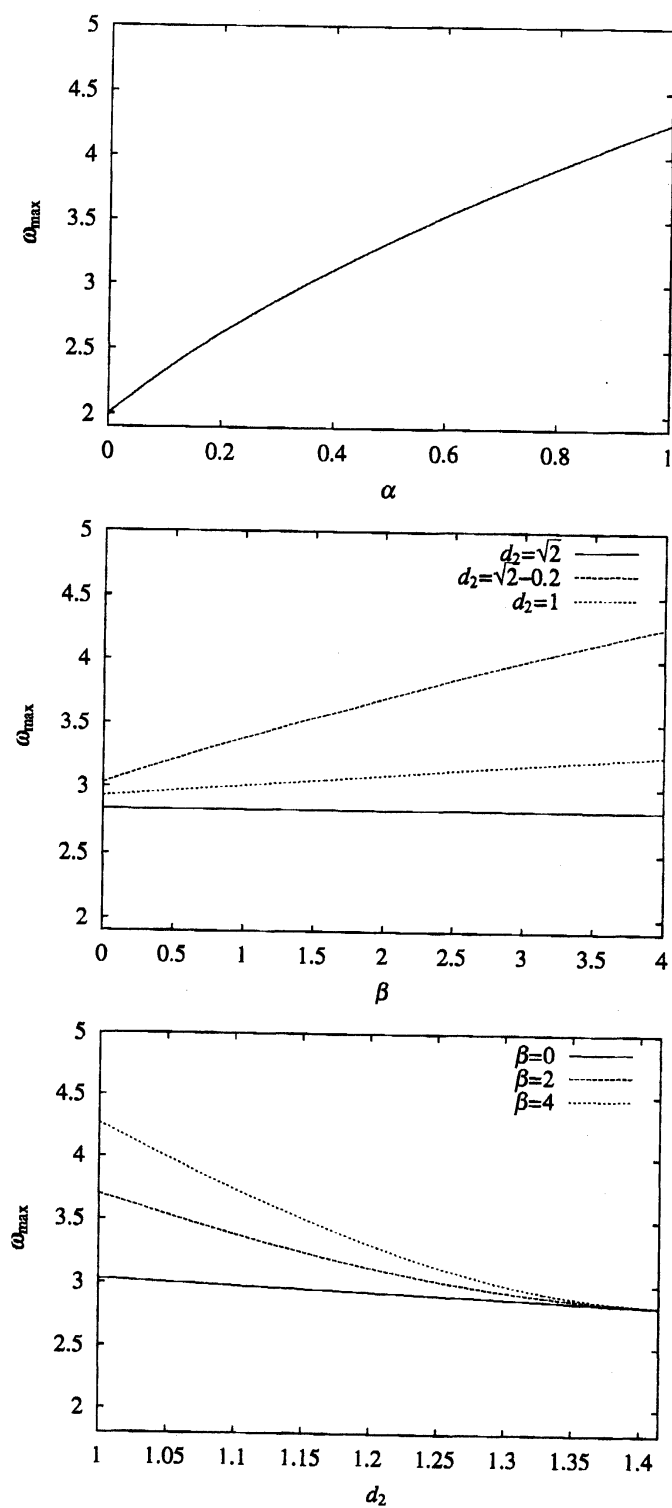


図 4: 最大固有角振動数 $\omega_{\max}$ と系のパラメータの関係

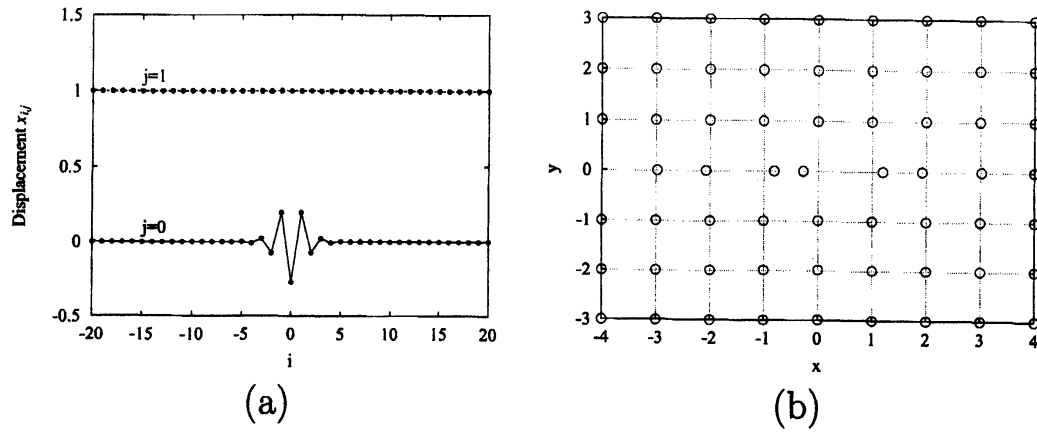


図 5: ILM の数値解 ($\alpha = 0, \beta = 4, \omega_{DB} = 2.4$)

