

正標数の体上の Del Pezzo 多様体

東大教養 藤田隆夫

§0. 既知結果の復習

本稿では [F5] の結果をどうすれば正標数の場合に拡張できるかについて記す。まず、偏極多様体の Δ 種数に関する基本的結果を [F7] に沿って review する (以下体の標数は一般)。

射影的多様体 V と x の上の ample line bundle L との対 (V, L) を偏極多様体という。 $n = \dim V$ に対し交点数 L^n を $d(V, L)$ と記す。 (V, L) の Δ -種数を $\Delta(V, L) = n + d(V, L) - \rho^0(V, L)$ で定義する。 V の dualizing sheaf ω_V に対して $(\omega_V + (n-1)L)L^{n-1} = 2g(V, L) - 2$ によって切断種数 $g(V, L)$ を定義する。

注意. ω_V は (少なくとも余次元 2 以上の例外集合を除けば) torsion free だから上のようにして $g(V, L)$ は well-defined. なお, Hilbert 多項式 $\mathcal{P}(V, tL)$ による d, g の定義 ([F1] 参照) と上の定義が同値なことはすぐわかる。

定理 1. 任意の偏極多様体 (V, L) に対し $\Delta(V, L) > \dim B_S |L|$ 。特に, $\Delta(V, L) \geq 0$ である, $\Delta = 0$ となるときは $B_S |L| = \emptyset$ 。

命題 2. (V, L) は偏極多様体, $B_S |L|$ は有限集合で, 任意の $p \in B_S |L|$ に於て V は非特異と仮定する。さらに $d(V, L) \geq 2\Delta(V, L) - 1$ ならば, V の部分多様体の列 $V = V_n \supset V_{n-1} \supset \dots \supset V_1$ で各 V_j は $|L|$ の V_{j+1} への制限の member であるようなもの (即ち [F2] の意味での ladder) が存在する。

定理 3. (V, L) は上の命題と同じ仮定を満たし, さらに $g(V, L) \geq \Delta(V, L)$ とする。このとき
a) $d(V, L) \geq 2\Delta(V, L)$ なら $B_S |L| = \emptyset$ 。

b) $d(V, L) \geq 2\Delta(V, L) + 1$ なら $\bigoplus_{t \geq 0} H^0(V, tL)$ は $H^0(V, L)$ により生成される。特に L は very ample. さらに $g(V, L) = \Delta(V, L)$ 。

c) $d(V, L) \geq 2\Delta(V, L) + 2$ なら $\bigoplus_{t \geq 0} H^0(V, tL)$ の relation ideal は 2 次式で生成される。

[F1] や [F2] にある議論を少し修正すれば上

の諸結果を一般標数で証明することができる。
くわしくは [F7] 参照。4 年前の城崎での集まりで筆者が話したことでもある。さらに

補題 4. 定理 3-b) の条件のもとで

$$H^q(V, tL) = 0 \quad \text{for any } t \in \mathbb{Z}, \quad 0 < q < n = \dim V.$$

証明には [F3; (2.1)] を用いる。小平型消滅定理の代用としてこの補題は技術的には重要。

さて, 以上の準備のもとに $\Delta(V, L) = 0$ となる偏極多様体については, まず定理 1. で $|L|$ が底点をもたず, 命題 2 より ladder が存在し, 従って $g(V, L) = h^1(V_1, \mathcal{O}_{V_1}) \geq 0$ がわかり, 故に定理 3, b) が適用できる。かくて L が very ample とわかってしまえばあとは古典的にもよく知られた議論で標数に関係なく次の結果が得られる。

定理 5. (V, L) は $\Delta = 0$ なる偏極多様体とする。上述のように L は very ample だから, $|L|$ により V を $\mathbb{P}^N$ ($N = \dim |L|$) に埋めこんでおく。すると V はその linear section として得られる非特異部分多様体 M を底とする cone (頂点集合

は点とに限らずある線型空間)になる。さらにこの M は $\Delta(M, L_M) = 0$ をみたし, 次の内どれかの型になる。(注: V が cone でなければ $M = V$ とみなすことに規約する)。

i) $(M, L_M) \cong (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$. $d = 1$.

ii) M は 2 次超曲面. $d = 2$.

iii) $(M, L_M) \cong (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))$. $d = 4$.

iv) M は rational scroll. 即ち, $\mathbb{P}^1$ 上の ample vector bundle E で, $(M, L_M) \cong (P(E), \mathcal{O}(1))$ となるものが存在する。

