

Burgers モデルに対する Hopf 方程式の解

東大 理学部 物理 桑 原 真 二

§ 1. ま え が き

古典統計力学が対象とする力学系は N 個の粒子系である。この系の状態は $6N$ 次元の位相空間 $(p_1, \dots, p_{3N}, q_1, \dots, q_{3N})$ の一点によって規定される。ここで p_i, q_i は粒子の運動量成分と座標成分を表わす。かかる系に統計を導入することは位相空間上に確率密度関数 $\rho(p_i, q_i, t)$ を定義するのと同様である。そして ρ は確率保存を表わす。

Liouville 方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [H, \rho] = 0 \quad (1.1)$$

を満足する。ここで H は系の Hamiltonian, $[,]$ は Poisson 括弧である。

乱流場の状態は空間の点の関数である速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ によってきまる。すなわち、状態は $6N$ の可附番個の量 (p_i, q_i) に代って、 $\mathbf{x}$ をパラメーターとする連続無限個の量で規定される。統計力学的考察を乱流現象に適用するためには、位相空間として $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 関数空間をとらなければならない。乱流状態が位相(関数)空間の一点、すなわち一つの関数によって規定されるのは、統計力学の場合と同じである。したがって、乱流運動を Navier-Stokes 方程式にしたがう deterministic な力学系とみなしこれに統計を導入するためには、位相(関数)空間上の確率分布汎関数 $P[\delta \mathbf{u}, t]$ を導入しなければならない。このような考えにもとづく乱流の取り扱いを統計流体力学という。

統計流体力学では、 $P[\delta \mathbf{u}, t]$ の代りにその Fourier 変換である特性汎関数 $\Phi[\mathbf{y}(\mathbf{x}), t]$:

$$\Phi[\mathbf{y}(\mathbf{x}), t] = \int_{\mathcal{Q}} e^{2\pi i \int \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}} P[\delta \mathbf{u}, t] \quad (1.2)$$

をもちいる。 $\mathcal{Q}$ は全位相空間である。 $\Phi[\mathbf{y}(\mathbf{x}), t]$ に対して Hopf 方程式が成立つ。Hopf 方程式は汎関数偏微分方程式である。

$\mathbf{u}(\mathbf{x})$ の Fourier 変換 $\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \int e^{-2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{u}(\mathbf{x})$ に対しても全く同じ対応があり、分布汎関数 $P[\delta \mathbf{v}(\mathbf{k}), t]$ 、特性汎関数 $\Phi[\mathbf{z}(\mathbf{k}), t]$ および Hopf 方程式が定義かつ、求められる。

§ 2. Burgers モデルに対する解析

Burgers モデルは $u(x, t)$ に対して

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \bar{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

u の Fourier 変換 $v(k, t)$ に対して

$$\frac{\partial v}{\partial t} + i \int_{-\infty}^{\infty} k' v(k') v(k+k') dk' = (2\pi)^2 \bar{\nu} k^2 v(k) \quad (2.2)$$

とかかれる。ここで方程式は無次元形で、 $\bar{\nu}$ は Reynolds 数の逆数である。Burgers モデルは Navier-Stokes 方程式の一次元簡化である。

ここでは k -空間についてのあつかいに限る。(2.2) に対する Hopf 方程式は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int k z (k+k') \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z dk \partial z' dk'} dk dk' - (2\pi)^2 \bar{\nu} \int k^2 z \frac{\partial \Phi}{\partial z dk} dk \quad (2.3)$$

ここで $\frac{\partial}{\partial z dk}$ は汎関数微分である。我々を (2.3) を

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } \Phi[0] = 1 \\ \text{ii) } |\Phi[z]| \leq 1 \\ \text{iii) } \Phi[z]^* = \Phi[-z] \\ \text{iv) } \Phi[e^{2\pi i k a} z] = \Phi[z] \quad a: \text{任意} \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

