

発展方程式の解の $t \rightarrow \infty$ における漸近的性質

増田 久弥 (東大理)

§ 1

記号

- X_j ($j=0,1$) ; ノルム $\|\cdot\|_j$ をもつ 反射的バナッハ空間
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$; X_j とその strong dual X'_j の間の pairing.
 A_j ; X_j の中稠密に定められた線形閉作用素
 T ; X_0 から X_1 への有界作用素 $T \in L(X_0, X_1)$

結果

X_j の中で次の方程式を考へよう:

$$(1)_j \quad a \frac{d^2 u_j}{dt^2} + b \frac{du_j}{dt} + A_j u_j = 0, \quad -\infty < t < \infty$$

ここで, a と b はある複素数である。

定理

$$(2) \quad \rho(A_0) \cap \rho(A_1) \cap \{a\xi^2 + b\xi i \mid \xi \in (-\infty, \infty)\} \neq \emptyset$$

と仮定する。 u_j を次の性質 (3) をもつ $(1)_j$ の弱解とする;

$$(3) \quad \|u_j(t)\|_j \leq C_1, \quad -\infty < t < \infty$$

ここで, C_1 は正の定数。 f を次の性質 (4) をもつ X'_1 の元とする;

$$(4) \quad |\langle Tu_0(t) - u_1(t), f \rangle| \leq c_2 e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

ここで, c_2 は正の定数

よって,

$$\langle Tu_0(t) - u_1(t), f \rangle = 0, \quad -\infty < t < \infty.$$

§3の中で, 上の定理を, Klein-Gordon 波動方程式や Schrödinger 方程式の2つの解の $t \rightarrow \infty$ における接近の様子を調べるために, 応用しよう

§2. 定理の証明.

証明に先だて, いくつかの補題をあげる.

補題1

$$A_f = A_f'' (= (A_f')')$$

証明 条件(2)によって, $f(A_f)$ は, ある複素数 z_0 を含んでいる。それ故に, $(A_f - z_0)^{-1} \in L(X_f, X_f)$ 。 X_f は, 仮定

によって, 反射的であるから, $((A_f - z_0)^{-1})' = (A_f - z_0)^{-1}$ 。

Phillipsの定理 ([1] p.224) によって, $(A_f'' - z_0)^{-1} = (A_f - z_0)^{-1}$ 。

故に, $A_f'' = A_f$ をえる。

補題2

$u_f(t)$ の Fourier-Laplace 変換を次の如く定める:

$$(5) \quad \hat{u}_f^+(z) = \int_0^\infty e^{izt} u_f(t) dt, \quad \hat{u}_f^-(z) = \int_{-\infty}^0 e^{izt} u_f(t) dt.$$

このとき, 以下の事柄が成立する。

(a) $\hat{u}_f^+(z)$ は, $\{z; \operatorname{Im} z > 0\}$ で, 正則, 又 $\hat{u}_f^-(z)$ は $\{z; \operatorname{Im} z < 0\}$ で正則である。

(b) $\hat{u}_f^+(z) \in D(A_f)$ 且 $(A_f - az^2 - bzi) \hat{u}_f^+(z) = au_f'(0) - azei u_f(0) + bu_f(0)$ が $\operatorname{Im} z > 0$ なる z に対して成立し又 $\hat{u}_f^-(z) \in D(A_f)$ 且 $(A_f - az^2 - bzi) \hat{u}_f^-(z) = -au_f'(0) + azei u_f(0) - bu_f(0)$ が $\operatorname{Im} z < 0$ なる z に対して成立する。

(c) $\langle \Pi \hat{u}_0^+(z) - \hat{u}^+(z), f \rangle_1$ は $\{z; \operatorname{Im} z < -\varepsilon\}$ 上で正則に延長される。

証明 (a) は, (3)と(5)から明らか。 (b) を示そう。

$\psi(s)$ を次の如き $C_0^\infty(\mathbb{R})$ -函数 $\psi(s) = \begin{cases} 0 & ; |s| > 2 \\ 1 & ; |s| \leq 1. \end{cases}$