さて, 本稿の主題となる $\Delta = 1$ の場合であるが, 以下では V が非特異な多様体 M であると仮定する。定理 1 より $B_S |L|$ は高々有限, そこで命題 2 より ladder が存在する。もしも $g(M, L) = 0$ ならば $\mathcal{L}'(V_1, \mathcal{O}) = g(M, L) = 0$, 即ち $V_1 \cong \mathbb{P}^1$, これより $\Delta(M, L) = 0$ が出てくる(くわしくは [F7] 参照。標数零なら消滅定理の簡単な応用)。そこで $g(M, L) \geq 1$ とわかる。故に定理 3 より L が very ample $\iff d(M, L) \geq 3$ と結論できる。さらにこのとき $g(M, L) = 1$.

定義 6. $\Delta(M, L) = g(M, L) = 1$ となる偏極多様体 (M, L) を Del Pezzo 多様体と呼ぶ。

定理 7. 偏極多様体 (M, L) に対し次は同値。

- イ) $\Delta = g = 1$, 即ち (M, L) は Del Pezzo.
- ロ) M の canonical bundle K_M は $(1-n)L$ (ここで $n = \dim M$) に線型同値であり, $H^p(M, tL) = 0$ for any $t \in \mathbb{Z}$, $0 < p < n$.

この証明は [F5] (標数零), [F7] (標数一般) にある。いずれにせよ少しゴタゴタするので省略する。

ともあれ, 定理 3 の b), c) により

定理 8. $d=3$ の Del Pezzo 多様体は 3 次超曲面。 $d=4$ のものは 2 つの 2 次超曲面の完全交叉になる。

$d \geq 5$ の場合については次が知られている。

定理 9. (標数一般). $n = \dim M = 2$ のとき, ($d \leq 4$ でも) Del Pezzo surface M は $M \cong \mathbb{P}' \times \mathbb{P}'$ の場合を除けば $\mathbb{P}^2$ より $9-d$ 個の点を blow-up することにより得られる。従って特に $d \leq 9$ 。

定理 10 (標数零, [F5] & [F6] 参照). $n \geq 3$,

$d \geq 5$ の Del Pezzo 多様体は次の内どれか。

- i) $d=8$, $(M, L) \cong (\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2))$.
- ii) $d=7$, M は $\mathbb{P}^3$ の 1 点 blow-up.
- iii) $d=6$, M は Segre variety $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$.
- iv) $d=6$, M は iii) の超平面切断。このとき M は $\mathbb{P}^2$ の tangent bundle に付随した $\mathbb{P}^1$ -bundle になる。
- v) $d=6$, M は Segre variety $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^7$.
- vi) $d=5$, M は Grassmann 多様体 $\text{Gr}(5, 2) \subset \mathbb{P}^9$ の linear section として得られる。

特に, $d \geq 9$ のものは存在しない。

標数の仮定がどのように使われるか見るため, $d \geq 9$ のものが存在しないことを証明してみよう。 (M, L) を $d \geq 9$ の Del Pezzo 3-fold とする。 L は very ample だから, $|L|$ の一般のメンバー s は非特異, として Del Pezzo surface. よって定理 9 より $s \cong \mathbb{P}^2$, $d=9$, $L_s = -K_s = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$. 一方 Lefschetz の定理より $\text{Pic}(M) \rightarrow \text{Pic}(s)$ の余核は標数に依る torsion をもたない。故に $H \in \text{Pic}(M)$ で $H_s = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ となるものがある。上の制限写像は単射なので $L = 3H$ in $\text{Pic}(M)$ 。そこで

$9 = d = L^3 = (3H)^3 = 27H^3$, しかし $H^3 \in \mathbb{Z}$ だから矛盾。

注意。実は, 上述のようなことが起こり得ないことは, Tango [T] により全く別の方法で標数 3 の場合もこめて示されている。

さて, $d \leq 8$ の場合にも, 鍵となるのは $n=3$, S が $|L|$ の一般のメンバー, としたときの制限写像 $Pic(M) \rightarrow Pic(S)$ の状態の吟味であった (cf. [F5])。それは Deligne による不変 cycle 定理 (これは彼の Hodge 構造理論の一応用) が主役となるものであった。

最近 Bădescu が $d=9, 8$ の場合に正標数での Del Pezzo 多様体を標数零のものに lift することによって定理 10 を (部分的ながら) 一般標数に拡張することに成功した。彼の方法は少し改良を加えることによって $d=7, 6, 5$ でも役立つことが判明したので, ここでそれを報告することにする。現在, 定理 10 は $d=5$ の場合を除き一般標数で証明されている。

