

氏 名	坂 井 秀 隆
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2113 号
学位授与の日付	平成 11 年 7 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations (アフィン・ルート系に付随した有理曲面と Painlevé 方程式の幾何)

論文調査委員 (主 査)
教 授 神 保 道 夫 教 授 西 田 吾 郎 教 授 上 野 健 爾

論 文 内 容 の 要 旨

Painlevé の微分方程式は、今世紀初頭新しい特殊関数を探索する過程で発見された 6 種の 2 階常微分方程式である。岡本和夫は 1970 年代後半に Painlevé 方程式の初期値空間と呼ばれる有理曲面を構成した。その後高野恭一らの研究によれば、この初期値空間は Painlevé 方程式を本質的に決定する情報を担っている。岡本はまた Painlevé 方程式の解を別の解へ写すいわゆる Bäcklund 変換を詳細に研究し、これらがアフィン・ワイル群をなすことを指摘している。ワイル群対称性は最近研究されだした離散 Painlevé 系にも共有される重要な特質であるが、その数学的な来歴は不明であった。

本論文は Painlevé 方程式のもつこれら様々な側面を統一的に説明する幾何学的枠組みを与えたものである。岡本とは逆に有理曲面のみから出発し、微分方程式に触れずに対称性を導き、対称性の一部分および極限として Painlevé 方程式自身を捉える。

すなわち、考察の対象として標準型とよばれる標準因子をただ一つ持つ非特異な有理曲面をとる。このような曲面は複素射影平面の 9 点における blow up として実現され、標準因子の既約成分は Picard 群のなかでアフィン型のルート系をなす。申請者はまずルート系の型に基づいてこのような曲面を分類した。ついで射影平面の 9 点の配置をパラメタとして曲面族を構成し、後者の双有理変換としてアフィン・ワイル群の作用を実現した。このときワイル群の並進部分が離散 Painlevé 方程式を与え、また曲面の退化に応じ極限として Painlevé 微分方程式が現れる。

この理論により、従来その数学的な本質が明らかなでなかった多くの離散 Painlevé 方程式系とそのアフィン・ワイル群対称性は、同時に統一的に理解することが可能になった。本来の Painlevé 方程式についても、ワイル群対称性のみならずその係数や独立変数、特殊解や楕円関数解への退化などの幾何学的な意味が明らかにされた。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

Painlevé 方程式は純数学的にも豊富な構造を持つ興味深い対象であり、また近年数理物理学を中心に多岐にわたる応用が見いだされ、現在活発に研究が進められている。岡本和夫の研究を例外として、これまでは解析的ないし代数的な立場からの研究が中心であった。本論文では有理曲面の Picard 群に関する理論に基づいて Painlevé 方程式の幾何学的な理論が展開されている。その概要は次の通りである。

考察の対象として、標準型とよばれる標準因子をただ一つ持つ非特異な有理曲面をとる。このような曲面は複素射影平面の 9 点における blow up として実現され、標準因子の既約成分は Picard 群のなかでアフィン型のルート系をなす。申請者はまずルート系の型に基づいてこのような曲面を分類した。ついで射影平面の 9 点の配置をパラメタとして曲面族を構成し、後者の双有理変換としてアフィン・ワイル群の作用を実現した。このときワイル群の並進部分が離散 Painlevé 方程式を与え、また曲面の退化に応じ極限として Painlevé 微分方程式が現れる。

ワイル群対称性は最近研究されだした離散 Painlevé 系にも共有される重要な特質であるが、その数学的な来歴は不明であった。この理論により、多くの離散 Painlevé 方程式系とそのアフィン・ワイル群対称性を同時に統一的に理解することが可能になった。本来の Painlevé 方程式についても、ワイル群対称性のみならずその係数や独立変数、特殊解や楕円関数解への退化などの幾何学的な意味が明らかにされた。

このように、本申請論文は Painlevé 方程式の研究に新しい視点を導入した独創的な成果として極めて高く評価される。本論文の提出した幾何学的枠組みは Painlevé 方程式の今後の研究に基本的な役割を果たすものと思われる。よって、本申請論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。

平成 11 年 5 月 25 日、主論文および参考論文に報告されている研究業績を中心として、これに関連した研究分野について口頭試問した結果、合格と認めた。