

非線形振動の数値解析的研究

九大理 占部 実

1. まえがき

非線形振動は、数学的にいえば、非線形常微分方程式

$$(1.1) \quad \frac{dx}{dt} = X(t, x) \quad (x, X \text{ はベクトル})$$

で記述される系に発生する振動で、それは(1.1)の周期解、あるいは擬周期解によって表わされる。非線形振動の場合には、その物理的意味から、(1.1)の右辺の関数 $X(t, x)$ は次のいずれかである：

(i) $X(t, x)$ は t を含まず、 $X(x)$ の形である。このとき、(1.1) は自励系 *autonomous system* とよばれている。

(ii) $X(t, x)$ は t について周期的である。このとき、(1.1) は周期系 *periodic system* とよばれている。

(iii) $X(t, x)$ は t について擬周期的である。このとき、(1.1) は擬周期系 *almost periodic system* とよばれている。

非線形振動の問題は、こうして数学的には上の形の $X(t, x)$ に対して (1.1) の形の微分方程式の周期解あるいは概周期解について研究することになる。第1の問題はこれらの解が存在するための条件を明らかにすることであり、第2の問題はこれらの解を実際に求めてその解の特性を明らかにすることであり、第3の問題はこれらの解の安定性を明らかにすることである。

これらの問題の研究には、いうまでもなく理論的な解析的研究が基礎になる。そしてそこから得られるものが、定性理論 *qualitative theory* とよばれているものである。ところが、このような研究では一般的な結果が得られるだけに、反面得られる結果にはある限界があり、実際に出てくる具体的な問題を解決するような結果は特殊な場合を除いてほとんど得られない。このような研究では、たとえば、"十分広い領域をとれば、その中には少なくとも一つ周期解が存在する"とか、"パラメータ ε の絶対値が十分小さければ、周期解が存在する"とか、いった結果がよく得られている。ところが実際問題では、少なくともその周期解の存在する範囲が可成りせまく指示されなければ役に立たないし、またパラメータ ε の値が、たとえば、0.1のときには周期解が存在するのかわかり、明確でなければ役に立たない。非線形振動の研究では、上

に述べたように、周期解あるいは擬周期解を実際に求めてその特性を明らかにする、というところがまた重要な問題なのであるが、理論的・解析的方法でこの問題が解決されているのは、弱非線形系 *weakly nonlinear system* の場合、すなわち、 $X(t, x)$ が

$$X(t, x) = A(t)x + f(t, x)$$

の形で $\|f(t, x)\|$ が何らかの意味で $A(t)x$ に比べて小さい場合だけである。しかもこのとき用いられている方法は、いわゆる擾動法で、パラメータに関する展開によって解が求められている。しかしこのとき、この展開が有意義であるパラメータの範囲は具体的・問題に適用できる形には一般に確定されていない。

上に述べたような事情から、非線形振動の研究では、最近の電子計算機の普及にともなって、数値解析的研究が盛んに行われるようになった。数値解析的研究では、解析的研究によって、電子計算機による数値計算により周期解あるいは擬周期解を見出す方法を開発することが、最も基本的な問題になる。周期解を見出す方法は、現在すでにいくつか開発されており、これらの方法を用いて解析的研究では手のつかない非線形振動も次第に解明されている。しかし、擬周期

解を数値計算により見出す方法は、まだ十分に開発されておらず、現在は研究の過程にある。周期解、あるいは擬周期解が見出されると、その安定性を数値計算によって調べることは比較的容易である。したがって、数値解析的研究では安定問題は重要な分野にはなっていない。

数値解析的研究では、具体的な方程式に対して一つ一つ周期解あるいは擬周期解を数値計算によって求めるので、一般的の通則が理論的に得られるわけではない。数値計算はちょうど物理学や工学における実験に対応するもので、一般的の通則は計算結果を補間して推測されるだけである。しかし、この推測される通則も解析的研究だけではほとんど得られないので、電子計算機の発達した今日では非線形振動の研究にとっては数値解析的研究は欠かせないものになっている。

ところで、電子計算機を用いる数値計算にあつては、その計算は正確には行われない。四則演算の結果はその都度四捨五入によって丸められ、極限を含む無限演算はすべて有限演算で近似して行われる。したがって計算結果はつねにある程度の誤差をともなっている。そこで、計算結果から正しい結論を得るためには、この計算結果に含まれている誤差を評価して真の値の範囲を確定することが必要になる。このことは、数値計算に従事している人達の間ではあまり取り上げ

られなかったが、これは一つには結果を得るに急いでこまで手がまわらなかつたということ、また一つにはこのような仕事は労が多くて報われるものが少ないと考えられていたこと、この二つに原因があるように思われる。ところが、計算結果の誤差評価があまり行われていないため、数値計算によって得られた結果に対して数学者は不信感を抱き、なかには数値解析的研究に対して拒絶反応を示す人もいる有様である。このようなことをなくするためにも、今後は計算結果の誤差評価を行って真の値の範囲を確定し、数値計算によって得られた結論を論理的にも正しいものにする必要がある。こうした方向の研究は最近ヨーロッパの若い人達の間で盛んに行われるようになったので、やがて数値計算に対する不信感は消えてなくなるだろう、と思っている。

非線形振動の数値解析的研究を紹介するのがこの小論の目的であるが、そのすべての紹介することは紙数が許さないので、ここでは代表的なものだけを紹介することにする。

2. 自励系に対する周期解の計算

自励系の場合、(1.1)は次の形である：

$$(2.1) \quad \frac{dx}{dt} = X(x).$$

以下, x, X はともに n 次元ベクトルで, $X(x)$ は n 次元 Euclid 空間 R^n の領域 G で x に関して必要なら連続微分可能であるとする (解析的な理論のためには高位の滑さは必要でないが, 微分方程式の数値積分などを行うので, 高精度の結果を得るためにはこの仮定が必要になる)。

自励系の解の性質を解析的に調べるには, x -空間 (いまの場合 R^n であるが, これを (2.1) の相空間 *phase space* とよんでいる) において (2.1) の解が表わす曲線 (これを (2.1) の軌道 *orbit* とよんでいる) に沿う局所的な直交動座標系 *orthogonal moving coordinate system* を用いるのが便利である。いま,

$$(2.2) \quad C_0: x = \varphi_0(t) \quad (a \leq t \leq b, a < 0, b > 0)$$

を (2.1) の G 内にある軌道とすると, これに沿う局所的な直交動座標系のうち便利で簡単なものは

$$(2.3) \quad \{ \hat{X}[\varphi_0(t)], \hat{\xi}_2(t), \hat{\xi}_3(t), \dots, \hat{\xi}_n(t) \}$$

で与えられる。ただし,

$$(2.4) \quad \hat{X}[\varphi_0(t)] = X[\varphi_0(t)] / \|X[\varphi_0(t)]\|,$$

$$(2.5) \quad \xi_\nu = e_\nu - \frac{\cos \theta_\nu}{1 + \cos \theta_1} \{e_1 + \hat{X}[\varphi_0(t)]\} \\ (\nu = 2, 3, \dots, n)$$

である。ここで $\|\cdot\|$ はベクトルの Euclid ノルムを表わし、 e_1 は $n=2$ のときは任意の単位ベクトル、 $n \geq 3$ のときは考える t の区間 $[a, b]$ で $-\hat{X}[\varphi_0(t)]$ と決して一致しない単位ベクトル、 $e_2, e_3, \dots, e_n$ は e_1 に直交し、しかも互に直交する単位ベクトルで、 $*$ でベクトルの転置を表わすと

$$(2.6) \quad \cos \theta_i = e_i^* \hat{X}[\varphi_0(t)] \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

である。(2.3) ~ (2.5) で与えられる直交動座標系の導き方や、その他詳しいことについては文献 [8, 17] を見ていただきたい。

直交動座標系 (2.3) を用いると、 C_0 の近くにある (2.1) の軌道

$$(2.7) \quad C: x = \varphi(\tau)$$

は次のように表わされる:

$$(2.8) \quad x = \varphi(\tau) = \varphi_0(t) + \sum_{\nu=2}^n \rho_\nu \xi_\nu(t).$$

ただし、点 $\varphi_0(0)$ において C_0 に直交する超平面から、 C に沿って動くとき、点 $\varphi_0(t)$ において C_0 に直交する超平面に達するに要する時間である。 C は (2.1) の軌道であるから、 $x = \varphi(\tau)$ は

$$(2.9) \quad \frac{dx}{d\tau} = X(x)$$

をみたしている。そこで (2.8) を (2.9) に代入する。すると若干の計算ののち、次の式が得られる：

$$(2.10) \quad \frac{d\tau}{dt} = (\|X\|^2 + \sum_{\mu=2}^n \rho_{\mu} X^* \dot{\xi}_{\mu}) / X^* X' \quad (\cdot = \frac{d}{dt}),$$

$$(2.11) \quad \frac{d\rho}{dt} = R(t, \rho).$$

ただしここで

$$(2.12) \quad X = X[\varphi_0(t)], \quad X' = X[\varphi_0(t) + \sum_{\nu=2}^n \rho_{\nu} \xi_{\nu}(t)]$$

で、 ρ は $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$ を成分にもつ $(n-1)$ 次元ベクトル、 $R(t, \rho)$ は次のものを成分にもつ $(n-1)$ 次元ベクトルである：

$$(2.13) \quad R_{\nu}(t, \rho) = \frac{\|X\|^2 + \sum_{\mu=2}^n \rho_{\mu} X^* \dot{\xi}_{\mu}}{X^* X'} \cdot \dot{\xi}_{\nu}^* X' - \sum_{\mu=2}^n \rho_{\mu} \dot{\xi}_{\nu}^* \dot{\xi}_{\mu} \\ (\nu = 2, 3, \dots, n).$$

上の式から直ぐわかるように

$$(2.14) \quad R(t, 0) = 0$$

である。したがって $p = 0$ は (2.11) の解で、これは (2.8) からわかるように、軌道 C_0 を表わしている。(2.11) の $p = 0$ に関する第一変分方程式を考えると、(2.13) からわかるように、それは次のようになる：

$$(2.15) \quad \frac{dr}{dt} = A(t)r.$$

ただし $A(t)$ は $(n-1)$ 次の正方行列で、その要素 $A_{\nu\mu}(t)$ ($\nu, \mu = 2, 3, \dots, n$) は次の通りである：

$$(2.16) \quad A_{\nu\mu}(t) = \dot{\xi}_\nu^*(t) X_x[\varphi_0(t)] \xi_\mu(t) - \dot{\xi}_\nu^*(t) \dot{\xi}_\mu(t) \\ (\nu, \mu = 2, 3, \dots, n).$$

ただしここで $X_x(x)$ は $X(x)$ の x に関する Jacobian 行列を表わしている。方程式 (2.11) の解で $t=0$ のとき $p=c$ となるものを $p(t, c)$ で表せば、(2.14) により $p(t, 0) = 0$ であり、 $p(t, c)$ の c に関する Jacobian 行列を $p_c(t, c)$ で表せば、よく知られているように、 $p_c(t, 0)$ は (2.15) の $t=0$ のとき単位行列となる基本行列 $\Phi(t)$ と一致する。

(2.8) によって

$$(2.17) \quad \varphi(\tau, c) = \varphi_0(t) + \sum_{\nu=2}^m p_{\nu}(t, c) \dot{\xi}_{\nu}(t)$$

とおけば, $x = \varphi(\tau, c)$ は (2.9) の解で, τ の意味から

$$(2.18) \quad \varphi(0, c) = \varphi_0(0) + \sum_{\nu=2}^m c_{\nu} \dot{\xi}_{\nu}(0)$$

をみたしている. いま, 区間 $[a, 0)$ に属する任意の点 t_0 をとり, 点 $\varphi_0(t_0)$ において C_0 に接する超平面

$$(2.19) \quad \pi: \alpha^* x = \beta$$

を考えよう. π は C_0 に接する, ということから,

$$(2.20) \quad \alpha^* X[\varphi_0(t_0)] \neq 0$$

である. 方程式 $x = \varphi(\tau, c)$ で表わされる軌道が超平面 π と交わる点を (2.17) によって

$$(2.21) \quad \varphi(\hat{t}_0, c) = \varphi_0(\hat{t}_0) + \sum_{\nu=2}^m p_{\nu}(\hat{t}_0, c) \dot{\xi}_{\nu}(\hat{t}_0)$$

とすれば, (2.19) により $\hat{t}_0$ は次の方程式によって定まる:

$$(2.22) \quad \alpha^* \left[\varphi_0(\hat{t}_0) + \sum_{\nu=2}^m p_{\nu}(\hat{t}_0, c) \dot{\xi}_{\nu}(\hat{t}_0) \right] - \beta = 0.$$