$\psi_k(s) = \psi(k^{-1}s)$ とおく。 $D(A_f)$ の中の任意の f に対して,

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}_f^+(z), A_f f \rangle_f &= \int_0^\infty e^{izt} \langle u_f(t), A_f f \rangle_f dt \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{2k} \langle u_f(t), A_f (e^{izt} \psi_k(t) f(t)) \rangle_f dt \end{aligned}$$

が, $\operatorname{Im} z > 0$ なる任意の z に対して, 成立する。

$u_f(t)$ は (1)_f の解であることから,

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}_f^+(z), A_f f \rangle_f &= \langle \hat{u}_f^+(z), (a z^2 + b z i) f \rangle_f + \langle u_f(0), a f \rangle_f \\ &\quad - \langle u_f(0), a z i f \rangle_f + \langle u_f(0), b f \rangle_f. \end{aligned}$$

これより,

$$\langle \hat{u}_f^+(z), (A_f - az^2 - bzi) f \rangle_f = \langle au_f'(0) - azei u_f(0) + bu_f(0), f \rangle_f.$$

Lemma 1 にあつて,

$$\begin{cases} \hat{u}_j^+(z) \in D(A_j - az^2 - bz i) \\ (A_j - az^2 - bz i) \hat{u}_j^+(z) = a u_j'(0) - a z i u_j(0) + b u_j(0) \end{cases}$$

が, $\text{Im } z > 0$ なる z に対し成り立つ。

同様にして, (b) の後半を示すことができます。次に $\text{Im } z > 0$ なる z に対し,

$$(6) \quad \langle T \hat{u}_0^+(z) - \hat{u}_1^+(z), f \rangle_1 = \int_0^\infty e^{izt} \langle T u_0(t) - u_1(t), f \rangle_1 dt$$

をえられれば, (4) にあつて

$$|\langle T u_0(t) - u_1(t), f \rangle_1| \leq C_2 e^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0$$

が, 成り立つから, (6) の右辺は, $\{z; \text{Im } z > -\varepsilon\}$

で正則である。故に (c) が示された。

定理の証明. 仮定 (2) にあつて, 次の如き実数 ε_0 が存在する:

$$a \varepsilon_0^2 + b \varepsilon_0 i \in \mathcal{I}(A_0) \cap \mathcal{I}(A_1).$$

$\mathcal{I}(A_0) \cap \mathcal{I}(A_1)$ が, 開集合であるから, 次の如き $\delta > 0$ が存在する。

$$\{az^2 + bz i; |z - \varepsilon_0| < \delta\} \subset \mathcal{I}(A_0) \cap \mathcal{I}(A_1).$$

X_j の中で, 次の方程式を考えよう

$$(7) \quad (A_j - az^2 - bz i) v_j(z) = a u_j'(0) - a z i u_j(0) + b u_j(0)$$

但し, z は, $|z - \varepsilon_0| < \delta$ を満たす。

(IV) は, $|z - z_0| < \delta$ なる z に対して, 1 意的な解をもち $(v_j(z))$ とかく) $v_j(z)$ は $|z - z_0| < \delta$ で正則) である。他方補題 2 により $\hat{u}_j^+(z)$ は, $\operatorname{Im} z > 0$ なる z に対して, (8) をみたしている。それ故に, $v_j(z) = \hat{u}_j^+(z)$ が $\{z; \operatorname{Im} z > 0, |z - z_0| < \delta\}$ の中の z に対し成り立つ。だから,

$$(8) \quad \langle \pi \hat{u}_0^+(z) - \hat{u}_1^+(z), f \rangle_1 = \langle \pi v_0(z) - v_1(z), f \rangle_1$$

が, $\{z; \operatorname{Im} z > 0, |z - z_0| < \delta\}$ の中の z に対し成り立つ。しかるに, 補題 2 (c) により, (8) の左辺は, $\{z; \operatorname{Im} z > \varepsilon\}$ の中に正則に延長され且 (8) の右辺は $\{z; |z - z_0| < \delta\}$ の中に正則であるから

$$(9) \quad \langle \pi \hat{u}_0^+(z) - \hat{u}_1^+(z), f \rangle_1 = \langle \pi v_0(z) - v_1(z), f \rangle_1$$