の条件の下に解かなければならない。i) ~ iii) は Φ の定義より、iv) は一様性の仮定より出る。

ここでは直交関数展開による方法によって Burgers モデルに対する Hopf 方程式を解くことを考える。 z が適当な直交関数 $\varphi_n (n=0, 1, \dots, \infty)$ で展開できるものとする：

$$z = a_n \varphi_n(z) \quad (2.5)$$

ここで、又以下においてかきつけた下つき符号については和をとるものとする。 φ_n は

$$\left. \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_l \varphi_m^* dk = \delta_{lm} \\ \varphi_l(-k) = \varphi(k)^* \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

の性質をもつものとする。(2.6) の第二条件により a_n は実数とすることができる。かくして $\Phi(z, t)$

は $a_0, a_1, \dots$ と t の関数とみなされる：

$$\Phi(z, t) = \Psi(a_0, a_1, \dots; t) \quad (2.7)$$

そうすると Hopf の方程式 (2.3) はふつうの偏微分方程式 (ただし無限個の変数 $a_0, a_1, \dots$ についての)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{i} A_{\ell mn} a_n \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a_\ell \partial a_m} - \bar{\nu} A_{\ell m} a_m \frac{\partial \Psi}{\partial a_\ell} \quad (2.8)$$

$$A_{\ell mn} = i \iint \varphi_\ell^*(k) k' \varphi_m^*(k') \varphi_n(k+k') dk dk' \quad (2.9)$$

$$A_{\ell m} = 4\pi^2 \int k^2 \varphi_\ell^*(k) \varphi_m(k) dk \quad (2.10)$$

に帰着する。

具体的な問題として初期値問題を考える。 $\varphi_\ell(k)$ として Hermite の多項式によりつくられる直交関数系をとり，先ず第二項までとると

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{(2\pi)^{1/4}}{i} \frac{4}{3^{3/2}} \left(a_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a_0 \partial a_1} - a_1 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a_0^2} \right) - (2\pi)^2 \bar{\nu} \left(a_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a_0^2} + 3a_1 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a_1^2} \right) \quad (2.11)$$

をうる。

$t=0$ で

$$\Phi(z, 0) = e^{-\frac{1}{2} \int E(k, 0) z z^* dk} \quad (2.12)$$

が成立つと仮定する。ここで $E(k, 0)$ は初期のエネルギー・スペクトルである。(2.12) は

$$\overline{v(k) v(k)^*} = \delta(0) E(k, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2 i^2} \frac{\partial^2 \Phi(z, 0)}{\partial z dk \partial z' dk'} \bigg|_{\substack{k'=-k \\ z, z'=0}} \quad (2.13)$$

を厳密に満足する。初期値として

$$\text{i) } E(k, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-k^2/2}, \quad \text{ii) } E(k, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k^2 e^{-k^2/2} \quad (2.14)$$

をとると，(2.11) に対応する Ψ の初期値は

$$\left. \begin{aligned} \text{i) } \Psi(a_0, a_1; 0) &= e^{-2\pi^{3/2} (a_0^2 + \frac{1}{2} a_1^2)} \\ \text{ii) } \Psi(a_0, a_1; 0) &= e^{-\pi^{3/2} (a_0^2 + \frac{3}{2} a_1^2)} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

となる。

先ず，独立変数を

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \tanh r_1 a_0 \\ b_1 &= \tanh r_2 a_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

によって， $-1 \leq b_0 \leq 1$ ， $-1 \leq b_1 \leq 1$ に変換する。以下プログラムの記法でかく。

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= X1, \quad b_1 = X2 \\ r_0 &= GAMMA1, \quad r_1 = GAMMA2 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

対称性から $(X1, X2)$ の第一象限だけ考える。 $X1, X2$ を等間隔のメッシュに分け，その数を $N1$ ， $N2$ ，時間のメッシュ間隔を TA ，時間のステップ数を NT とする。