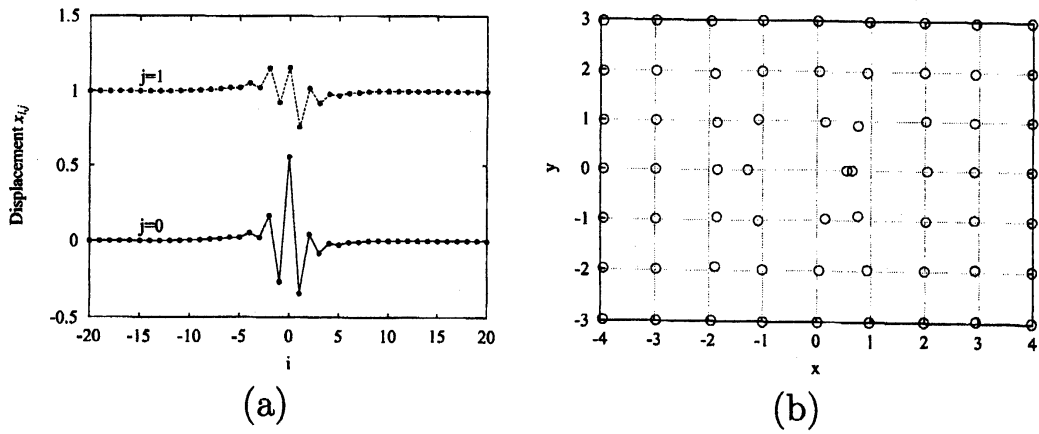


図 6: ILM の数値解 ($\alpha = 1, \beta = 4, d_2 = 1, \omega_{DB} = 4.6$)

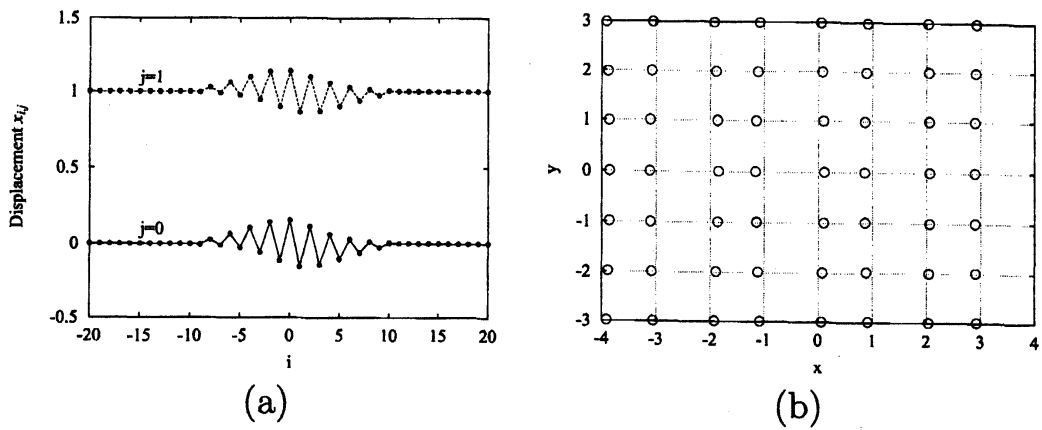


図 7: ILM の数値解 ($\alpha = 1, \beta = 4, d_2 = 1, \omega_{DB} = 4.2$)

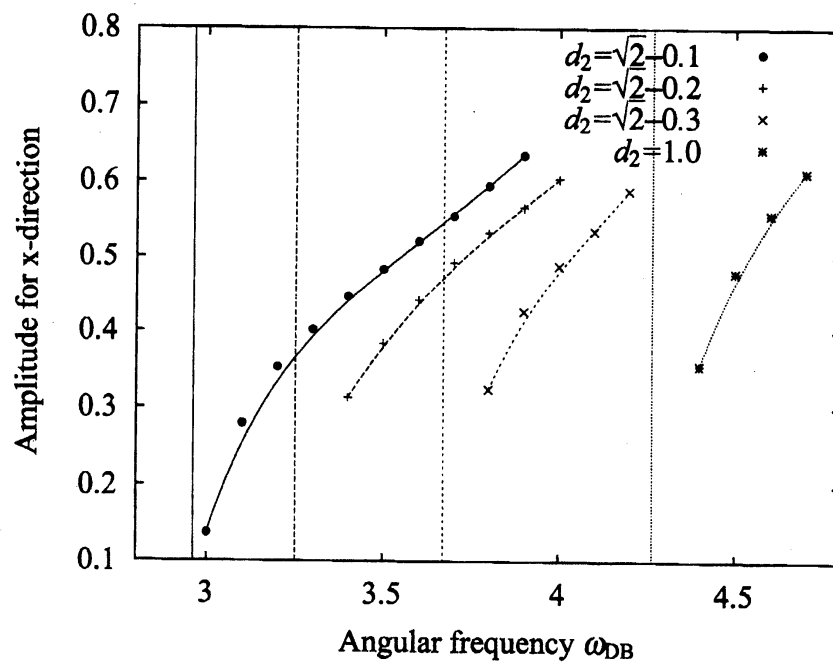


図 8: ILM の角振動数と振幅の関係