$c=0$ のときは明らかに $\hat{t}_0 = \hat{x}_0 = t_0$ で, しかも (2.22) の左辺の $\hat{t}_0$ に関する導関数は $c=0$ のときは $\alpha^* X[\varphi_0(t_0)]$

で"これは (2.20) により 0 で"なり. この ようにして陰関数に関する定理から, $\|c\|$ が小さいときは $\hat{t}_0$ は t_0 の近くで一意的に c の関数 $\hat{t}_0(c)$ として定まり, $\hat{t}_0(0) = t_0$ で, しかも (2.22) から

$$(2.23) \quad \left. \frac{\partial \hat{t}_0}{\partial c_\lambda} \right|_{c=0} = - \frac{\sum_{\nu=2}^n \alpha^* \dot{f}_\nu(t_0) \Psi_{\nu\lambda}(t_0)}{\alpha^* X[\varphi_0(t_0)]} \quad (\lambda=2,3,\dots,n)$$

が成り立つことになる. したがって (2.23) で c_λ ($\lambda=2,3,\dots,n$) はベクトル c の成分を表わし, $\Psi_{\nu\lambda}(t)$ ($\nu, \lambda=2,3,\dots,n$) は行列 $\Psi(t)$ の要素を表わしている. $\hat{t}_0 = \hat{t}_0(c)$ を (2.21) に代入すれば, (2.23) より次の式が得られる:

$$(2.24) \quad \varphi(\hat{t}_0, c) - \varphi_0(t_0) = \sum_{\nu=2}^n \left\{ -X[\varphi_0(t_0)] \cdot \frac{\alpha^* \dot{f}_\nu(t_0)}{\alpha^* X[\varphi_0(t_0)]} + \dot{f}_\nu(t_0) \right\} \sum_{\lambda=2}^n \Psi_{\nu\lambda}(t_0) c_\lambda + o(\|c\|).$$

この式は与えられた自励系 (2.1) の軌道の超平面 π 内における変分を与えている.

自励系の周期解を求めることは, 相空間における閉軌道を求めることになるので, われわれは近似的に閉じている軌道から出発して逐次これに補正を加え, この演算を繰返して閉軌道を求めることにする (文献 [11] 参照).

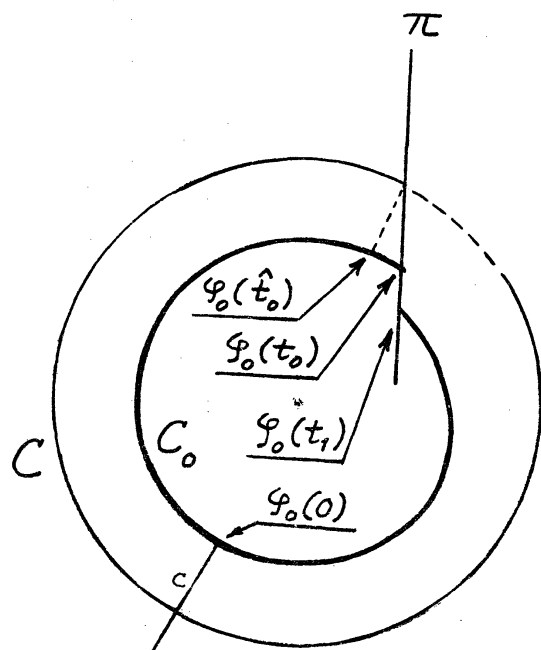
このような立場から，上に考えた軌道 C_0 は近似的に閉じているものとする． C_0 が近似的に閉じている，ということとは，点 $\varphi_0(t_0)$ から出発して C_0 に沿って t の増加する方向に進み超平面 π と再び交わる点を $\varphi_0(t_1)$ ($0 < t_1 \leq \theta$) とするとき，点 $\varphi_0(t_1)$ が点 $\varphi_0(t_0)$ に近い，ということである．点 $\varphi_0(t_1)$ は微分方程式 (2.1) を数値積分し，その結果を利用して方程式

$$(2.25) \quad \alpha^* \varphi_0(t_1) = \beta$$

を t_1 について数値的に解けば容易に求められる．(2.20) により

$$(2.26) \quad \alpha^* X[\varphi_0(t_1)] \neq 0$$

であることは明らかである．すると， $\hat{t}_0$ と同様に， t_1 に対して $\hat{t}_1$ が (2.22) と同じ形の方程式によって定まるとき， $\hat{t}_0$ と同様に t_1 に対して $\hat{t}_1$ が定まってきたり， $\hat{t}_1, \hat{t}_1$ は (2.21)



第1図

と同じ形の方程式'をみたすようになる。このとき、軌道 C が閉軌道になるための必要十分条件は明らかに

$$(2.27) \quad \varphi(\hat{t}_1, c) - \varphi(\hat{t}_0, c) = 0$$

である。しかし、点 $\varphi(\hat{t}_1, c)$, $\varphi(\hat{t}_0, c)$ はともに超平面 π 上にあるから、方程式'(2.27)は次の連立方程式'と同値に有る:

$$(2.28) \quad F_\nu(c) := l_\nu^* [\varphi(\hat{t}_1, c) - \varphi(\hat{t}_0, c)] = 0 \\ (\nu = 2, 3, \dots, n).$$

ただし l_ν ($\nu = 2, 3, \dots, n$)は超平面 π 内にあって互に直交する単位ベクトルである。閉軌道を求める問題はこのようにして方程式'(2.28)をみたす c を見出す問題に帰着される。

方程式'(2.28)の解 c を計算するために、Newton法を用いよう。Newton法を用いるためには、 $\partial F_\nu(c)/\partial c_\lambda$ ($\nu, \lambda = 2, 3, \dots, n$)の値が必要になる。これらの値に対しては(2.24)より次の式'を得る:

$$(2.29) \quad \left. \frac{\partial F_\nu(c)}{\partial c_\lambda} \right|_{c=0} = l_\nu^* \sum_{\mu=2}^n \left\{ [-X[\varphi_0(t_1)]] \cdot \frac{\alpha^* \dot{z}_\mu(t_1)}{\alpha^* X[\varphi_0(t_1)]} \right\}$$

$$+\dot{\xi}_{\mu}(t_1)]\Psi_{\mu\lambda}(t_1)$$

$$-[-X[\varphi_0(t_0)] \cdot \frac{\alpha^* \dot{\xi}_{\mu}(t_0)}{\alpha^* X[\varphi_0(t_0)]} + \dot{\xi}_{\mu}(t_0)]\Psi_{\mu\lambda}(t_0)\}$$

$$(\nu, \lambda = 2, 3, \dots, n).$$

とこるが、いまの場合、 $\varphi_0(t_1) \approx \varphi_0(t_0)$ であるから、
(2.5) により $\dot{\xi}_{\mu}(t_1) \approx \dot{\xi}_{\mu}(t_0)$ ($\mu = 2, 3, \dots, n$) とる
り、(2.29) より次の式を得る：

$$(2.30) \quad \left. \frac{\partial F_{\nu}(c)}{\partial c_{\lambda}} \right|_{c=0} \approx \sum_{\mu=2}^n \left[-l_{\nu}^* X^{(0)} \cdot \frac{\alpha^* \dot{\xi}_{\mu}^{(0)}}{\alpha^* X^{(0)}} + l_{\nu}^* \dot{\xi}_{\mu}^{(0)} \right] \times \\ \times [\Psi_{\mu\lambda}^{(1)} - \Psi_{\mu\lambda}^{(0)}] \\ (\nu, \lambda = 2, 3, \dots, n).$$

ただし

$$(2.31) \quad \begin{cases} X^{(0)} = X[\varphi_0(t_0)], \\ \dot{\xi}_{\mu}^{(0)} = \dot{\xi}_{\mu}(t_0) \\ \Psi_{\mu\lambda}^{(1)} = \Psi_{\mu\lambda}(t_1), \quad \Psi_{\mu\lambda}^{(0)} = \Psi_{\mu\lambda}(t_0) \end{cases} \\ (\mu, \lambda = 2, 3, \dots, n)$$

である。(2.30) の右辺の量を $K_{\nu\lambda}$ で表わすと、(2.28) の解を計算する Newton 法 (いまの場合とはくに一般化され

は Newton 法とよばれているものであるが) というのは, $c = c^{(0)} = 0$ から出発して,

$$(2.32) \quad \begin{cases} \sum_{\lambda=2}^n K_{\nu\lambda} h_{\lambda}^{(p)} + F_{\nu}[c^{(p)}] = 0, \\ c_{\nu}^{(p+1)} = c_{\nu}^{(p)} + h_{\nu}^{(p)} \end{cases}$$

$$(\nu=2, 3, \dots, n; p=0, 1, 2, \dots)$$

によって $c_{\nu}^{(p)}$ ($\nu=2, 3, \dots, n; p=0, 1, 2, \dots$) を逐次求め、適当なところでこの演算を止めて最後に得られた $c_{\nu}^{(p)}$ ($\nu=2, 3, \dots, n$) をもって望む解の近似とする, 方法である. (2.32) の演算を実行するためには, c がわかっているときには $F_{\nu}(c)$ ($\nu=2, 3, \dots, n$) および $\Psi_{\mu\lambda}(t)$ ($\mu, \lambda=2, 3, \dots, n$) が計算されればよい. $F_{\nu}(c)$ は (2.28) からわかるように, $\varphi(\hat{c}_0, c)$, $\varphi(\hat{c}_1, c)$ が計算されれば直ちに求められるが, $\varphi(\hat{c}_0, c)$, $\varphi(\hat{c}_1, c)$ は微分方程式 (2.9) を数値積分しその結果を利用すれば方程式

$$\alpha^* \varphi(\hat{c}_0, c) = \alpha^* \varphi(\hat{c}_1, c) = \beta$$

から容易に求められる. このようにして $F_{\nu}(c)$ ($\nu=2, 3, \dots, n$) の値は容易に求められる. $\Psi_{\mu\lambda}(t)$ ($\mu, \lambda=2, 3, \dots, n$) は微分方程式 (2.15) の $t=0$ のとき単位行列となる基本行列 $\Psi(t)$ の要素であるから, 微分方程式 (2.15)

を数値積分すれば容易に求められる。このようにして (2.32) の演算は実際に遂行する = ことができ、これによって相空間における閉軌道が求められ、したがって与えられた自励系 (2.1) の周期解が計算されることになる。

(2.32) で、 $l_{\lambda}^{(p)}$ は $c^{(p)}$ の補正量であるが、これが一意的に定まるためには、 $K_{\nu\lambda}$ ($\nu, \lambda = 2, 3, \dots, n$) を要素とする行列 K の行列式が 0 であってはならない。ところが、

$$(2.33) \quad -l_{\nu}^{*} X^{(0)} \cdot \frac{\alpha^{*} \dot{\xi}_{\mu}^{(0)}}{\alpha^{*} X^{(0)}} + l_{\nu}^{*} \dot{\xi}_{\mu}^{(0)} \quad (\nu, \mu = 2, 3, \dots, n)$$

を要素とする行列の行列式は 0 でない。なぜなら、もしそれが 0 ならば、

$$l_{\nu}^{*} \sum_{\mu=2}^n \left[-X^{(0)} \cdot \frac{\alpha^{*} \dot{\xi}_{\mu}^{(0)}}{\alpha^{*} X^{(0)}} + \dot{\xi}_{\mu}^{(0)} \right] d_{\mu} = 0 \quad (\nu = 2, 3, \dots, n)$$

をみたす n 個の 0 でない $d_2, d_3, \dots, d_n$ が存在し、 l_{ν} ($\nu = 2, 3, \dots, n$) の意味から

$$(2.34) \quad \sum_{\mu=2}^n \left[-X^{(0)} \cdot \frac{\alpha^{*} \dot{\xi}_{\mu}^{(0)}}{\alpha^{*} X^{(0)}} + \dot{\xi}_{\mu}^{(0)} \right] d_{\mu} = k \alpha$$

が成り立つような数 k が存在する。上の式の両辺に左から α^{*} を掛けると、 $0 = k \alpha^{*} \alpha$ を得るので、 $k = 0$ を得る。すると、(2.34) の両辺に左から $\dot{\xi}_{\nu}^{(0)*}$ ($\nu = 2, 3, \dots, n$) を