最後の計算は

$$\left. \begin{aligned} N1 &= N2 = 20 \\ GAMMA1 &= GAMMA2 = 1.0 \\ R \geq 100 \text{ に対して } \quad \Delta t &= TA = 0.01, \quad NT = 15 \\ R \leq 100 \text{ に対して } \quad 100 \bar{\nu} \Delta t &= TA = 0.1 \quad NT = 30 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

において行った (R は Reynolds 数)。境界条件は第 1 回のようになる。

エネルギー・スペクトルも φ_n で展開し

$$E(k, t) = c_{00}(t) \varphi_0(k)^2 + c_{11}(t) \varphi_1(k) \varphi_1(k)^* \quad (2.19)$$

により，計算される。ただし

$$\left. \begin{aligned} c_{00} &= -\frac{1}{4\pi^{3/2}} \left(3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a_0^2} \Big|_{a_0, a_1=0} - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a_1^2} \Big|_{a_0, a_1=0} \right) \\ c_{11} &= -\frac{1}{2\pi^{3/2}} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial a_0^2} \Big|_0 - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a_1^2} \Big|_0 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

である。全エネルギー $\bar{E}(t)$ は

$$\bar{E}(t) = \int_0^\infty E(k, t) dk = \frac{1}{2} (c_{00} + c_{11}) \quad (2.21)$$

となる。

数値計算による結果は第 2～4 図に示されている。

その結果，明らかになったことを二，三記すと，

- i) $N1, N2$ を大きくすると numerical instability が出やすい。
- ii) $GAMMA1$ を小さくすると stable になるが，精度がわるくなる。
- iii) スペクトルをながめて，この近似では $R \geq 100$ で $t < 0.15$ ， $R \leq 10$ で $100 \bar{\nu} t < 0.3$ において，大体数値計算がうまくいっているものと思われる。
- iv) $R = 10 \sim 100$ でスペクトルの特性がかわり， $R \leq 10$ では $E(k, t) = E(k, 0) e^{-8\pi^2 \bar{\nu} k^2 t}$ が大体成立し， $R \geq 100$ ではエネルギー伝達の効果が大きく，直交関数二項ではよい近似になっていないようである。

参 考 文 献

- 1) Batchelor, G. K.: The theory of homogeneous turbulence, 1953 Cambridge V. P.
- 2) Hopf, E.: J. Rat. Mech. Anal. 1 (1952) 87-123.
- 3) Hopf, E. & E. W. Titt: J. Rat. Mech. Anal. 2 (1953) 587-91.
- 4) 桑原 真二 : 数理解析研講究録 23 (1967) 39-55.
- 5) 桑原 真二 : 数理解析研講究録 47 (1968) 30-37.
- 6) 巽 友正 : 乱流，1962 槇書店。