§1. Liftability -

k が標数 $p > 0$ の代数閉体のとき, $A(k)$ で k の Witt vector の環を表わす。 $A(k)$ の定義は省くが, これは標数零の完備離散付値環であり, 極大イデアルは p で生成され, 剰余体は k に一致することを記しておく。

定義。非特異射影多様体 M と k の上の ample divisor D との対 (M, D) を以下 Lefschetz pair と呼ぶ。 k 上の Lefschetz pair (M, D) に対し, $\text{Spec}(A(k))$ 上 smooth な scheme $\mathcal{M}$ と k の上の因子 $\mathcal{D}$ で, $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ を closed point $= \text{Spec}(k)$ 上に制限したときちょうど (M, D) と同型になるようなものを, (M, D) の $\text{Spec}(A(k))$ への lift と呼ぶ。 D が ample だから, $\mathcal{D}$ は相対 ample。従って, $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ を $\text{Spec}(A(k))$ の generic point 上に制限することにより標数零の Lefschetz pair (M', D') が得られる。これを (M, D) の標数零への lift と呼ぶ。上の意味での lift $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ が存在するとき, (M, D) は liftable という。

定義。 (M, D) が Lefschetz pair のとき, Θ_M で

M 上のベクトル場の層を表わす。これは $\mathcal{O}_M$ の derivation の層とみなせるから、 $\mathcal{J}$ を D の定義イデアルとしたとき、自然な写像 $\Theta_M \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \rightarrow \mathcal{O}_M/\mathcal{J})$ が定まる。この核を $\Theta_M(\log D)$, 又は $\Theta(M, D)$ で表わす。 D の特異性が高々 normal crossing 型のとき, $\Theta(M, D)$ は局所自由であり, 代数的一次型式の層 $\Omega_M(\log D)$ の双対層になる。ともあれ, この定義より $\Theta(M, D)$ は M の (local な) infinitesimal automorphism で D を保つもののなす層とみなせる。

定理 11. (M, D) は Lefschetz pair, さらに $H^2(M, \Theta(M, D)) = 0$ と仮定する。このとき (M, D) は liftable。

略証。 D は ample だから, formal に lift できればそれは自動的に algebraizable である。一方, formal に lift できることは [SGA 1], Exposé III の方法をまねればすぐ示せる。 M が smooth なので (M, D) は local には $\text{Spec}(A(\mathbb{K}))$ における infinitesimal nbds に unique に lift できる。

そのような lift の全体がはりあわされて (M, D) の global な lift を与えるための obstruction が $H^2(M, \Theta(M, D))$ に現れる, という仕掛である。

さて, $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ が (M, D) の $\text{Spec}(A(k))$ への lift で, generic fiber が (M', D') だとする。

補題 12. 制限写像 $u: \text{Pic}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Pic}(M')$ は bijective.

証. $\mathcal{M}$ の open subscheme $\mathcal{U} = \mathcal{M} - M$ に対して $\text{Pic}(M') \cong \text{Pic}(\mathcal{U})$. M は $\mathcal{M}$ 上の Cartier divisor での定義 ideal $\mathcal{P}\mathcal{O}_M$ は $\mathcal{O}_M$ に同型だから, u は単射である。 $\mathcal{M}$ が $\text{Spec}(A(k))$ 上非特異だから, $\text{Pic}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{U})$, 従って u が全射となる。

注意. D が非特異なら, $\text{Pic}(\mathcal{D}) \cong \text{Pic}(D')$.

補題 13. $H^1(M, \mathcal{O}_M) = H^2(M, \mathcal{O}_M) = 0$ ならば, 制限写像 $\gamma: \text{Pic}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Pic}(M)$ は bijective.