掛ける $d_\nu = 0$ ($\nu = 2, 3, \dots, n$) を得る。これは矛盾である。このようにして、(2.33) で与えられる量を要素とする行列の行列式は 0 でない、ことがわかる。すると、(2.30) からわかるように、 $K_{\nu\lambda}$ ($\nu, \lambda = 2, 3, \dots, n$) を要素とする行列の行列式は

$$(2.35) \quad \Psi_{\mu\lambda}^{(1)} - \Psi_{\mu\lambda}^{(0)} \quad (\mu, \lambda = 2, 3, \dots, n)$$

を要素とする行列の行列式が 0 でないとき、そのときに限り 0 でない。

与えられた自励系が 2 次元の場合には、上に出てきた諸量は非常に簡単になる。2 次元の場合、与えられた自励系を便宜上 (2.1) の代りに

$$(2.36) \quad \frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

と書き、この軌道 C_0 の方程式を (2.2) の代りに

$$(2.37) \quad C_0: x = \varphi_0(t), \quad y = \psi_0(t)$$

と書くことにする。すると、(2.5) で与えられる 1 フトルの成分は

$$(2.38) \quad -Y(X^2 + Y^2)^{-1/2}, \quad X(X^2 + Y^2)^{-1/2}$$

となる。ただしここで

$$(2.39) \quad X = X[\varphi_0(t), \psi_0(t)], \quad Y = Y[\varphi_0(t), \psi_0(t)]$$

である。(2.38)から, 簡単な計算で"方程式"(2.15)は次のようになることが示される:

$$(2.40) \quad \frac{dr}{dt} = \left[(X_x + Y_y) - \frac{X\dot{X} + Y\dot{Y}}{X^2 + Y^2} \right] r.$$

ただし

$$(2.41) \quad \begin{cases} X_x = \frac{\partial X}{\partial x}[\varphi_0(t), \psi_0(t)], \quad Y_y = \frac{\partial Y}{\partial y}[\varphi_0(t), \psi_0(t)], \\ \dot{X} = \frac{d}{dt} X[\varphi_0(t), \psi_0(t)], \quad \dot{Y} = \frac{d}{dt} Y[\varphi_0(t), \psi_0(t)] \end{cases}$$

である。(2.40)から, この $t=0$ のとき 1 となる基本行列 $\mathbb{I}(t)$ は次の式で与えられることが容易にわかる:

$$(2.42) \quad \mathbb{I}(t) = (X_0^2 + Y_0^2)^{1/2} (X^2 + Y^2)^{-1/2} e^{h(t)}.$$

ただし

$$(2.43) \quad X_0 = X[\varphi_0(0), \psi_0(0)], \quad Y_0 = Y[\varphi_0(0), \psi_0(0)],$$

$$(2.44) \quad h(s) = \int_0^s (X_x + Y_y) dt$$

である。

以上の結果を用いて、筆者は柳原、篠原らとの協力のもとに van der Pol の方程式'

$$(2.45) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \lambda(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (\lambda > 0)$$

の周期解を λ の種々なる値に対して計算した (文献 [9, 10, 12, 13, 17, 27, 29] 参照)。その方法を簡単に説明しておこう。

まず、(2.45) を次の形に書き直す：

$$(2.46) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y). \end{cases}$$

ただしここで

$$(2.47) \quad X(x, y) = y, \quad Y(x, y) = -x + \lambda(1-x^2)y$$

である。(2.46) の相平面における危点 *critical point* は $(0, 0)$ で、しかも $x = x(t), y = y(t)$ が (2.46) をみたしているときは $x = -x(t), y = -y(t)$ も (2.46) をみたしている、言いかえると、相平面上で (2.46) の軌道の原点に関する対称図形はまた (2.46) の軌道になっている。これらのことから、(2.46) の閉軌道は、原点をかこむ原点に関して対称な閉曲線であることがわかる。

(2.46) の閉軌道を求めるため、 $t=0$ のとき $x=a$ ($a>0$)、 $y=0$ とする (2.46) の解を考え、これを

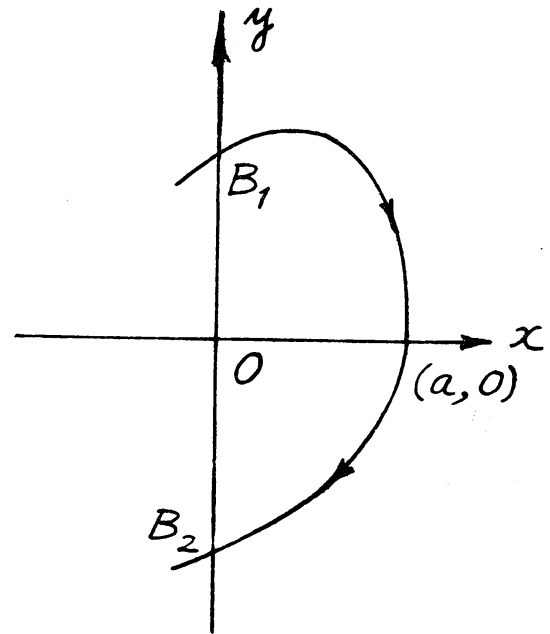
$$(2.48) \quad x = \varphi(t, a), \quad y = \psi(t, a)$$

で表わし、この解が表わす軌道を C とする。相平面の原点を O とし、 C が y 軸と交わる点を B_1, B_2 ($\vec{OB}_1 > 0, \vec{OB}_2 < 0$) とすれば、上に述べたことから C が閉軌道となるための条件は

$$(2.49) \quad \vec{OB}_1 + \vec{OB}_2 = 0$$

である。この条件は、一般の自動系に対する条件 (2.28) より実際計算にははるかに便利である。なぜなら、(2.49) の場合には、与えられた微分方程式の数値積分が (2.28) の場合の半分ですむからである。

点 B_1, B_2 の座標はそれぞれ $(0, \psi[t, (a), a])$,



第2図

$(0, \psi[t_2(a), a])$ で, $t_1(a) (< 0)$ および $t_2(a) (> 0)$ はそれぞれ次の方程式'によって定まる:

$$(2.50) \quad \varphi[t_1(a), a] = 0, \quad \varphi[t_2(a), a] = 0.$$

条件 (2.49) はこのようにして定まる $t_1(a)$, $t_2(a)$ を用いると

$$(2.51) \quad F(a) := \psi[t_1(a), a] + \psi[t_2(a), a] = 0$$

と書かれる. van der Pol の方程式'の閉軌道を求めるには, このようにして方程式' (2.51) をみたす a をみつければよいことになる.

方程式' (2.51) は一般の自励系の場合の方程式' (2.28) に対応するもので, とくにいまの場合には超平面 π は直線 $x=0$ であり, したがって (2.19) により

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である. また微分方程式' (2.46) の軌道は容易にわかるようにすべて x 軸に直交している. これらのことから, (2.29), (2.38), (2.42) によって次の式'が得られる:

$$(2.52) \quad \frac{dF(a)}{da} = (X_0^2 + Y_0^2)^{1/2} \left[\frac{e^{\kappa[t_1(a)]}}{X_1} + \frac{e^{\kappa[t_2(a)]}}{X_2} \right].$$

に代入し

$$(2.53) \quad \begin{cases} X_0 = X(a, 0) = 0, & Y_0 = Y(a, 0) = -a, \\ X_1 = X(0, \psi[t_1(a), a]) = \psi[t_1(a), a], \\ X_2 = X(0, \psi[t_2(a), a]) = \psi[t_2(a), a] \end{cases}$$

より,

$$(2.54) \quad \begin{aligned} h(t) &= \int_0^t \{ X_x[\varphi(s, a), \psi(s, a)] + Y_y[\varphi(s, a), \psi(s, a)] \} ds \\ &= \lambda \int_0^t [1 - \varphi^2(s, a)] ds \end{aligned}$$

である。(2.53), (2.54) を (2.52) に代入すれば

$$(2.55) \quad \frac{dF(a)}{da} = a \left\{ \frac{e^{h[t_1(a)]}}{\psi[t_1(a), a]} + \frac{e^{h[t_2(a)]}}{\psi[t_2(a), a]} \right\}$$

を得る。

さて, $a = a_0$ を方程式 (2.51) の根の第1近似とし,

$$(2.56) \quad \begin{cases} h_1 = h[t_1(a_0)], & h_2 = h[t_2(a_0)], \\ \kappa = \psi[t_1(a_0), a_0] \end{cases}$$

とおくとき,

$$\psi[t_2(a_0), a_0] \approx -\psi[t_1(a_0), a_0] = -\kappa$$

であるから, (2.55) より

$$(2.57) \quad \frac{dF(a)}{da} \approx \frac{a_0}{\kappa} (e^{\kappa_1} - e^{\kappa_2})$$

を得る. すると, (2.51) の根を計算する一般化された Newton 法では (2.32) に対応して, $a = a_0$ から出発して,

$$(2.58) \quad a_{p+1} = a_p - \frac{\kappa}{a_0} \cdot \frac{F(a_p)}{e^{\kappa_1} - e^{\kappa_2}} \\ (p=0, 1, 2, \dots)$$

によって a_p ($p=1, 2, \dots$) を逐次計算することになる.

第1近似の a_0 を見出すには, まずパラメータ λ が小さいときから出発する. λ が小さいときは, 摂動法でよく知られているように (たとえば文献 [17] の p. 101-118), 方程式 (2.46) は

$$x = 2 \cos t, \quad y = -2 \sin t$$

に近い周期解を一つだけ一つもっている. このことは, λ が小さいときは, $a_0 = 2$ としてよいことを意味している. λ が小さいとき上に述べた方法で閉軌道が計算されると, その

あとは入の値を逐次少しづつ増加させてゆき、前の段階で計算された Q の値を新しい入の値に対する Q_0 によって計算を続けることができる。

上の方法で計算された Q の値はその意味から、明らかに与えられた方程式 (2.45) の周期解によって表わされる振動の振幅を与えている。

閉軌道を与える Q に対しては (2.51) が成り立つから、任意の t に対して

$$(2.59) \quad \begin{cases} \varphi[t+t_1(a), a] = -\varphi[t+t_2(a), a], \\ \psi[t+t_1(a), a] = -\psi[t+t_2(a), a] \end{cases}$$

が成り立つ。なぜなら、 $x = \varphi[t+t_1(a), a]$, $y = \psi[t+t_1(a), a]$, および $x = -\varphi[t+t_2(a), a]$, $y = -\psi[t+t_2(a), a]$ はともに微分方程式 (2.46) の解であり、しかも $t=0$ に対しては (2.50), (2.51) により同一の値をとるからである。(2.59) において t を $t-t_1(a)$ で置き換えると、

$$(2.60) \quad \begin{cases} \varphi(t, a) = -\varphi[t+t_2(a)-t_1(a), a], \\ \psi(t, a) = -\psi[t+t_2(a)-t_1(a), a] \end{cases}$$

を得る。(2.60) で $t=0$ とすれば、 $\varphi(t, a)$, $\psi(t, a)$ の意味から

$$(2.61) \quad \begin{cases} \varphi[t_2(a) - t_1(a), a] = -a, \\ \psi[t_2(a) - t_1(a), a] = 0 \end{cases}$$

を得るので、(2.60)において $t = t_2(a) - t_1(a)$ とおいて

$$(2.62) \quad \begin{cases} \varphi[2\{t_2(a) - t_1(a)\}, a] = a, \\ \psi[2\{t_2(a) - t_1(a)\}, a] = 0 \end{cases}$$

を得る。これは a に対応する閉軌道が表わす (2.45) の周期解の周期 T が

$$(2.63) \quad T = 2\{t_2(a) - t_1(a)\}$$

で与えられることを示している。

上のようにして得られた閉軌道の軌道安定性は文献 [8], [17] に示されているように、この閉軌道に沿う直交座標系に関する微分方程式 (2.11) の第一変分方程式 (2.15) の固有指数によって判定される。この場合、閉軌道に対応する周期解の周期を T とすれば、(2.5), (2.6) により閉軌道に沿う直交座標系は周期 T をもつことになり、したがって微分方程式 (2.11) の右辺の関数 $R(t, p)$ は t に関して周期 T をもつことになり、(2.11) の第一変分方程式 (2.15) においては行列 $A(t)$ は周期 T をもつことになり、このち