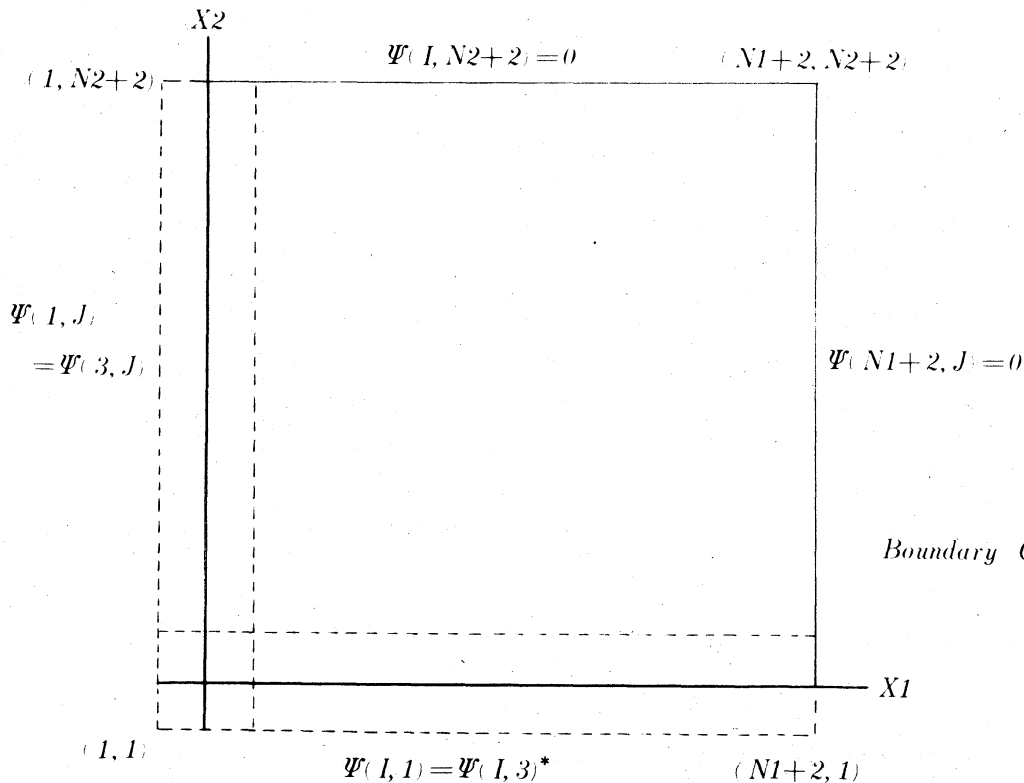
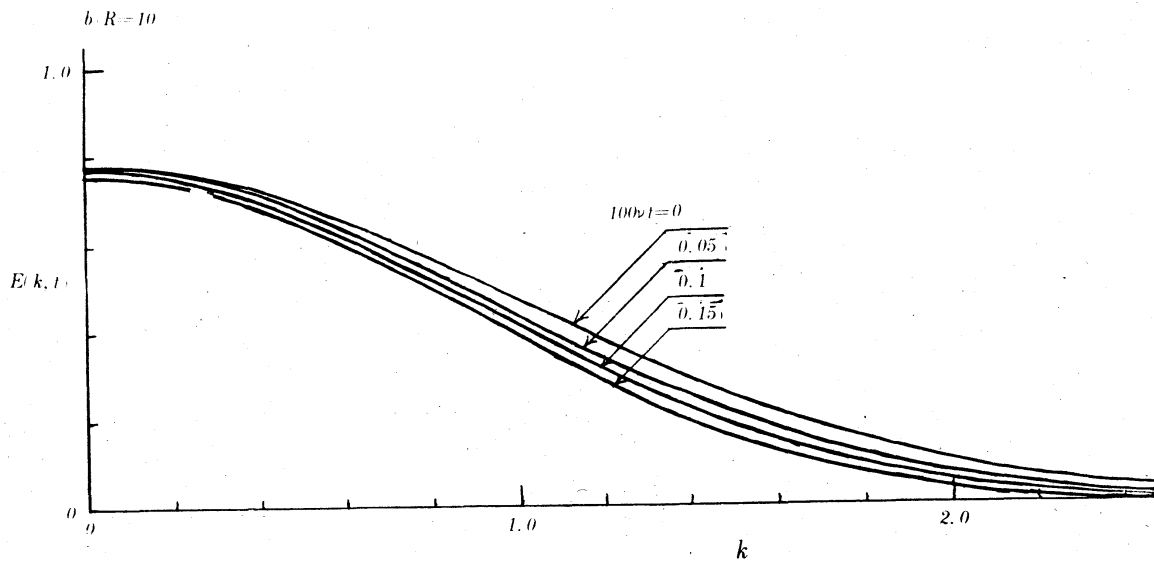