が, $\{z; \operatorname{Im} z > -\varepsilon, |z - z_0| < \delta\}$ の中の z に対して, 成立する。他方, 補題 2 と (8) により,

$$(10) \quad (A_j - a z^2 - b z i) (\hat{u}_j^-(z) + v_j(z)) = 0$$

が, $\{z; \operatorname{Im} z < 0, |z - z_0| < \delta\}$ の中の z に対し成立しているからであるから,

$\{a z^2 + b z i; |z - z_0| < \delta\} \subset \mathcal{P}(A_0) \cap \mathcal{P}(A_1)$
と (10) を考えれば,

$$(11) \quad \hat{u}_j^-(z) + v_j(z) = 0, \quad z \in \{z; \operatorname{Im} z < 0, |z - z_0| < \delta\}$$

をえる。かくして,

$$z \in \{z; -\varepsilon < \operatorname{Im} z < 0 \text{ 且 } |z - z_0| < \delta\}$$

において,

$$\langle \mathcal{P}\hat{u}_0^+(z) - \hat{u}_1^+(z) + \mathcal{P}\hat{u}_0^-(z) - \hat{u}_1^-(z), f \rangle_1$$

$$(12) \quad \stackrel{(12.37)}{=} \langle \mathcal{P}\hat{u}_0^-(z) - \hat{u}_0^-(z) + \mathcal{P}v_0(z) - v_1(z), f \rangle_1$$

$$\stackrel{(11.11)}{=} 0$$

をえる。(13)の左辺は、帯領域 $\{z; -\varepsilon < \operatorname{Im} z < 0\}$ の中で、正則にあるから、1変換定理(複素函数論における)において,

$$\langle \mathcal{P}\hat{u}_0^+(z) - \hat{u}_1^+(z) + \mathcal{P}\hat{u}_0^-(z) - \hat{u}_1^-(z), f \rangle_1 = 0$$

が、 $\{z; -\varepsilon < \operatorname{Im} z < 0\}$ の中の z において、常に成立せしめるをえぬ。かくして、積分表示(6)を(7)において

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} \langle \mathcal{P}u_0(t) - u_1(t), f \rangle_1 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\operatorname{Re} z \cdot t} e^{-\operatorname{Im} z \cdot t} \langle \mathcal{P}u_0(t) - u_1(t), f \rangle_1 dt$$

$$= 0$$

が、帯領域 $\{z; -\varepsilon < \operatorname{Im} z < 0\}$ の中の z において成立することを知る。他方(4)により、評価

$$|e^{-\operatorname{Im} z \cdot t} \langle \mathcal{P}u_0(t) - u_1(t), f \rangle_1| \leq c_1 e^{-\operatorname{Im} z \cdot t} e^{-\varepsilon t},$$

$$t \geq 0$$

又、(3)により、評価

$$|e^{-\operatorname{Im} z \cdot t} \langle \mathcal{P}u_0(t) - u_1(t), f \rangle_1| \leq c_3 e^{-\operatorname{Im} z \cdot t}, t \leq 0$$

(但し、 c_3 は正の定数)

をえるのであるから

$$e^{-\operatorname{Im} z \cdot t} \langle \Gamma u_0(t) - u_1(t), f \rangle_1 \in L^2(\mathbb{R})$$

が、 $\{z; -\varepsilon < \operatorname{Im} z < 0\}$ の中の z に対して成立する。従って、

(13) と Fourier 変換の一意性から、

$$e^{-\operatorname{Im} z \cdot t} \langle \Gamma u_0(t) - u_1(t), f \rangle_1 = 0, \quad -\infty < t < \infty,$$