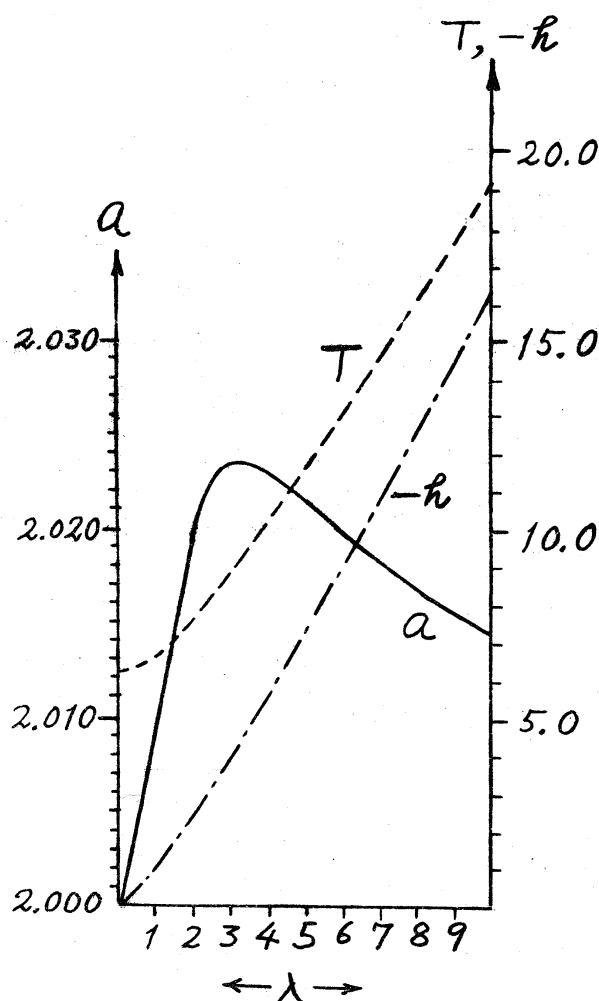
程式の固有指数が定義されてくる。2次元の場合には、第一変分方程式'(2.15)は(2.40)になるので、(2.42)から(2.40)の固有指数 κ は

$$(2.64) \quad \kappa = \frac{1}{T} \kappa(T)$$

で与えられることになる

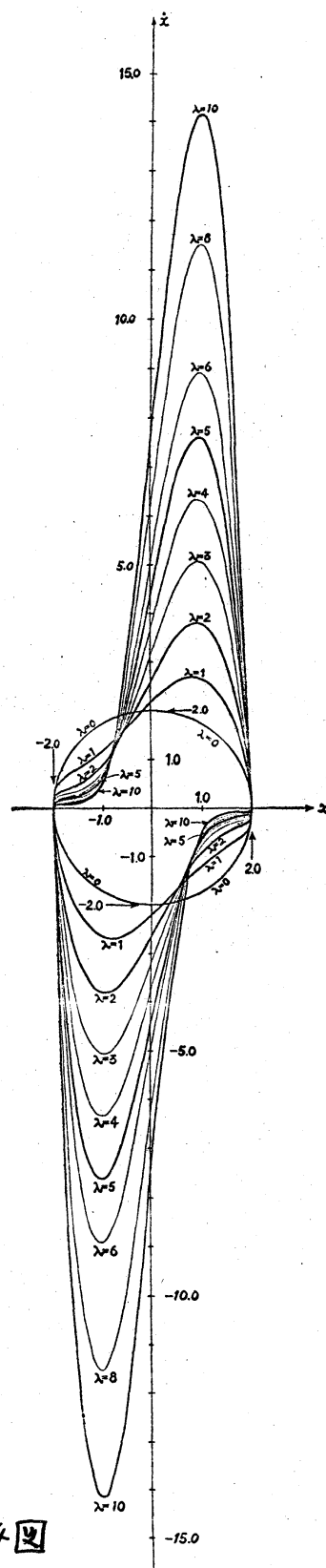
数値計算によって得られた振幅 a 、周期 T 、固有指数 κ の値を図示すると、第3図のようになる。また、計算によって得られた開軌道の形状を図示すると第4図のようになる。

第3図から van der Pol の方程式の周期解に対して重要な事実が観測さ



第3図

れる。するわけ、
 van der Pol の方
 程式'の周期解に
 あっては、振幅
 a は λ が変化し
 ても極めて少し
 しか変化せず、
 しかも λ が 0 か
 ら増加してゆく
 ときは a は 2 か
 ら増加し $\lambda = 3$
 の近くで最大に
 なりそのあとは
 単調に減少して
 2 に近づいてゆ
 く。しかもこの
 とき a の最大値
 はほぼ 2.0235
 で、2 からの隔り
 はきわめて小さい。
 このような事実は



第4図

数値計算によって始めて見出されたもので、数値解析的研究が非線形振動の研究にいかん重要であることを示している。

3. 周期系に対する周期解の計算

(1.1) が周期系であるとき、 $X(t, x)$ の t に関する周期を $T(>0)$ とすれば、 $t = (T/2\pi)\tau$ とおくことによつて

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{T}{2\pi} X\left(\frac{T}{2\pi}\tau, x\right)$$

を得る。このとき、右辺の関数は τ に関して周期 2π をもつ。このことから、われわれは、周期系 (1.1) にあつては、右辺の関数 $X(t, x)$ は始めから t に関しては周期 2π をもっていると仮定する。

(1.1) の 2π 周期解 (周期 2π をもつ解をこのように略称する) を計算する有力な方法の一つに Galerkin 法とよばれているものがある。この方法は、その理論も実際計算上のテクニックも筆者によって開発されたものであるが (文献 [14, 15, 16, 26])、その有用性が認められて現在広く用いられているので、ここにその概要を紹介することにする。

Galerkin 法では、(1.1) の 2π 周期解を三角多項式

$$(3.1) \quad x_m(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{p=1}^m (a_p \cos pt + b_p \sin pt)$$

で近似し, $x_m(t)$ を

$$(3.2) \quad \frac{dx_m(t)}{dt} = P_m X[t, x_m(t)]$$

が成り立つように定める。ただし (3.2) で, P_m は任意の連続な周期関数からその Fourier 級数の m より高次の調和項をすべて切捨て, たかだか m 位の三角多項式をつくる演算を表わしている。(3.2) をみたす三角多項式 $x_m(t)$ をわれわれは (1.1) の周期解の m 位の Galerkin 近似とよんでいふ。

方程式 (3.2) は明らかに次の方程式と同値である:

$$(3.3) \quad \begin{cases} F_0(\alpha) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} X[t, x_m(t)] dt = 0, \\ F_p(\alpha) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} X[t, x_m(t)] \cos pt dt - p b_p = 0, \\ G_p(\alpha) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} X[t, x_m(t)] \sin pt dt + p a_p = 0 \end{cases}$$

($p=1, 2, \dots, m$).

ただしここで α は $(a_0^*, a_1^*, b_1^*, \dots, a_m^*, b_m^*)^*$ を表わしている。(1.1) で, $x, X(t, x)$ はともに n 次元ベクトルであるとするれば, $x_m(t)$ の Fourier 係数 $a_0, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m$ はす

Γ が n 次元 Γ -クトルであるから、 α は $(2m+1)n$ 次元の Γ -クトルであり、方程式 (3.3) はこれに関する $(2m+1)n$ 個の方程式から成る連立方程式である。Galerkin 近似 $x_m(t)$ は方程式 (3.3) を解くことにより求まるから、方程式 (3.3) をゆれゆれは Galerkin 近似の決定方程式とよんでいる。

Galerkin 法によって周期解の近似が得られるためには、当然のことであるが、与えられた微分方程式と望む周期解とに若干の条件が必要になる。筆者が課した条件は次のようなものである：

1° 与えられた微分方程式 (1.1) において、右辺の関数 $X(t, x)$ は $R^1 \times D$ で定義されていて、 $X(t, x)$ は x に関して周期 2π をもち x に関しては連続微分可能で、これの x に関する Jacobi 行列 $\Psi(t, x)$ は $X(t, x)$ とともに $R^1 \times D$ で x に関して連続微分可能である。ただしこのとき、 R^1 は実直線で D は n 次元 Euclid 空間の与えられた有界な閉領域である。

2° (1.1) の望む 2π 周期解 $\hat{x}(t)$ は、その R^n 内に表わす曲線 $x = \hat{x}(t)$ が D の内部にあり、しかも (1.1) の $\hat{x}(t)$ に関する第一変分方程式

$$(3.4) \quad \frac{dy}{dt} = \Psi[t, \hat{x}(t)]y$$

の $t=0$ のとき単位行列 E となる基本行列 $\Phi(t)$ に対して

$$(3.5) \quad \det [\Phi(2\pi) - E] \neq 0$$

が成り立つようなものである。筆者は、このような (1.1) の 2π 周期解を孤立した周期解とよんだ (文献 [15])。このような周期解の十分小さな近傍内にはこれ以外の 2π 周期解は存在しないことが容易に示されるからである。

筆者は文献 [15] において次の定理を証明した。

定理 3.1 "条件 1° をみたす微分方程式 (1.1) が孤立した 2π 周期解 $\hat{x}(t)$ をもつときは、十分大きい m をとれば、 $\hat{x}(t)$ に対応して m 位の Galerkin 近似 $\bar{x}_m(t)$ がつねに存在し、しかも $m \rightarrow \infty$ のとき $\bar{x}_m(t)$, $\dot{\bar{x}}_m(t)$ ($\dot{} = d/dt$) はそれぞれ $\hat{x}(t)$, $\dot{\hat{x}}(t)$ に一様収束する。"

この定理は、孤立した周期解 $\hat{x}(t)$ に対しては、Galerkin 近似を求めることにより、いくらでも精密な近似が求められる、ということを示している。このことは、Galerkin 法が

1° の条件をみたす微分方程式'に対しては, 孤立した周期解に関する限り, 周期解の近似を求める数学的に合理的な方法であることを表わしている。

定理 3. 1 の証明のあらすじを述べておこう。詳細は文献 [15] を見ていただきたい。はじめに記号と, 基本になる予備定理, 命題とを挙げておこう。

記号 $f(t)$ を周期 2π をもつ連続なベクトル関数とするとき, $\|f\|_n, \|f\|_2$ で次の量を表わす:

$$\begin{aligned}\|f\|_n &= \max_t \|f(t)\|, \\ \|f\|_2 &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(t)\|^2 dt \right]^{1/2}.\end{aligned}$$

ただしここで, $\|\cdot\|$ はベクトルの Euclid ノルムを表わしている。

予備定理 1. " $f(t)$ を周期 2π をもつ連続微分可能なベクトル関数とする。すると,

$$(3.6) \quad \|f - P_m f\|_n \leq \sigma(m) \|\dot{f}\|_2 \leq \sigma(m) \|\dot{f}\|_n,$$

$$(3.7) \quad \|f - P_m f\|_q \leq \sigma_1(m) \|\dot{f}\|_2.$$

ただし $\cdot = d/dt$ で,

$$(3.8) \quad \sigma(m) = \sqrt{2} \left[\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots \right]^{1/2},$$

$$(3.9) \quad \sigma_1(m) = (m+1)^{-1}$$

である."

この予備定理は, $f(t)$ の Fourier 係数を $\dot{f}(t)$ の Fourier 係数を用いて表わし, そのあと $\dot{f}(t)$ の Fourier 級数に Bessel の不等式を適用して証明される.

命題 1. "線形周期系

$$(3.10) \quad \frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t)$$

において, $A(t)$ は周期 2π をもつ連続な正方行列の関数, $\varphi(t)$ は周期 2π をもつ連続なベクトル関数とする.

(3.10) に対応する線形同次系

$$(3.11) \quad \frac{dy}{dt} = A(t)y$$

の $t=0$ のとき単位行列 E とする基本行列 $\Phi(t)$ に対しては

$$(3.12) \quad \det [\Phi(2\pi) - E] \neq 0$$

が成り立つとする。

このとき、与えられた線形周期系 (3.10) は一つだけ一つの 2π 周期解 $x(t)$ をもち、それは

$$(3.13) \quad x(t) = \int_0^{2\pi} G(t, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda$$

で与えられる。ただし $G(t, \lambda)$ は次の式で与えられる区分的連続な、 t, λ に関し周期 2π をもつ正定行列の関数である：

$$(3.14) \quad G(t, \lambda) = \begin{cases} \Phi(t) [E - \Phi(2\pi)]^{-1} \Phi^{-1}(\lambda), & 0 \leq \lambda \leq t \leq 2\pi, \\ \Phi(t) [E - \Phi(2\pi)]^{-1} \Phi(2\pi) \Phi^{-1}(\lambda), & 0 \leq t < \lambda \leq 2\pi, \end{cases}$$

$$(3.15) \quad G(t, \lambda) = G(t + 2p\pi, \lambda + 2q\pi) \quad (p, q: \text{整数}).$$

この命題は、線形微分方程式に関する定数変化法を用いて容易に証明される。(3.13)により、(3.12)が成り立つときは、(3.10)の 2π 周期解 $x(t)$ に対しては、

$$(3.16) \quad \|x(t)\|_q \leq M \|\varphi\|_q, \quad \|x(t)\|_n \leq M_1 \|\varphi\|_n$$

が成り立つような, $\varphi(t)$ に無関係な正数 M, M_1 が存在する. (3.14) からわかるように, 正数 M, M_1 は行列 $A(t)$ に関係しているが, それは (3.14) により連続的に関係していると考えよう.