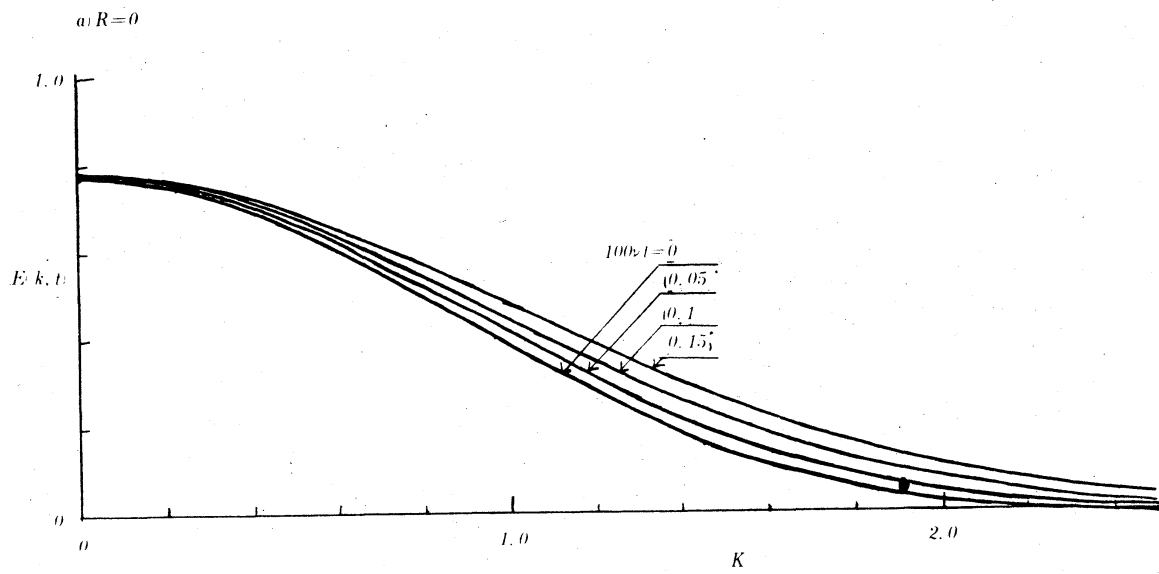