証明. $\hat{\mathcal{M}}$ を M に沿った $\mathcal{M}$ の formal completion とする。 $\text{Pic}(\mathcal{M}) \cong \text{Pic}(\hat{\mathcal{M}})$ は容易。また, 補題の仮定を用いて $\text{Pic}(\hat{\mathcal{M}}) \cong \text{Pic}(M)$ も示せる。

§2. Del Pezzo 3-folds

補題 14. (S, L) は Del Pezzo 曲面で $d \geq 5$ とする。このとき $H^1(S, \oplus_s [tL]) = 0$ for $\forall t \geq 0$ 。

証明. t に関する帰納法による。まず $t=0$ の場合を考える。 $S \cong \mathbb{P}' \times \mathbb{P}'$ なる明らかだから、 S は $\mathbb{P}^2$ より $q-d$ 個の点を blow-up して得られるとしてよい (定理 9)。 $-K_S$ が ample だから、これらの点は一般の位置にある。従って容易な考察により $H^1(S, \oplus_s) = 0$ 。

$t > 0$ の場合を考えるため、 $|L|$ の一般のメンバー C をとる。 C は非特異楕円曲線である。そこで、完全列 $0 \rightarrow \oplus_c \rightarrow \oplus_s|_C \rightarrow \mathcal{O}_C[L] \rightarrow 0$ を用い、 $H^1(C, \oplus_s|_C [tL]) = 0$ がすべての正数 t に対し言える。次に、完全列

$$0 \rightarrow \oplus_s [(t-1)L] \rightarrow \oplus_s [tL] \rightarrow \oplus_s|_C [tL] \rightarrow 0$$

を用いて、 $H^1(S, \oplus_s [(t-1)L]) = H^1(C, \oplus_s|_C [tL]) = 0$ なる $H^1(S, \oplus_s [tL]) = 0$ であることがわかる。よって t に関する帰納法で補題が示せる。

注意. $d < 5$ だと $H^1(S, \oplus_s) \neq 0$ 。

以下では (M, L) は Del Pezzo 3-fold, $d \geq 5$, S は $|L|$ の一般のメンバーとする。

補題 15. $H^2(M, \oplus_M) = 0$.

証明。完全列 $0 \rightarrow \oplus_S \rightarrow \oplus_{M|S} \rightarrow \mathcal{O}_S[L] \rightarrow 0$ に補題 14 及び定理 7, 0) を適用して $H^1(S, \oplus_{M|S}[tL]) = 0$ for $\forall t \geq 0$ を得る。一方, 完全列

$$0 \rightarrow \oplus_M[(t-1)L] \rightarrow \oplus_M[tL] \rightarrow \oplus_{M|S}[tL] \rightarrow 0$$

より $H^1(S, \oplus_{M|S}[tL]) \rightarrow H^2(M, \oplus_M[(t-1)L]) \rightarrow H^2(M, \oplus_M[tL])$ が完全。そこで $\mathcal{K}^2(M, \oplus_M[(t-1)L]) \leq \mathcal{K}^2(M, \oplus_M[tL])$ for $t \geq 0$ 。よって $\mathcal{K}^2(M, \oplus_M) \leq \mathcal{K}^2(M, \oplus_M[L]) \leq \dots \leq \mathcal{K}^2(M, \oplus_M[\ell L])$ for $\ell \gg 0$ だが, Serre の定理より最後の項は消える。故に $H^2(M, \oplus_M) = 0$ 。

命題 16. Lefschetz pair (M, S) は liftable。

証明。S は非特異だから, 次の完全列が存在する: $0 \rightarrow \oplus(M, S) \rightarrow \oplus_M \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0$, ここで $\mathcal{N}$ は S の M における normal sheaf, よって $\mathcal{N} \cong \mathcal{O}_S[L]$ 。これに付随する長完全列を考え, 補題 15 と定理 7, 0) を適用すれば $H^2(M, \oplus(M, S)) = 0$ がわかる。故に定理 11 が使える。

系 17. $d \leq 8$ 。

実際, (M, S) の標数零への lift (M', S') を考えると, $d(M', S') = d(M, S)$ で (M', S') は

Del Pezzo 3-fold になっていることが容易にわかる。

さて，補題 12 及び補題 13 の帰結として，制限写像 $Pic(M) \rightarrow Pic(S)$ の像のありさまは標数零への lift (M', S') によって決まる。それから先の議論は標数零のときと大差なく，結局定理 10 が $d \geq 6$ の場合には一般標数に拡張できることになるのだが，詳細は省略して，二例を示すにとじめよう。 $L' = [S'] \in Pic(M')$ とする。

例 1) $d=8$ のとき。 $(M', L') \cong (P^3, \mathcal{O}(2))$ 。そこで， $H \in Pic(M)$ で $L = 2H$ in $Pic(M)$ となるものが存在する。 $L_S = -K_S$ であるから， (S, H_S) は Segre variety $P^1 \times P^1 \subset P^3$ (これは同時に 2 次曲面でもある) でなければならぬ。そこで [F3; (3.8)] の議論より $(M, H) \cong (P^3, \mathcal{O}(1))$ とわかる ($\chi^0(M, H) = 4$ を示せば十分)。