命題 2. "方程式"

$$(3.17) \quad F(\alpha) = 0$$

において, α および $F(\alpha)$ は同次元の実ベクトルで, $F(\alpha)$ は α 空間の領域 Ω で定義されていてそこで α に関して連続微分可能であるとする.

方程式 (3.17) に対して次の条件をみたす $\hat{\alpha} \in \Omega$ が存在するとする:

1° $F(\alpha)$ の α に関する Jacobian 行列を $J(\alpha)$ とするとき, $\det J(\hat{\alpha}) \neq 0$.

2° 正数 δ , 1 より小さい非負の数 κ が存在して,

$$(i) \quad \Omega_\delta = \{ \alpha \mid \|\alpha - \hat{\alpha}\| \leq \delta \} \subset \Omega,$$

$$(ii) \quad \alpha \in \Omega_\delta \text{ ならば } \|J(\alpha) - J(\hat{\alpha})\| \leq \kappa/M',$$

$$(iii) \quad \frac{M'r}{1-\kappa} \leq \delta.$$

ただし $r (\geq 0)$, $M' (> 0)$ はそれぞれ次の不等式を満たす数である:

$$(3.18) \quad \|F(\hat{\alpha})\| \leq r, \quad \|J^{-1}(\hat{\alpha})\| \leq M'.$$

このとき, 与えられた方程式 (3.17) は Ω_δ において一つただ一つの解 $\bar{\alpha}$ をもち, しかも $\bar{\alpha}$ に対しては,

$$(3.19) \quad \|\bar{\alpha} - \hat{\alpha}\| \leq \frac{M'r}{1-\kappa},$$

$$(3.20) \quad \det J(\bar{\alpha}) \neq 0$$

が成り立つ."

この命題は, 方程式 (3.17) に Newton 法を適用し, 次の反復法を考えることにより容易に証明される:

$$(3.21) \quad \alpha_{p+1} = \alpha_p - J^{-1}(\hat{\alpha}) F(\alpha_p) \quad (p=0, 1, 2, \dots).$$

ただし $\alpha_0 = \hat{\alpha}$ である.

予備定理 1, 命題 1, 2 を用いて定理 3.1 がどのように証明されたか, そのあらすじを次に述べよう.

定理 3.1 では与えられた微分方程式 (1.1) は孤立した

2π 周期解 $\hat{x}(t)$ をもつとしているので, この $\hat{x}(t)$ から

$$(3.22) \quad \hat{x}_m(t) = P_m \hat{x}(t)$$

によってできる三角多項式 $\hat{x}_m(t)$ を考える. $\hat{x}(t)$ は微分方程式 (1.1) の解であるから, $\hat{x}$ に関しては連続微分可能でしかも

$$(3.23) \quad \dot{\hat{x}}(t) = X[t, \hat{x}(t)]$$

をみたしている. このことから, 予備定理1によってわれわれは

$$(3.24) \quad \begin{cases} \|\hat{x}_m - \hat{x}\|_n, \|\dot{\hat{x}}_m - \dot{\hat{x}}\|_n = O[\sigma(m)], \\ \|\hat{x}_m - \hat{x}\|_q = O[\sigma_1(m)] \end{cases} \quad (m \rightarrow \infty)$$

を得る. (3.24) により m が十分大きければ, $\Psi[t, \hat{x}_m(t)]$ は $\Psi[t, \hat{x}(t)]$ に近くなり, したがって $\hat{x}(t)$ の孤立性から命題1により線形微分方程式

$$(3.25) \quad \frac{dy}{dt} = \Psi[t, \hat{x}_m(t)]y + \varphi(t)$$

は, m が十分大きいときは, 周期 2π をもつ任意の連続な関数 $\varphi(t)$ に対して, つねに一つただ一つの 2π 周期解 $y(t)$

まもち, しかも $y(t)$ に対しては

$$(3.26) \quad \|y(t)\|_n \leq M \|\varphi(t)\|_n, \quad \|y(t)\|_2 \leq M \|\varphi(t)\|_2$$

が成り立つような m に無関係な正数 M が存在するようにする.

このことを利用すると, 線形微分方程式

$$(3.27) \quad \frac{dy}{dt} = P_m \{F[t, \hat{x}_m(t)]y\} + \varphi(t)$$

の 2π 周期解 $y(t)$ に対しては, m が十分大きいとき,

$$(3.28) \quad \|y(t)\|_2 \leq M' \|\varphi(t)\|_2$$

が成り立つような m に無関係な正数 M' が存在することを証明することが出来る.

さて, Galerkin 近似の決定方程式 (3.3) は

$$(3.29) \quad F^{(m)}(\alpha) = 0$$

と書き, $F^{(m)}(\alpha)$ の α に関する Jacobi 行列を $J^{(m)}(\alpha)$ で表わそう. $F^{(m)}(\alpha)$ は (3.3) からわかるように, その成分は周期関数

$$X[t, x_m(t)] - \frac{dx_m(t)}{dt}$$

の Fourier 級数における第 m 調和項までの Fourier 係数であ

る. ベクトル $\xi = (u_0^*, u_1^*, v_1^*, \dots, u_m^*, v_m^*)^*$ に対して $J^{(m)}(\alpha)\xi$ を考えると, これは

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F^{(m)}(\alpha + h\xi) - F^{(m)}(\alpha)]$$

であるから, 上のことから $J^{(m)}(\alpha)\xi$ の成分は次の関数の Fourier 級数における第 m 調和項までの Fourier 係数になる:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{X[t, x_m(t) + h y(t)] - X[t, x_m(t)]\} &= \frac{dy(t)}{dt} \\ &= \Psi[t, x_m(t)] y(t) - \frac{dy(t)}{dt}. \end{aligned}$$

ただしここで $y(t)$ はベクトル ξ の成分を Fourier 係数にもつ三角多項式で次の式で与えられるものである:

$$(3.30) \quad y(t) = \frac{1}{2} u_0 + \sum_{p=1}^m (u_p \cos pt + v_p \sin pt).$$

(3.22) で与えられる $\hat{x}_m(t)$ の Fourier 級数を

$$(3.31) \quad \hat{x}_m(t) = \frac{1}{2} \hat{a}_0 + \sum_{p=1}^m (\hat{a}_p \cos pt + \hat{b}_p \sin pt)$$

とし, $\hat{\alpha} = (\hat{a}_0^*, \hat{a}_1^*, \hat{b}_1^*, \dots, \hat{a}_m^*, \hat{b}_m^*)^*$ とする. すると, 上に述べたことから,

$$(3.32) \quad \varphi(t) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{p=1}^m (c_p \cos pt + d_p \sin pt)$$

とし, $\gamma = (c_0^*, c_1^*, d_1^*, \dots, c_m^*, d_m^*)^*$ とおけば, 線形方程式'

$$(3.33) \quad J^{(m)}(\hat{\alpha}) \xi + \gamma = 0$$

は, 方程式'(3.27) において y の所に (3.30) で与えられる $y(t)$ を代入したものと同値になる. さて, (3.30) の形で与えられる三角多項式 $y(t)$ に対しては, 容易にわかるように,

$$(3.34) \quad \|y(t)\|_2^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \sum_{p=1}^m (\|u_p\|^2 + \|v_p\|^2) \right]$$

となるので,

$$(3.35) \quad \frac{1}{2} \|\xi\| \leq \|y(t)\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\xi\|$$

が成り立つ. すると, (3.28) により, 十分大きい m に対しては,

$$(3.36) \quad \det J^{(m)}(\hat{\alpha}) \neq 0,$$

$$(3.37) \quad \| [J^{(m)}(\hat{\alpha})]^{-1} \| \leq \sqrt{2} M'$$

を得る. 万世なら, $\det J^{(m)}(\hat{\alpha}) = 0$ ならば, $\gamma = 0$ に対して (3.33) が成り立つような $\xi \neq 0$ が存在し, しかし

って $\varphi(t)=0$ に対して (3.27) をみたす (3.30) の形の三角多項式 $y(t)$ を得, (3.28) により $y(t)=0$, すなわち $\xi=0$ を得る. これは矛盾である. したがって (3.36) が成り立つ. (3.36) が成り立てば, $[J^{(m)}(\hat{\alpha})]^{-1}$ が存在し, (3.33) より

$$\xi = -[J^{(m)}(\hat{\alpha})]^{-1} \gamma$$

を得, (3.35), (3.28) により

$$\|\xi\| \leq 2\|y(t)\|_q \leq 2M'\|\varphi(t)\|_q \leq \sqrt{2}M'\|\gamma\|$$

を得るから, われわれは (3.37) を得る. 不等式 (3.37) では, M' は m に無関係な数であることを注意しておこう.

(3.30) の形の三角多項式 $y(t)$ に対しては, Schwarz の不等式により

$$(3.38) \quad \|y(t)\|_m \leq \frac{\sqrt{4m+1}}{2} \|\xi\|$$

が成り立つので, 線形方程式 (3.33) と線形微分方程式 (3.27) との対応を利用すると, $\Psi(t, x)$ の x に関する連続微分可能性により次の式が証明される:

$$(3.39) \quad \|J^{(m)}(\alpha') - J^{(m)}(\alpha'')\| = \|\alpha' - \alpha''\| \cdot O(m^{1/2}).$$

ただし $\alpha' = (a_0'^*, a_1'^*, b_1'^*, \dots, a_m'^*, b_m'^*)^*$, $\alpha'' = (a_0''^*, a_1''^*, b_1''^*, \dots, a_m''^*, b_m''^*)^*$ で, これらに対しては

$$(3.40) \quad \begin{cases} x_m'(t) = \frac{1}{2} a_0' + \sum_{p=1}^m (a_p' \cos pt + b_p' \sin pt), \\ x_m''(t) = \frac{1}{2} a_0'' + \sum_{p=1}^m (a_p'' \cos pt + b_p'' \sin pt) \end{cases}$$

とするとき, $\theta \in [0, 1]$ に対して

$$(3.41) \quad \theta x'(t) + (1-\theta) x''(t) \in D$$

が成り立つものとする。

さて, 仮定により $\hat{x}(t)$ は (1.1) の孤立した周期解であるから, $\mathbb{R}^n$ 内で $\hat{x}(t)$ の表わす曲線は D の内部にあり, したがって

$$(3.42) \quad U := \bigcup_{-\infty < t < \infty} \{x \mid \|x - \hat{x}(t)\| \leq \delta_0\} \subset D$$

が成り立つような正数 δ_0 が存在する。すると, (3.24) により, 十分大きな正の整数 m_0 をとれば, $m \geq m_0$ とおいたときすべての m に対して

$$(3.43) \quad \hat{x}_m(t) \in U \subset D$$

が成り立つ。このように m に対して

$$(3.44) \quad \frac{d\hat{x}_m(t)}{dt} = P_m X[t, \hat{x}_m(t)] + R_m(t)$$

とおくと,

$$\frac{d\hat{x}_m(t)}{dt} = P_m \frac{d\hat{x}(t)}{dt}$$

が成り立つから, (3.23), (3.24) により

$$(3.45) \quad \|R_m(t)\|_2 = O[\sigma_1(m)]$$

を得る。すると,

$$(3.46) \quad R_m(t) = \frac{1}{2} r_0^{(m)} + \sum_{p=1}^m (r_p^{(m)} \cos pt + s_p^{(m)} \sin pt)$$

とおき, $\rho^{(m)} = (r_0^{(m)*}, r_1^{(m)*}, s_1^{(m)*}, \dots, r_m^{(m)*}, s_m^{(m)*})^*$

とすれば「三角多項式」に対して成り立つ不等式 (3.35) により

$$(3.47) \quad \|\rho^{(m)}\| = O[\sigma_1(m)]$$

を得る。よって (3.44) は (3.3) からわかるように, (3.31), (3.46) により

$$(3.48) \quad F^{(m)}(\hat{\alpha}) = -\rho^{(m)}$$

と等値である。しかも, $F^{(m)}(\alpha)$ の α に関する Jacobi 行列 $J^{(m)}(\alpha)$ に対しては (3.36), (3.37), (3.39) が成立する。そこで, われわれは命題 2 を Galerkin 近似の決定方程式 (3.29) に適用する。