Fig. 1.

Boundary Condition for Ψ

Fig. 2. Change of Energy Spectrum of Bell Shape.



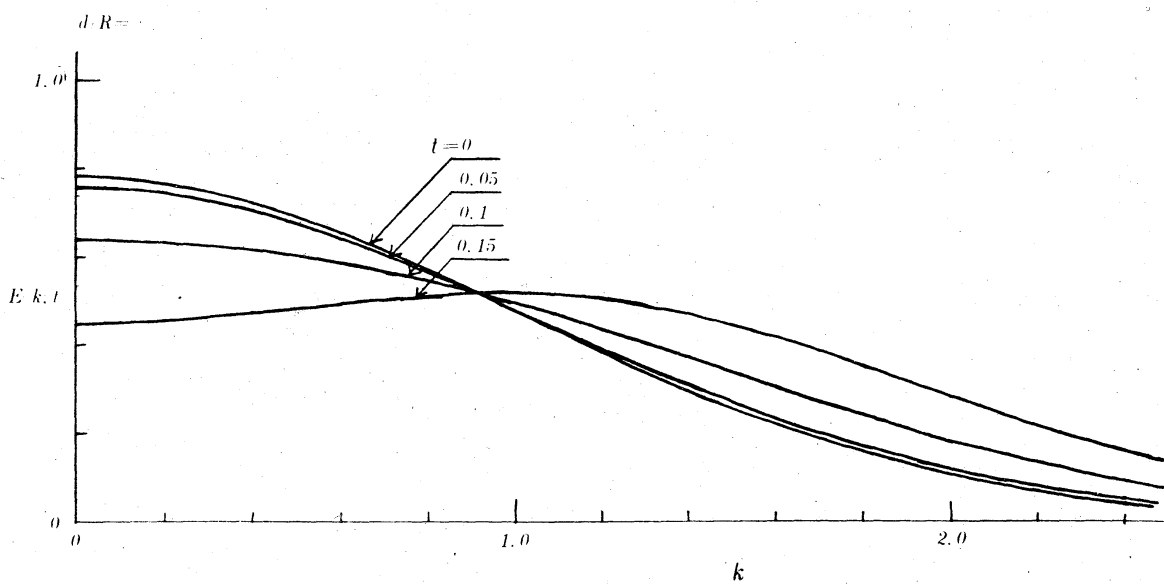