が、したがう。かくして、 $\langle \Gamma u_0(t) - u_1(t), f \rangle_1 = 0$,

$-\infty < t < \infty$, をえた。

証了。

§3 定理の応用

例 4

G を局所的に class C^2 なる有界な $(n-1)$ 次元超曲面の外部とする。 u_0 を $L^2(\mathbb{R}^n)$ の中の Klein-Gordon 波動方程式の有限エネルギーをもつ (一般化された) 解とある:

$$(14) \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \Delta u_0 + m^2 u_0 = 0, \quad -\infty < t < \infty \\ x \in \mathbb{R}^n.$$

u_1 を $L^2(G)$ の中の Klein-Gordon 波動方程式の有限エネルギーをもつ (一般化された) 解とある:

$$(15) \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \Delta u_1 + m^2 u_1 = 0, \quad -\infty < t < \infty \\ x \in G$$

$$u_1 = 0 \quad G \text{ の境界上.}$$

もし次の性質 (16) をもつ (空でない) G の開部分集合 U が存在す

れば、任意の t に対して、 $u_0(\cdot, t) = u_1(\cdot, t)$ $\text{a.e. in } x \in G$;

$$(16) \quad \|u_0 - u_1\|_{L^2(U)} \leq C e^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0$$

但し, C と ε は正の定数.

証明

定理の中の X_j , T , A_j を次の如く定めよう: $X_0 = L^2(\mathbb{R}^n)$;
 $X_1 = L^2(G)$; 任意の $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して $(Tv)(x) = v(x)$, $x \in G$;
 A_0 は $\mathcal{A}_0$ のフリードリックスの拡大, ここに $\mathcal{A}_0$ は次の如く定めた。 $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{A}_0\psi = -\Delta\psi + m^2\psi$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$;

A_1 は $\mathcal{A}_1$ のフリードリックスの拡大, ここに $\mathcal{A}_1$ は次の如く定めた。 $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1) = C_0^\infty(G)$, $\mathcal{A}_1\psi = -\Delta\psi + m^2\psi$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$

A_0 と A_1 のスペクトル集合は, $[m^2, \infty)$ の中に含まれるのであるから
 $\sigma(A_0) \cap \sigma(A_1) \cap \{\xi^2; \xi \in (-\infty, \infty)\} \neq \emptyset$.

このことは, 仮定(2)が満たされていることを示している。解 u_0 と u_1 は, 有限エネルギーをもつから, エネルギー保存則より条件(3)が満たされていることがわかる。又 (14) にまつて, 任意の $f \in C_0^\infty(U)$ に対して, 仮定(4)が満たされている。かくして, 汎関数の定理を適用すると,

$$\langle u_0(\cdot, t) - u_1(\cdot, t), f \rangle = 0$$

が, 任意の $f \in L^2(U)$ 且 任意の t に対して成立することがわかる。ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は, $L^2(G)$ のスカラー積である。

それ故に, 任意の t に対して,

$$u_0(x, t) = u_1(x, t) \quad \text{a. e. in } x \in U.$$

u_0 と u_1 を x について multiply して Holmgren の一意性定理を適

用することによって, 任意の t に対して,

$$u_0(x, t) = u_1(x, t) \quad \text{a. e. in } x \in G.$$

注意: u を $L^2(\mathbb{R}^m)$ の中の (15) の有限エネルギーをもつ解と

とする。もし, $\mathbb{R}^m$ の中の開集合 $U (\neq \emptyset)$ が存在して

$$\|u\|_{L^2(U)} \leq C e^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0 \quad (C \text{ と } \varepsilon \text{ は正の定数})$$

をみたすならば, 任意の t に対して $u(x, t) = 0$ a. e. in $x \in \mathbb{R}^m$.

しかしながら, 我々は次の例をもつ。

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix \cdot y + it \sqrt{y^2 + m^2}} g(y) dy$$

ここで, m は正の定数, $g(y)$ は, support $\subset (1, 2)$ にもつ C_0^∞ -函

数。 $u(x, t)$ は, $L^2(\mathbb{R}^1)$ の中の $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m^2 u = 0$ の

有限エネルギーをもつ解であり,

任意のコンパクト集合 K と任意の正の整数 N に対して, 正の数 $C =$

$C(K, N)$ が存在して,

$$\sup_{x \in K} |t^N u(x, t)| \leq C, \quad t \geq 0$$

が成立する。

例 2

u_0 を $L^2(R^3)$ の中のシュレディンガー方程式

$$(18) \quad \frac{1}{i} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \Delta u_0 = 0$$

の解とし, u_1 を $L^2(R^3)$ の中の, ポテンシャルの摂動項をもつシュレディンガー方程式

$$\frac{1}{i} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 + q(x) u_1 = 0$$