(3.24) の第 1 式により

$$(3.49) \quad \|\hat{x}_m - \hat{x}\|_m \leq K\sigma(m)$$

が成立立つ。ただし K は m に無関係な正数である。また, (3.8) により, $\sigma(m)$ は m に関して単調減少である。

$$(3.50) \quad \frac{\sqrt{2}}{m+1} < \sigma(m) < \frac{2}{\sqrt{m}}$$

をみたして いる。そこで正の整数 m_0 を十分大きくとれば, $m \geq m_0$ をみたす任意の正の整数 m に対しては

$$(3.51) \quad \delta_0 - K\sigma(m) \geq \delta_0 - K\sigma(m_0) > 0$$

が成立立つ。このような m に対しては, (3.49), (3.42) により

$$(3.52) \quad V := \bigcup_{-\infty < t < \infty} \{x \mid \|x - \hat{x}_m(t)\| \leq \delta_0 - K\sigma(m)\} \subset U \subset D$$

が成立立つ。すると, 三角多項式に関する (3.38) の形の不等式により, (3.3) によって関数 $F^{(m)}(\alpha)$ は

$$(3.53) \quad \Omega := \left\{ \alpha \mid \|\alpha - \hat{\alpha}\| \leq \frac{2}{\sqrt{4m+1}} (\delta_0 - K\sigma(m)) \right\}$$

の上では定義されていることがわかる。このとき, (3.39) により, われわれは Ω に属する任意の α に対して

$$(3.54) \quad \|J^{(m)}(\alpha) - J^{(m)}(\hat{\alpha})\| \leq K_1 \sqrt{m} \|\alpha - \hat{\alpha}\|$$

を得る。ただし K_1 は m に無関係な正数である。正の整数 m_0 を必要ならばさらに大きくとれば, $m \geq m_0$ をみたす任意の正の整数 m に対してわれわれは (3.36), (3.37) を得る。また, (3.47), (3.48) によりわれわれは

$$(3.55) \quad \|F^{(m)}(\hat{\alpha})\| \leq K_2 (m+1)^{-1}$$

を得る。ただし K_2 は m に無関係な正数である。

そこで, 1 より小さい正数 κ を任意にとり,

$$(3.56) \quad \delta_1 := \min \left[\frac{\kappa}{\sqrt{2} K_1 M'}, \delta_0 - K\sigma(m_0) \right]$$

を考える。すると, 容易にわかるように $m_1 \geq m_0$ を十分大きくとれば, $m \geq m_1$ をみたす任意の正の整数 m に対しては

$$(3.57) \quad \frac{\sqrt{2} M' K_2}{1-\kappa} \cdot \frac{1}{m+1} < \frac{2}{\sqrt{4m+1}} \delta_1$$

が成り立つ。そこでこのように m に対して

$$(3.58) \quad \frac{\sqrt{2} M' K_2}{1-\kappa} \cdot \frac{1}{m+1} \leq \delta \leq \frac{2}{\sqrt{4m+1}} \delta_1$$

をみたす正数 δ をとり, 集合 Ω_δ を

$$(3.59) \quad \Omega_\delta := \{ \alpha \mid \|\alpha - \hat{\alpha}\| \leq \delta \}$$

とする.

すると, (3.58), (3.56), (3.51) により

$$(3.60) \quad \Omega_\delta \subset \Omega.$$

を得, また (3.54), (3.58), (3.56) により $\alpha \in \Omega_\delta$ に対して

$$(3.61) \quad \|J^{(m)}(\alpha) - J^{(m)}(\hat{\alpha})\| \leq \frac{\kappa}{\sqrt{2} M'}$$

を得る. また, (3.58) は

$$(3.62) \quad \frac{\sqrt{2} M' K_2 (m+1)^{-1}}{1-\kappa} \leq \delta$$

が成り立つことを明らかに含んでいる. (3.60) ~ (3.62) は, (3.55), (3.37) により, 命題 2 の条件が決定方程式 (3.29) および $\hat{\alpha}$ に対してすべてみたされていることを示している. こうして, われわれは命題 2 により, 決定方程式 (3.29) が次の不等式をみたす解 α をもつことを知る:

$$(3.63) \quad \|\bar{\alpha} - \hat{\alpha}\| \leq \frac{\sqrt{2} M' K_2}{1-\kappa} \cdot (m+1)^{-1}.$$

$$\bar{\alpha} = (\bar{a}_0^*, \bar{a}_1^*, \bar{b}_1^*, \dots, \bar{a}_m^*, \bar{b}_m^*)^* \text{ とし,}$$

$$(3.64) \quad \bar{x}_m(t) = \frac{1}{2} \bar{a}_0 + \sum_{p=1}^m (\bar{a}_p \cos pt + \bar{b}_p \sin pt)$$

とおけば, $\bar{\alpha}$ が '決定方程式' (3.29) の解であることから,
われわれは (3.2) に対して

$$(3.65) \quad \frac{d\bar{x}_m(t)}{dt} = P_m X[t, \bar{x}_m(t)]$$

を得る. これは $\bar{x}_m(t)$ が '周期解の Galerkin 近似' であることを表わしている. この $\bar{x}_m(t)$ に対しては, (3.63) により, '三角多項式' に関する (3.38) の形の不等式を用いて

$$\|\bar{x}_m(t) - \hat{x}_m(t)\| \leq \frac{\sqrt{2} M' K_2}{1-\kappa} \cdot \frac{\sqrt{4m+1}}{2(m+1)}$$

を得る. すると, (3.49), (3.50) を用いて, 結局われわれは

$$(3.66) \quad \|\bar{x}_m - \hat{x}\|_m = O(m^{-1/2}) \quad (m \rightarrow \infty)$$

を得る. これは, 得られた Galerkin 近似 $\bar{x}_m(t)$ が $m \rightarrow \infty$ とするとき, '微分方程式' (1.1) の 2π 周期解 $\hat{x}(t)$ に一様収束することとを示している. $\bar{x}_m(t)$ が $\dot{\hat{x}}(t)$ に一様収束

することは、(3.65) から (3.23) を辺々減じ、予備定理 1 および (3.66) を用いれば容易に証明される。

以上が、定理 3.1 の証明のあらすじである。

さて、 2π 周期解の Galerkin 近似を実際に計算によって求めるためには、決定方程式 (3.3) を数値的に解かなければならない。このために通常用いられるのは Newton 法を用いる。

Newton 法を実行するには、決定方程式 (3.3) の粗い近似解をまずみつけなければならぬ。このためには擾動法が用いられることもあるが、一般には擾動法はあまり有効ではない。むしろ次に述べる方法の方が、実際計算でははるかに有効である。

この方法では、まず小さい m 、たとえば $m=1$ 、あるいは $m=2$ に対して決定方程式をつくり、これを解く。この場合、決定方程式は容易に解かれる場合もあり、そうでない場合もある。決定方程式の解法が容易でない場合には、最近篠原によって開発されたプログラム（文献 [6] 参照）が有効である。このプログラムによれば、5元までの非線形連立方程式の指定した領域内における解が大部分の場合すくなくとも求められるからである。いま、たとえば $m=1$ として決定方程式を解いて、 $a_0 = \tilde{a}_0$, $a_1 = \tilde{a}_1$, $b_1 = \tilde{b}_1$ を得たとしよう。すると、

われわれは $(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{b}_1, 0, 0, \dots, 0, 0)$ を粗い近似解として採用するのである。もちろん、この方法は、決定方程式'の解に対して、 $a_2, b_2, \dots, a_m, b_m$ のノルムが a_0, a_1, b_1 のノルムに比べて小さいときにはじめて有効になるわけだ、この条件が満たされないときには、さらに $m=2$ あるいは $m=3$ に対する決定方程式'を解かなければならぬことになる。

ともかく、いま述べたような方法で決定方程式'(3.3)の粗い近似解 $\tilde{\alpha} = (\tilde{a}_0^*, \tilde{a}_1^*, \tilde{b}_1^*, \dots, \tilde{a}_m^*, \tilde{b}_m^*)^*$ がみつかったとしよう。すると、このあと Newton 法を実行するには、既知の α 、すなわち既知の $x_m(t)$ に対して方程式'(3.3)の左辺の関数 $F_0(\alpha), F_1(\alpha), G_1(\alpha), \dots, F_m(\alpha), G_m(\alpha)$ およびこれらの α に関する Jacobian 行列 $J^{(m)}(\alpha)$ の値が計算されればよい。関数 $F_0(\alpha), F_1(\alpha), G_1(\alpha), \dots, F_m(\alpha), G_m(\alpha)$ の値は Fourier 係数の計算公式'を利用すれば次の式'で計算される：

$$(3.67) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_0(\alpha) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} X[t_i, x_m(t_i)], \\ F_p(\alpha) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} X[t_i, x_m(t_i)] \cos p t_i - p b_p, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} G_p(\alpha) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} X[t_i, x_m(t_i)] \sin p t_i + p a_p \\ (p &= 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \right.$$

ただしここで

$$(3.68) \quad t_i = \frac{2i-1}{2N} \pi \quad (i=1, 2, \dots, 2N)$$

で、 N は $m+1$ より小さくない整数である。また、Jacobi 行列 $J^{(m)}(\alpha)$ の要素の値は (3.3) からわかるように、

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi[t, x_m(t)] \begin{Bmatrix} \cos p t \\ \sin p t \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos q t \\ \sin q t \end{Bmatrix} dt$$

($p, q = 1, 2, \dots, m$)

の値が計算されれば求められる。ところがこれらの式の値は $F_0(\alpha), F_1(\alpha), G_1(\alpha), \dots, F_m(\alpha), G_m(\alpha)$ の値と同様に Fourier 係数の計算公式を利用すれば次の式で計算される：

$$(3.69) \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \Psi[t_i, x_m(t_i)] \begin{Bmatrix} \cos p t_i \\ \sin p t_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos q t_i \\ \sin q t_i \end{Bmatrix}$$

($p, q = 1, 2, \dots, m$).

ただしこのときは、 N を $2m+1$ より小さくないように取、ておく必要がある。(3.67) および (3.69) を用いて決定方

程式'(3.3)の左辺の関数およびそれらの α に関する Jacobian 行列の値を計算すれば, Newton 法は決定方程式'をあらわにつくらなくて計算機の上で実行される. 筆者は実際計算では $m=15$, $N=32$ をしばしば用いた.

上に述べた計算法の詳細については文献[26]を見ていただきたい.

計算によって Galerkin 近似 $\bar{x}_m(t)$ が得られると, 次の重要な問題は, これに対応する真の 2π 周期解が存在するかどうかを調う, つぎに, もし真の 2π 周期解が存在する場合には, さらに進んで得られた Galerkin 近似 $\bar{x}_m(t)$ がどれほどの誤差をもっているか, を調うることである.

筆者は, ここにあげた問題を解く一つの方法を開発したが, その方法は文献[15]で証明した次の定理にもとづいている.

定理 3.2 "与えられた微分方程式'(1.1)において, $x, X(t, x)$ はともに n 次元ベクトル, $X(t, x)$ は $R^1 \times D$ で定義され, t に関しては周期 2π をもち, x に関しては連続微分可能であるとする. ただし R^1 は実直線で, D は n 次元 Euclid 空間の与えられた領域であるとする.

n 次元ベクトル関数 $\bar{x}(t)$ は周期 2π をもち, n 次元 Euclid

空間で $x = \bar{x}(t)$ が表わす曲線は D に含まれ, さらに $\bar{x}(t)$ に關する微分方程式 (1.1) の第一変分方程式

$$(3.70) \quad \frac{dy}{dt} = \Psi[t, \bar{x}(t)]y$$

の $t=0$ のとき単位行列 E となる基本行列 $\Phi(t)$ に対しては

$$(3.71) \quad \det[\Phi(2\pi) - E] \neq 0$$

が成り立つ, とする.