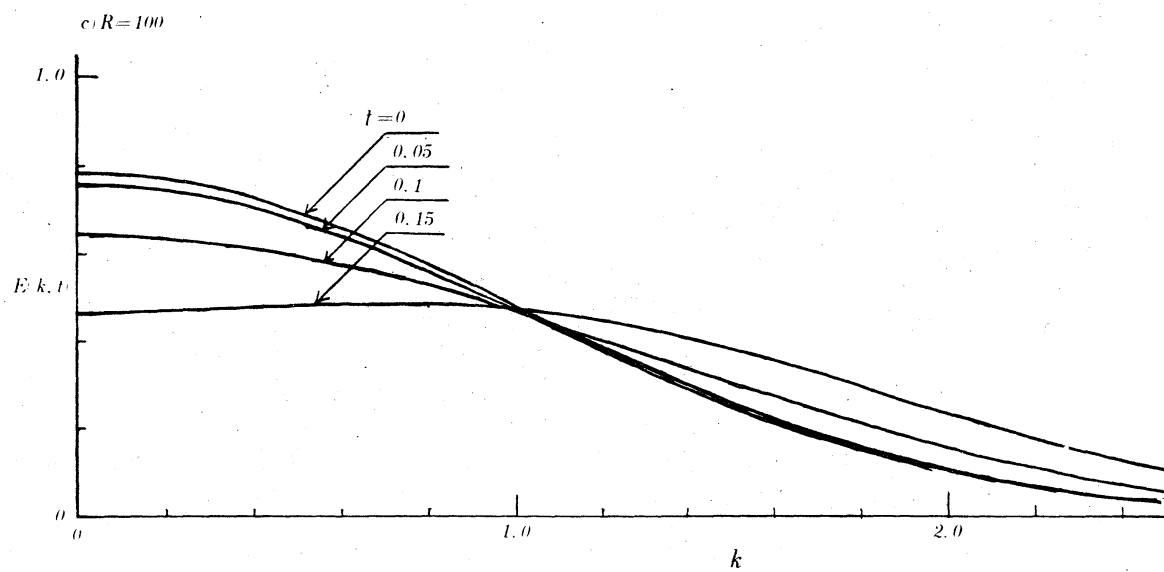
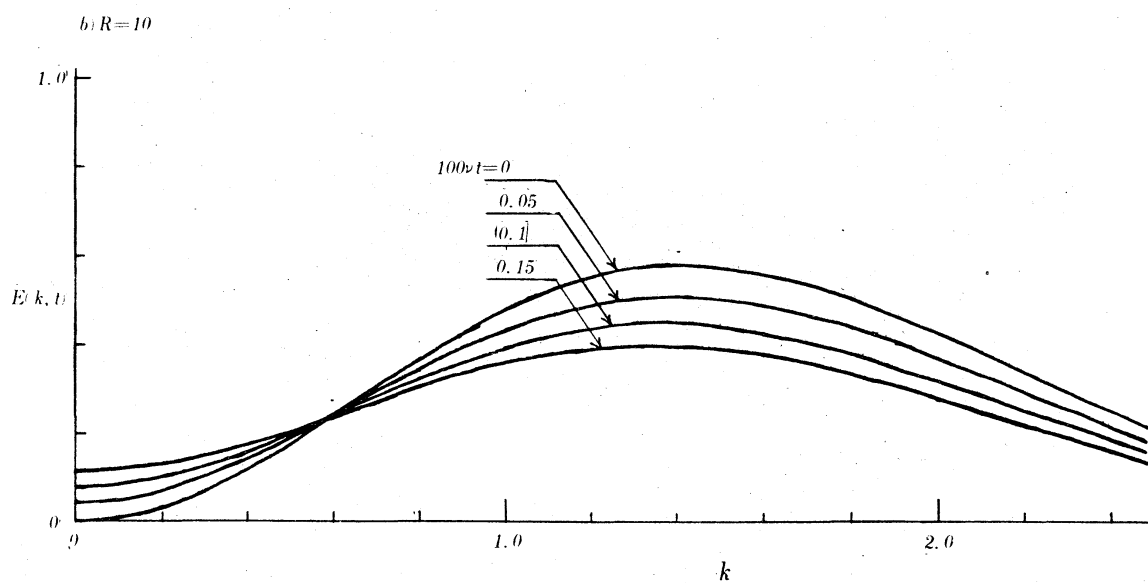
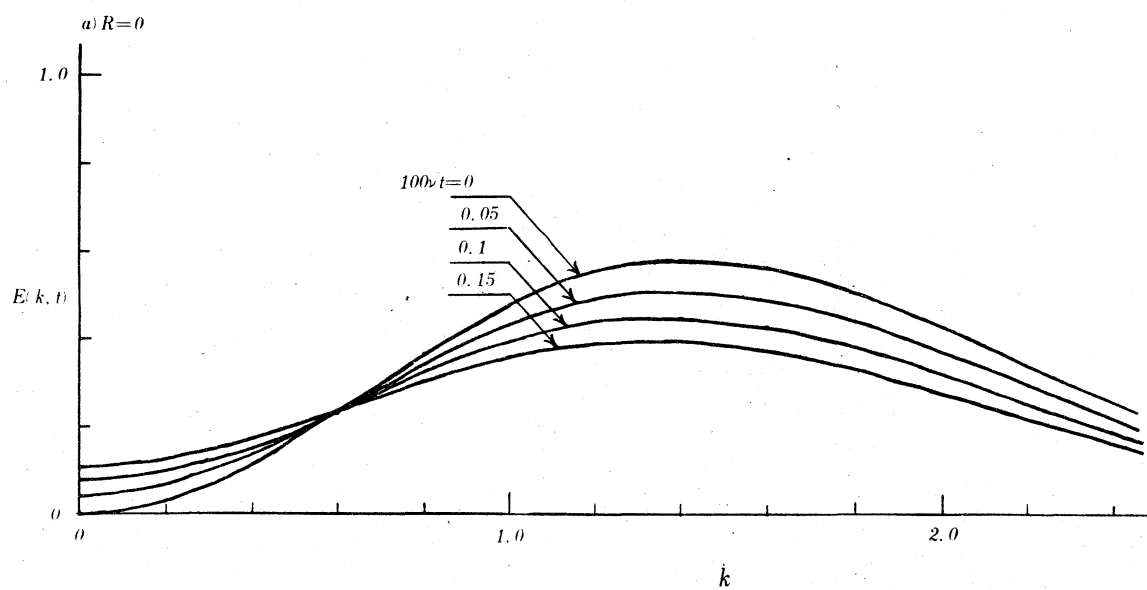