の解とする。ここに $q(x)$ は次の条件をみたすとする。

$$(19) \quad \begin{cases} q(x) \text{ は有限個の特異点をもつ局所的に Hölder 連続な実} \\ \text{数値関数。さらに, } q(x) \text{ は } L^2(R^3) \text{ に属しており, } \infty \text{ において} \\ O(|x|^{-2-h}) \text{ (} h > 0 \text{) のようにふるまう。} \end{cases}$$

もし, R^3 の中の任意のコンパクト集合 K に対し, 正の定数 $C = C(K)$ と $\varepsilon = \varepsilon(K)$ が存在して

$$(20) \quad \|u_0(\cdot, t) - u_1(\cdot, t)\|_{L^2(K)} \leq C e^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0$$

が成り立っているれば, 任意の t に対して, $L^2(R^3)$ の元として, $u_0(\cdot, t)$ と $u_1(\cdot, t)$ は, 等しい。

証明 X_j, Γ, A_j を次の如く定めよう:

$$X_0 = X_1 = L^2(R^3); \quad \Gamma = \text{恒等写像} \in L(X_0, X_1);$$

A_0 を $-\Delta$ の $L^2(R^3)$ の中の自己共役な拡大; A_1 を $-\Delta + q(x)$ の $L^2(R^3)$ の中の自己共役な拡大 ([2] をみよ)。負の実軸の中には, A_0 と A_1 の連続スペクトルはないうしあ, 2 も高々離散的な固有値があるだけであるから ([2] をみよ), $\sigma(A_0) \cap \sigma(A_1) \cap \{\lambda; \lambda \in (-\infty, \infty)\} \neq \emptyset$ 。このことは, 仮定 (2) がみたされていることを示している。

$\|u_j(\cdot, t)\|_{L^2(R^3)}$ ($j=0,1$) は, t について定数であるから, 条件 (3) がみたされている。(20) によって, 任意の $g \in C_0^\infty(R^3)$ に対し

条件 (4) がみたされれているから、我々の定理も適用して、

$$(u_0(\cdot, t) - u_1(\cdot, t), \varphi) = 0$$

が、任意の t と任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ に対し成立する。このことから

$u_0(\cdot, t) = u_1(\cdot, t)$ が、任意の t に対し $L^2(\mathbb{R}^3)$ の元として成立することをみる。

注意

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{y} - ity} g(y) dy$$

ここで、 $g(y)$ は C_0^∞ 函数で support を $(0, \infty)$ の中に持つものがある。この函数 $u(x, t)$ は、 $L^2(\mathbb{R})$ の中のシュレディンガー方程式の解である。その上に、任意のコンパクト集合 K と、任意の正整数 N に対して正の定数 $C = C(K, N)$ が存在して、

$$\sup_{x \in K} |t^N u(x, t)| \leq C, \quad t \geq 0$$

が成立する。

文献

[1] Yosida, K; Functional analysis, Springer, 1965

[2] Ikebe, T; Eigenfunction Expansions Associated with the Schrödinger Operators and their Application to Scattering theory,

Arch. Rat. Mech. Anal. 5 (1960)

[補足] 定理の中でいわれている u_j が $(1)_j$ の弱解であるとは、次の性質をもつ函数 u_j である。

(a) $t \in (-\infty, \infty)$ に対して $u_j(t)$ は X_j に値をもち、連続的に微分可能

(b) 任意の $s \in (-\infty, \infty)$ に対して

$$\int_s^t \langle u_j(\tau), a q'(\tau) - b g'(\tau) + A_j' q(\tau) \rangle_j d\tau$$

$$= \langle u_j(s), b g(s) - a q'(s) \rangle_j - \langle u_j'(s), a q(s) \rangle_j = 0$$

つまり、 $q(t)$ は次の性質をもつ X_j' に値をもつ任意の函数である。

(i) 各 t に対して $q(t) \in \mathcal{D}(A_j')$

(ii) $q(t), q'(t), q''(t)$ 且 $A_j' q(t)$ は、 $(-\infty, \infty)$ の中で強連続である。(もし $a=0$ ならば $q'(t)$ の条件は、落ちる)

(iii) $q(s)=0$