$\bar{x}(t)$ に対して次の条件をみたす正数 δ および μ より小さい非負の数 κ が存在する, とする:

$$(i) \quad D_\delta := \bigcup_{-\infty < t < \infty} \{x \mid \|x - \bar{x}(t)\| \leq \delta\} \subset D,$$

$$(ii) \quad \|x - \bar{x}(t)\| \leq \delta \text{ ならば}$$

$$\|\Psi(t, x) - \Psi[t, \bar{x}(t)]\| \leq \kappa/M.$$

$$(iii) \quad \frac{Mr}{1-\kappa} \leq \delta.$$

ただし r は

$$(3.72) \quad \left\| \frac{d\bar{x}(t)}{dt} - X[t, \bar{x}(t)] \right\|_m \leq r$$

をみたす非負の数であり, M は, $\varphi(t)$ を周期 2π をもつ任

意の連続関数とするとき、線形微分方程式'

$$(3.73) \quad \frac{dy}{dt} = \mathbb{P}[t, \bar{x}(t)]y + \varphi(t)$$

の 2π 周期解 $y(t)$ に対して

$$(3.74) \quad \|y(t)\|_n \leq M \|\varphi\|_n$$

が成立するようなら、 $\varphi(t)$ に無関係な正数である。

上の条件がみたされているとき、与えられた微分方程式' (1.1) は $R^1 \times D_\delta$ において一つだけ一つの 2π 周期解 $\hat{x}(t)$ をもち、これは孤立していて、 $\hat{x}(t)$ に対しては次の不等式が成り立つ：

$$(3.75) \quad \|\hat{x}(t) - \bar{x}(t)\|_n \leq \frac{Mr}{1-\kappa}."$$

不等式' (3.74) が成り立つような正数 M の存在することは、命題 1 のあとに挙げた不等式' (3.16) によって明らかであるが、このような正数 M の値を実際にかめるには、命題 1 の中の等式' (3.13) により、たとえば

$$(3.76) \quad M = \left[2\pi \cdot \max_t \int_0^{2\pi} \sum_{i,j=1}^n G_{ij}^2(t, s) ds \right]^{1/2}$$

によって計算してもよい。ただしこのとき、 $G_{ij}(t, s)$ ($i,$

$j=1, 2, \dots, n$) は (3.14) で与えられる行列 $G(t, 1)$ の要素である。 $G(t, 1)$ を実際に求めるには, (3.14) からわかるように, まず線形微分方程式' (3.70) の基本行列 $\Phi(t)$ を数値積分によって求め, ついで (3.14) によって $G(t, 1)$ の各要素を計算すればよい。あとで挙げる計算例からわかるように, われわれの目的のためには, M の値はそれほど精密である必要はない。したがって, (3.76) によって M の値を計算する場合, 種分には Simpson の公式' を用いれば十分である。なお, 最近 Bouc は論文 [1] で関数解析的方法を用いて, M の値を計算するのに微分方程式' (3.70) の数値積分を用いない全く別の方法を開発した。この方法は, 理論的研究には好都合であり, また他の問題への応用も可能なので今後の発展が期待されている。詳しくことは, 彼の論文 [1] および [2] を見ていただきたい。

定理 3.2 は命題 2 と類似のことが周期的な微分方程式' の周期解に対しても成立することを示しており, その内容は命題 2 と同性質のものである。その証明は, したがって, 命題 2 の証明と全く同じ方法をとって行うことができる。すなわち, 周期 2π をもつ周期系 (1.1) の 2π 周期解を求める問題に対して Newton 法を適用し, 次の反復法を考へることによって証明される:

$$(3.77) \quad \begin{cases} x_0(t) = \bar{x}(t), \\ x_{n+1}(t) = \int_0^{2\pi} G(t, s) \left\{ X[s, x_n(s)] - F[s, \bar{x}(s)] x_n(s) \right\} ds \\ (n=0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

証明の詳細については文献[15]を見ていただきたい。

いま, 計算によって m 位の *Galerkin* 近似 $\bar{x}(t)$ が得られた, としよう。このとき, 定理 3.2 を用いて, どのようにして $\bar{x}(t)$ に対応する周期 2π の真の周期解の存在を確認するか, また真の周期解が存在する場合には $\bar{x}(t)$ の誤差をどのようにして見積るか, について簡単に説明しよう。

まず, $\bar{x}(t)$ に対して上に述べたような方法で, (3.73) の 2π 周期解 $y(t)$ に対して (3.74) が成り立つような正数 M を求める。つまり,

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} - X[t, \bar{x}(t)]$$

の Fourier 級数を相当高位 (少なくとも m より高位) まで計算し, それによって不等式 (3.72) を満たす非負の数 r を求める。定理の条件 (i), (ii), (iii) を調べる場合, 条件 (i) は $\delta \leq \delta_0$ ならば満たされるとし, 簡単のために

$\Psi(t, x)$ は $\|x' - \bar{x}(t)\|, \|x'' - \bar{x}(t)\| \leq \delta_0$ であるとき
Lipschitz 条件

$$(3.78) \quad \|\Psi(t, x') - \Psi(t, x'')\| \leq L \|x' - x''\|$$

をみたす, とする. すると, 容易にわかるように, 条件 (i),
(ii), (iii) は次の不等式をみたす正数 δ , 1 より小さい数 κ
が存在すれば, みたされることになる:

$$(3.79) \quad \delta \leq \delta_0, \quad L\delta \leq \frac{\kappa}{M}, \quad \frac{Mr}{1-\kappa} \leq \delta.$$

最後の不等式から考えて, δ_0 としては小さい数で

$$(3.80) \quad Mr < \delta_0$$

をみたすようなものをとる. いったん, δ_0 を定めると, こ
れに応じて (3.78) をみたす Lipschitz 定数 L が定まっ
てくる. さて, 不等式 (3.79) は

$$(3.81) \quad \frac{Mr}{1-\kappa} \leq \delta \leq \frac{\kappa}{LM}, \quad \delta \leq \delta_0$$

と書き直されるので, はじめに

$$(3.82) \quad LM^2 r \leq \kappa(1-\kappa)$$

をみたす数 κ を求める. κ は小さい数を考えているから,

$$(3.83) \quad LM^2 r < \kappa$$

をみたす数 κ を求め、あとでこれが (3.82) をみたしているかどうか、を確かめねばよい。(3.82) をみたす κ が求まれば、(3.81) をみたす δ が存在するか、どうかは容易にわかる。このようにして、実際問題では条件 (i), (ii), (iii) は容易に検証される。

このようにして、定理 3.2 の条件を調べ、それがすべてみたされる、というこゝにたれば、定理 3.2 によって $\bar{x}(t)$ に対応する周期 2π の真の周期解 $x(t)$ が存在することになり、また、不等式 (3.75) によって $\bar{x}(t)$ の誤差は

$$(3.84) \quad \frac{Mr}{1-\kappa}$$

を超えないことになる。これで、われわれは $\bar{x}(t)$ に対応する真の周期解の存在を知り、また $\bar{x}(t)$ の誤差の限界も知ることができる、ことになる。

定理 3.2 の条件を調べて、そのうち若干のものがみたされない場合には、高位の Galerkin 近似を求めて再び定理 3.2 の条件を調べる。与えられた方程式 (1.1) が孤立した周期解をもっている場合には、それに対応する位数の十分高い Galerkin 近似に対してはつねに定理 3.2 の条件は

みだされてくる, ということが証明されるので (この証明については文献 [15] を見らねたい), 上の手続は理論的には見了する. すなわち, 与えられた方程式 (1.1) が孤立した周期解をもっている場合には, 相当高位の Galerkin 近似とすれば定理 3.2 の条件は必ずしも満たされてきて, われわれの手続で真の周期解の存在を知り, また計算で求められた Galerkin 近似の誤差評価を得ることが出来る. したがってまた, どんな高位の Galerkin 近似を求めても定理 3.2 の条件が満たされない, という場合, いいかえると, われわれの手続が成功しない場合には, 実は与えられた方程式 (1.1) は周期 2π の孤立した周期解をもっていない, ということになる. 実際計算では, しかし, Galerkin 近似の位数を限りなく高めてゆくことは不可能であるから, 孤立した周期解の存在は確認できても, それが存在しないということは実際には断定できない.

具体的な例をあげよう.

例 1. van der Pol の方程式:

$$(3.85) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = \varepsilon E \sin \omega t \quad (\omega > 0).$$

この周期 $2\pi/\omega$ の周期解を, $\varepsilon = 0.1$, $\omega = 0.9$, $E = 3$

のと求めてみた。

変数変換を行うと (3.85) は

$$(3.86) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \lambda(1-x^2)\frac{dx}{dt} + (1+\lambda A)x = \lambda E_1 \sin t$$

と書き直され, ε, ω, E の与えられた値に対しては $\lambda=1/9$, $A=19/9$, $E_1=10/3$ と存するので, これらの値に対して (3.86) の周期 2π の周期解を計算した。

方程式 (3.86) を

$$(3.87) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -(1+\lambda A)x + \lambda(1-x^2)y + \lambda E_1 \sin t \end{cases}$$

と書き直し, 3 次決定方程式の粗い近似解を求めるため, 次の形の Galerkin 近似を求める:

$$(3.88) \quad \begin{cases} x = x_1(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t, \\ y = y_1(t) = b_1 \cos t - a_1 \sin t. \end{cases}$$

このとき決定方程式は整理すると次のようになる:

$$(3.89) \quad \begin{cases} 4E_1 - 4a_1 - 4Aa_1 + a_1^3 + a_1b_1^2 = 0, \\ 4Aa_1 - 4b_1 + a_1^2b_1 + b_1^3 = 0. \end{cases}$$

この方程式は $a_1^2 + b_1^2 = \rho$ とおくと,

$$(3.90) \quad a_1 = \frac{(4-p)p}{4E_1}, \quad b_1 = \frac{Ap}{E_1}$$

のように解かれ, p は次の方程式の根になる:

$$(3.91) \quad p^3 - 8p^2 + 16(1+A^2)p - 16E_1^2 = 0.$$

$A = 19/9$, $E_1 = 10/3$ に対して方程式 (3.91) は $\mathbb{R}$ 一つの実根 $p = 2.40745$ をもつので, 式 (3.90) により方程式 (3.89) は $\mathbb{R}$ 一つの実の解

$$(3.92) \quad a_1 = 0.28755, \quad b_1 = 1.52472$$

をもつことになる。

そこで求める Galerkin 近似を

$$(3.93) \quad \begin{cases} x_{15}(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{p=1}^{15} (a_p \cos pt + b_p \sin pt), \\ y_{15}(t) = \sum_{p=1}^{15} p (b_p \cos pt - a_p \sin pt) \end{cases}$$

として,

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0.28755, \quad b_1 = 1.52472,$$

$$a_2 = b_2 = \dots = a_{15} = b_{15} = 0$$

から出発して Newton 法により決定方程式を解く。得られた

結果は次の通りである：

$$\begin{aligned}
 (3.94) \quad x_{15}(t) &= \bar{x}(t) \\
 &= 0.286713433 \cos t + 1.529115065 \sin t \\
 &\quad - 0.011371280 \cos 3t + 0.007209864 \sin 3t \\
 &\quad - 0.000154804 \cos 5t - 0.000110855 \sin 5t \\
 &\quad + 0.000000714 \cos 7t - 0.000002938 \sin 7t \\
 &\quad + 0.000000050 \cos 9t - 0.000000007 \sin 9t \\
 &\quad + 0.000000001 \sin 11t.
 \end{aligned}$$

この $\bar{x}(t)$ に対して定理 3.2 の条件を調べるために、 r および M の値を前述した方法で求めた。得られた値は次の通りである：

$$r = 3 \times 10^{-9}, \quad M = 64.9.$$

そこで、前述した方法により、定理 3.2 の条件が満たされるかを調べる。ここで、 $\kappa = 10^{-5}$ として

$$195 \times 10^{-9} \leq \delta \leq 253 \times 10^{-9}$$

を満たす δ によって満たされることになる。このことから、定理 3.2 によって、方程式 (3.86) は周期 2π の周期解をもち、(3.94) で与えられるその Galerkin 近似

についてはその誤差が 1.95×10^{-7} を越えなうことを知る。

M の値を求める場合, $(\bar{x}(t), \bar{y}(t) = d\bar{x}(t)/dt)$ に関する方程式 (3.87) の第1変分方程式の $t=0$ のとき単位行列となる基本行列 $\Phi(t)$ を計算するので, このとき $\Phi(2\pi)$ の固有値も計算した。得られた値は

$$0.86541 \pm 0.33840i$$

で, これらの絶対値はいずれも 0.92921 で1より小さい。したがって求めている方程式 (3.86) の 2π 周期解は漸近安定になっていることがわかる。

この例題の詳細については文献 [26] を見ていただきたい。

例2. Duffing の方程式:

$$(3.95) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx + cx^3 = E \cos \omega t. \quad (\omega > 0).$$

篠原 [7] は, この $1/2$ -分数調波解, すなわち周期が $4\pi/\omega$ である周期解を求めた。 $1/2$ -分数調波解は従来注目されていたものであるが, 解析的な困難性からいまでもその性質はほとんどわかっていなかったものである。それが計算によって求め

られ、その性質が解明されるようになったことは、非線形振動の研究における大きな進歩である。

篠原は変数変換を行って (3.95) を

$$(3.96) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{\omega} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{\omega^2} (bx + cx^3) = \frac{E}{\omega^2} \cos t$$