例 2) $d=6$, $(M', L') \cong (P'_\alpha \times P'_\beta \times P'_\gamma, H_\alpha + H_\beta + H_\gamma)$ のとき。

S は， S' 同様に， P^2 上の一般の位置にある 3 点 P_1, P_2, P_3 を blow up して得られる。 $\mathcal{O}_{P^2}(1)$

の pull back を H , P_i 上の例外曲線を E_i で表わすことにすれば, 補題 12 及び 13 より M 上の line bundles H_α, H_β, H_r で χ の S への制限がそれぞれ $H-E_1, H-E_2, H-E_3$ であるようなものが存在する。 $|[H-E_i]_S|$ は S より $\mathbb{P}^1$ への全射を定め, χ の一般のファイバーは $\mathbb{P}^1$ になることに注意する。そこで, $[F3; (2.8)]$ の方法により, これらは $|H_\alpha|, |H_\beta|, |H_r|$ の定める有理写像として M から $\mathbb{P}^1$ への正則写像に拡張できる。まとめて $\varphi: M \rightarrow \mathbb{P}_\alpha' \times \mathbb{P}_\beta' \times \mathbb{P}_r'$ が得られ, $L = \varphi^*(H_\alpha + H_\beta + H_r)$ となる。 $(H_\alpha + H_\beta + H_r)^3 = 6 = L^3$ だから, $\deg \varphi = 1$, 即ち φ は双有理写像である。他方 L が ample だから φ は finite。故に, Zariski Main Theorem により φ は同型写像でなければならない。

(M', L') が他の型の時も (M, L) は (M', L') と同じ型の Del Pezzo 3-fold になることがわかる。

注意. $d=5$ のときは $\text{Pic}(M)$ が L により生成されることがわかるが, $[F6]$ での議論を一

一般標数に移すには不十分である。途中で小平-Ramanujam の消滅定理を使うからであるが、しかしこの困難は多分近い将来克服できるであろう。ともかく

定理 18. $d \geq 6$ なら, 定理 10 は一般標数で成立つ。

$n=3$ のときは今まで説明したようにできる。 $n \geq 4$ のときは, D を $|L|$ の一般のメンバーとすれば, Lefschetz の定理 (例えば [H] 参照) により $Pic(M) \cong Pic(D)$ なので, [F5] にある議論をまねすればよい。

最後に, 本題とはあまり関係ないが, 問題を一つ出しておこう。

問. $-K_M$ が ample な多様体は *liftable* か？

動機. Serre duality より $h^2(M, \Theta_M) = h^{n-2}(M, \Omega_M^1(k))$ もし中野型消滅定理が成立てばこの右辺は 0. さて $H^2(M, \Theta_M) = 0$ なる formal には *liftable* だが, K_M がその上の line bundle として振がるので formal lift は algebraizable であろう。

参考文献

- [B] L. Bădescu ; On ample divisors , preprint series in math. 17 (1980) , I.N.C.R.E.S.T. , Bucharest, 1980
- [F1] T. Fujita ; On the structure of polarized varieties with Δ -genera zero , J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, 22 (1975), 103-115.
- [F2] ——— ; Defining equations for certain types of polarized varieties , Complex Analysis and Algebraic Geometry , P.P. 165-173 , Iwanami , 1977
- [F3] ——— ; On the hyperplane section principle of Lefschetz , J. Math. Soc. Japan 32 (1980) 153-169.
- [F4] ——— ; 偏極多様体の分類と構造 — Δ 種数の理論 , 代数幾何学シンポジウム (於城崎) 報告集 , 1977
- [F5] ——— ; On the structure of polarized manifolds with total deficiency one , I , J. Math. Soc. Japan 32 (1980) 709-725.
- [F6] ——— ; ibid , part II , J. Math. Soc. Japan 33 (1981) 415-434
- [F7] ——— ; On polarized varieties of small Δ -genera,

to appear.

[H] R. Hartshorne; Ample subvarieties of algebraic varieties, Lecture Notes in Math. 156, Springer

[SGA 1] A. Grothendieck; Revêtements étales et groupe fondamental, Lecture Notes in Math. 221, Springer

[T] H. Tango; On a criterion of a projective space, Bull. Kyoto Univ. of Education, Ser. B, 47 (1975) 1-11.