Fig. 3. Change of Energy Spectrum of Double Bell Shape



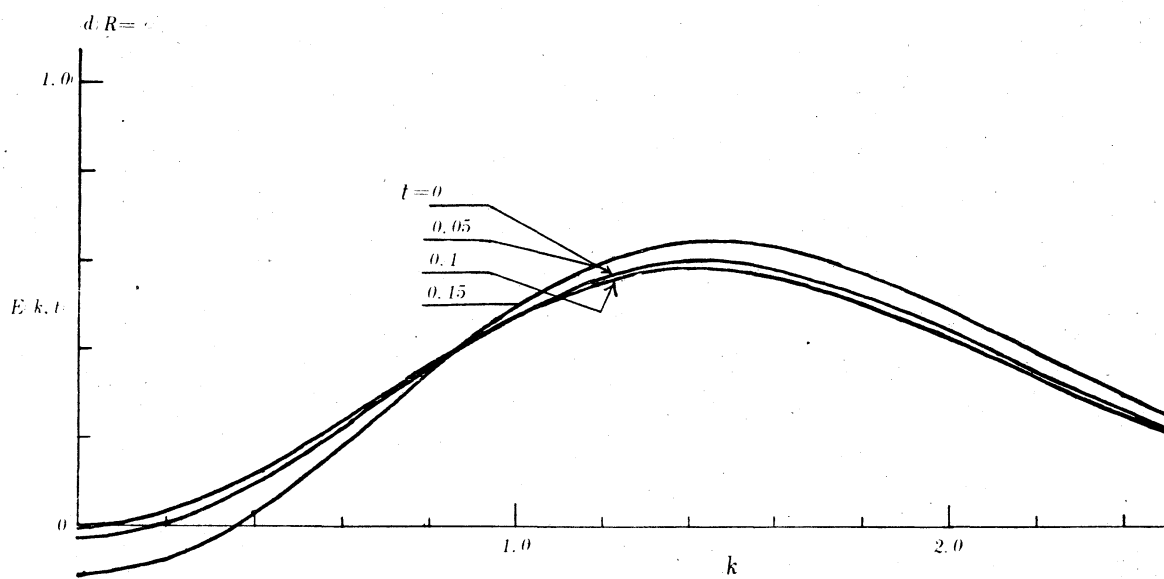
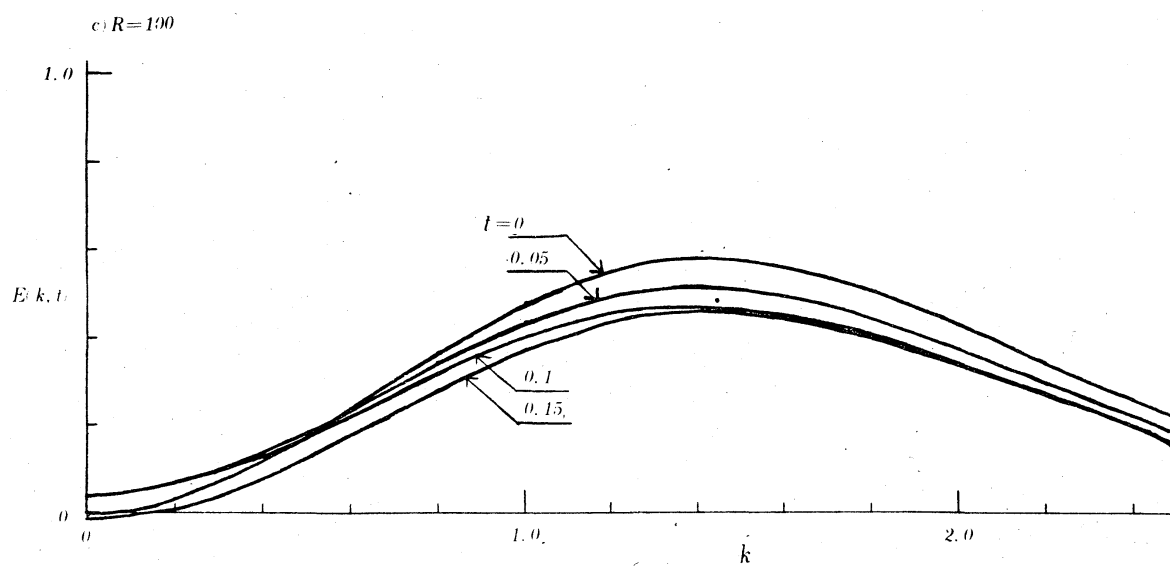


Fig. 4. Decay Curves of Total Turbulent Energy