の形に書き直し、この周期 4π の周期解を求めている。このため、 t を $2t$ で置き換え、彼は

$$(3.97) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \beta x + \gamma x^3 = P \cos 2t$$

の周期 2π の周期解を求めている。

方法は例1と同じであるが、この場合には決定方程式を Newton 法を用いて解くに当って、反復計算を始める最初の粗い近似解が例1のように簡単には求まらない。そこで篠原は

$$(3.98) \quad \begin{cases} x_2(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{p=1}^2 (a_p \cos pt + b_p \sin pt), \\ y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} \end{cases}$$

の形の Galerkin 近似を与え、これに対する決定方程式を彼が [6] で開発したプログラムを用いて解いた。この近似計算は例1の場合と全く同様である。

$\alpha = 0.1$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.7$, $P = 2$ として計算を行っ

で 11 個の Galerkin 近似を得ているが、これらのうち、正の最小周期が 2π であるもの、すなわち、(3.95) の $1/2$ -分数調波解に対応するものは、位相を変えて直ちに得られるものを除けば二つになり、しかもそのうちの一つは不安定な周期解に対応するものになる。残る一つが安定な周期解に対応するものになり、それは次のようになっている:

$$(3.99) \quad \bar{x}(t) = 0.1325574730$$

$$\begin{aligned} & -0.7455563965 \cos t - 0.1765810119 \sin t \\ & -0.6894142968 \cos 2t + 0.0627505718 \sin 2t \\ & -0.0122670665 \cos 3t + 0.0065184359 \sin 3t \\ & -0.0096779756 \cos 4t - 0.0057077000 \sin 4t \\ & -0.0085009813 \cos 5t - 0.0002877279 \sin 5t \\ & -0.0019074934 \cos 6t + 0.0005555277 \sin 6t \\ & -0.0001903122 \cos 7t - 0.0000489424 \sin 7t \\ & -0.0001267016 \cos 8t - 0.0000306596 \sin 8t \\ & -0.0000442724 \cos 9t + 0.0000061376 \sin 9t \\ & -0.0000075120 \cos 10t + 0.0000015217 \sin 10t \\ & -0.0000020591 \cos 11t - 0.0000005539 \sin 11t \\ & -0.0000008552 \cos 12t - 0.0000000308 \sin 12t \\ & -0.0000002050 \cos 13t + 0.0000000388 \sin 13t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -0.00000\ 00445 \cos 14t - 0.00000\ 00016 \sin 14t \\
& -0.00000\ 00156 \cos 15t - 0.00000\ 00021 \sin 15t \\
& -0.00000\ 00047 \cos 16t + 0.00000\ 00004 \sin 16t \\
& -0.00000\ 00011 \cos 17t + 0.00000\ 00001 \sin 17t \\
& -0.00000\ 00003 \cos 18t \\
& -0.00000\ 00001 \cos 19t.
\end{aligned}$$

すなわち、篠原は、上の式で与えられる Galerkin 近似に対して定理 3.2 の条件を調べ、それが「すい」てみたされていることを示して、これから上の近似に対応する真の周期解が存在し、また上の近似の誤差は 1.8×10^{-7} を越えること、を示している。

Duffing の方程式の $1/3$ -分数調波解の計算は、 $1/2$ -分数調波解のそれより容易であるが、興味のある人は [18, 19] を見ていただく。

4. あとがき

1° 自励系の周期解の計算について

与えられた自励系を (2.1) とするとき、相空間において求まる閉軌道に上いながら単一閉曲線が得られるときは、これに沿う直交動座標が第 2 節の始めに述べた方法でつくられるので、この動座標系を用いて与えられた自励系を

(2.11) の形の周期系に変換することが出来る。このようにして、自励系を周期系に変換し、自励系の周期解を第3節で述べた Galerkin 法を利用して計算することも出来る。この方法については、数値実験をまだ十分行っているというので、これ以上の説明は省略する。

2° 解析的 Galerkin 法について

第3節で述べた方法では、Galerkin 近似を電子計算機を用いて全く数値的に求めている。最近、調和平均法 *harmonic balance method* を利用して Galerkin 近似を解析的に計算する方法が提唱されている。調和平均法というのは、従来工学者が利用している方法で、数学的にいえば、 $a \cos t + b \sin t$ の形の1次の Galerkin 近似を求めて、これを望む 2π 周期解の近似とする方法である。実際問題ではこれで可成りの程度の近似がしばしば得られるので、工学者にはよく用いられている。数学者から見れば、これはしかし余りにも粗雑すぎる。ここに第3節で述べた方法が開発された理由がある。しかし、解析的取扱いでは調和平均法は極めて便利なので、その特性を利用して高位の Galerkin 近似を解析的に計算する方法が提唱されたわけである。紙数の関係でこの方法の説明はこれ以上行わないが、興味のある人は文献 [3] あるいは [28] を見ていただきたい。

3° 準周期解の計算について

擬周期解のうち実際問題に現われるのは、大抵準周期解 *quasiperiodic solution* である。準周期関数というのは擬周期関数のうち独立な周波数が有限個のもので、したがってその Fourier 級数が

$$\sum_{p_1, p_2, \dots, p_n} a_{p_1, p_2, \dots, p_n} e^{i(p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 + \dots + p_n \omega_n) t}$$

の形のものである。準周期解というのは、いうまでもなく解で準周期関数となるものをいう。このような解を計算するには、第3節で述べた Galerkin 法と類似の方法が有効であろうと思われるが、実はそこにはいろいろ厄介なことが起ってきて、周期解のようにはうまく行かない。このため準周期解の計算方法も満足できるものはまだ得られていない。現在までの研究で得られた結果については、文献[20, 22, 23, 24, 25]を見ていただきたい。

4° その他

特殊な微分方程式の場合には、周期解およびその周期などが解析的に比較的容易に求められる場合がある。ところが、周期解や周期の性質は、解析的な式が得られていても必ずしも容易にわかるものではない。最近、東工大の大槻

は幾何学研究の過程で“微分方程式”

$$(4.1) \quad n x (1-x^2) \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + (1-x^2)(n x^2 - 1) = 0 \quad (n \geq 2)$$

を得、この周期解の周期の性質を明らかにする問題に達した。初等的な計算で容易にわかるように、(4.1)は

$$(4.2) \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = (1-x^2) - c \left(\frac{1-x^2}{x^2} \right)^{1/n}$$

で表わされる周期解の族をもち、各周期解の周期は

$$(4.3) \quad T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \left[(1-x^2) - c \left(\frac{1-x^2}{x^2} \right)^{1/n} \right]^{-1/2} dx$$

で与えられる。ただしここで c は正の任意定数であり、 x_1, x_2 は $0 < x_1 < x_2$ をみたす方程式

$$(4.4) \quad (1-x^2) - c \left(\frac{1-x^2}{x^2} \right)^{1/n} = 0$$

の根である。

(4.3) からわかるように、周期 T は c の関数となり、周期解とともに変化する。この変化の様相を(4.3)から解析的に調べることは容易ではない。筆者は大概から依頼を受けて、(4.2)で表わされる周期解を数値計算に便利る極座標型の式で表わし、 $n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50, 100,$

1000 に対して各周期解の周期を計算した。計算結果から、 μ の値の如何に関らず、周期は振幅の増大にともなうて単調減少し、しかも周期の上端は μ の如何に関らずつねに $\sqrt{2}\pi$ であること、が見出された。これらのことの詳細については、文献[21]を見ていただきたい。

上述の結果は、のちに大槻氏によって次第に解析的に証明されつつあるが(文献[4, 5])、知見は数値計算によって得られたものである。非線形振動の研究における数値解析的研究の重要性を示す一つの良い例になっている。

文 献

- [1] Bouc, R.: Sur la méthode de Galerkin-Urabe pour les systèmes différentiels périodiques, Internat. J. Non-linear Mech., 7(1972), 175-188.
- [2] ——— : Équations différentielles fonctionnelles non autonomes: solution périodique proche d'une approximation non critique - Exemple, Équations Différentielles Fonctionnelles Non Linéaires, Actes de la Conférence Internationale "Equa-Diff 73", Hermann, Paris, 1973, 43-54.
- [3] Fontenot, M. L. and C. S. Burrus: An analytical method for approximating high-order Galerkin solutions, J. Math. Anal. Appl., 42(1973), 158-173.
- [4] Otsuki, T.: On a bound for periods of solutions of a certain nonlinear differential equation (I), (to appear in J. Math. Soc. Japan).
- [5] ——— : On a bound for periods of solutions of a certain nonlinear differential equation (II), (to appear in some Journal).

- [6] Shinohara, Y.: A geometric method for the numerical solution of nonlinear equations and its application to nonlinear oscillations, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 8(1972), 13-42.
- [7] ———: Numerical investigation of $1/2$ -subharmonic solutions to Duffing's equation, Mem. Numer. Math., 1(1974), 21-41.
- [8] Urabe, M.: Geometric study of nonlinear autonomous oscillations, Funkcial. Ekvac., 1(1958), 1-50.
- [9] ———: Periodic solution of van der Pol's equation with damping coefficient $\lambda = 0(0.2)1.0$, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, 21(1958), 193-207.
- [10] ———: Periodic solutions of van der Pol's equation with damping coefficient $\lambda = 0 - 10$, IRE Trans. Circuit Theory CT-7(1960), 382-386.
- [11] ———: On a method to compute periodic solutions of the general autonomous system, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, 24(1960), 189-196.
- [12] ———: Numerical study of periodic solutions of the van der Pol equation, Internat. Symp. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, Academic Press, New York, 1963, 184-192.
- [13] ———: Numerical study of periodic solutions of van der Pol's equation, Trudy Meždunarodnogo Simpozium po Nelineĭnym Kolebanijam, Vol.2, Kiev, 1963, 367-376.
- [14] ———: Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems, Les Vibrations Forcées dans les Systèmes Non-linéaires, Colloq. Internat. CNRS., N° 148, Paris, 1965, 217-235.
- [15] ———: Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems, Arch. Rational Mech. Anal., 20(1965), 120-152.
- [16] ———: Periodic solutions of differential systems, Galerkin's procedure and the method of averaging, J. Differential Equations, 2(1966), 265-280.
- [17] ———: Nonlinear Autonomous Oscillations, Analytical Theory, Academic Press, New York, 1967.

- [18] — : Numerical investigation of subharmonic solutions to Duffing's equation, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Ser. A, 5(1969), 79-112.
- [19] — : Numerical investigation of subharmonic solutions to Duffing's equation, Trudy Pjatoŭ Meždunarodnoi Konferencii po Nelineĭnym Kolebanijam, Inst. Mat. Akad. Nauk UkSSR., Vol. 4, Kiev, 1970, 21-67.
- [20] — : Green functions of pseudoperiodic differential operators, Japan-United States Seminar on Ordinary Differential and Functional Equations, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 243, Springer-Verlag, Berlin, 1971, 106-122.
- [21] — : Numerical computation of periods of a certain nonlinear autonomous oscillations, Study of Algorithms in Numerical Computations, Kôkyûroku, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Vol. 149, 1972, 111-129 (in Japanese).
- [22] — : Existence theorems of quasiperiodic solutions to nonlinear differential systems, Funkcial. Ekvac., 15 (1972), 75-100.
- [23] — : On a modified Galerkin's procedure for nonlinear quasiperiodic differential systems, Équations Différentielles et Fonctionnelles Non Linéaires, Actes de la Conférence Internat. "Equa-Diff 73", Hermann, Paris, 1973, 223-258.
- [24] — : Periodic solutions to a certain difference equation and their applications to pseudoperiodic differential equations, Pretirages Colloq. Internat. Transformations Ponctuelles et Leurs Applications, V-4, Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes, Toulouse, 1973, 1-18.
- [25] — : On the existence of quasiperiodic solutions to nonlinear quasiperiodic differential equations, Proc. Sixth Internat. Confer. on Nonlinear Oscillations, Polish Acad. Sci., Warsaw (to appear).
- [26] Urabe, M. and A. Reiter : Numerical computation of nonlinear forced oscillations by Galerkin's procedure, J.

Math. Anal. Appl., 14(1966), 107-140.

- [27] Urabe, M., H. Yanagiwara and Y. Shinohara : Periodic solutions of van der Pol's equation with damping coefficient $\lambda = 2 - 10$, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, 23(1960), 325-366.
- [28] Van Dooren, R. : An analytical method for certain highly nonlinear periodic differential equations, Funkcial. Ekvac., 16(1973), 169-180.
- [29] Yanagiwara, H. : A periodic solution of van der Pol's equation with a damping coefficient $\lambda = 20$, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, 24(1960), 201-217.