

概均質ベクトル空間に付随する保型形式係数ゼータ関数

立教大理学部 佐藤文広 (Fumihiko Sato)

概均質ベクトル空間に付随するゼータ関数の理論は、一変数の場合が [SS] において、多変数の場合は [S1], [S2] において展開され、少くとも関数等式については一応の理論ができている。しかしながら、既存の理論は「定数係数」の場合に限られており、Hecke の L 関数のように量指標や保型形式を係数にとりこんだものについては一般論が得られていない。以下では、概均質ベクトル空間（今後 PV と略記）に付随する保型形式係数ゼータ関数の理論に何れかの試みを紹介する。

§1. ゼータ関数の（既存の）理論の要点

まず、既存の理論のポイントを整理して、理論を保型形式付に拡張するためには何が拡張されなければならないかを明確にしよう。

(G, ρ, V) は $\mathbb{Q}$ 上定義された pV , すなわち $\mathbb{Q}$ 上定義された連結代数群 G の ($\mathbb{Q}$ -structure をもつ) 有限次元ベクトル空間 V 上の $\mathbb{Q}$ -有理表現 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ で, $V_{\mathbb{Q}}$ 内に Zariski-閉な $\rho(G_{\mathbb{Q}})$ -軌道 $X_{\mathbb{Q}}$ が存在するものとする。 $X_{\mathbb{Q}}$ の補集合 $S_{\mathbb{Q}}$ は, $\mathbb{Q}$ 上定義された代数的部分集合 (S の $\mathbb{Q}$ -有理点集合) になっている。 S は, 簡単のため, 超曲面と仮定し,

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_n, \quad S_i = \{x \in V \mid P_i(x) = 0\}$$

$$P_i(x) \in \mathbb{Q}[V] : \mathbb{Q} \text{ 上 irreducible}$$

と, $\mathbb{Q}$ 上で既約成分に分解しておく。このとき P_i は相対不変式となり,

$$P_i(\rho(g)x) = \chi_i(g) P_i(x) \quad (g \in G, x \in V)$$

を満たす G の $\mathbb{Q}$ -有理指標 χ_i が存在する。

$$X_{\mathbb{R}} = X_1 \cup \dots \cup X_n$$

で, 閉軌道の $\mathbb{R}$ -有理点の連結成分への分解とし, $G^+ \in G_{\mathbb{R}}$ の単位元連結成分とする。各 X_i は G^+ -軌道となる。

ゼータ関数を定義するための基本的な仮定は, 次である:

仮定 1. $\forall x \in X_{\mathbb{Q}}$ に対し, $G_x = \{g \in G \mid \rho(g)x = x\}$ の $\mathbb{Q}$ -有理指標は, すべて, 位数有限である。

$x \in X_i$ に対し, $G_x^+ = G^+ \cap G_x$ とおくと, $X_i = \rho(G^+) \cdot x \cong G^+/G_x^+$ であり, 適当に $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{Q}^n$ を選べば, 次の積分公式が成立するように G_x^+ 上の Haar 測度 $d\mu_x$

正規化できる:

$$\int_{G^+} f(g) d_r g = \int_{X_i} \frac{dy}{\prod_{i=1}^n |p_i(y)|^{\delta_i}} \int_{G_x^+} f(g \cdot h) d\mu_x(h) \quad (f \in L^1(G)),$$

ここで $y = p(g) \cdot x$ とおき, $d_r g$ は G^+ の右不変測度を表わす。

又, 仮定 1 は, G_x^+ が unimodular Lie 群であることを保証する。

$L \subset V_{\mathbb{Q}}$ を lattice とし, 数論的部分群 $\Gamma = \{x \in G_{\mathbb{Q}} \mid p(x)L = L\}$ とおく。このとき, ギータ関数を次のように定義する。

$$S_f(L; \lambda) = \sum_{x \in \Gamma \setminus X_f \cap V_{\mathbb{Q}}} \mu(x) / \prod_{i=1}^n |p_i(x)|^{\lambda_i}$$

$$\mu(x) = \int_{G_x^+ / (G_x^+ \cap \Gamma)} d\mu_x.$$

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n,$$

基本領域の体積 $\mu(x)$ の有限性は, やはり仮定 1 によって保証されている。仮定 1 の下で, $S_f(L; \lambda)$ は $\operatorname{Re} \lambda_1, \dots, \operatorname{Re} \lambda_n$ が十分大になると絶対収束すると思われるが, 一般的に証明は無い。かなり実用的な収束の十分条件は [S2] にあるが, 7.2 不満足である。以下では, $S_f(L; \lambda)$ の収束は認めることにする。

次に $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ ($= V_{\mathbb{R}}$ 上の急減少関数の空間) に対し, ギータ関数を

$$Z(f, L; s) = \int_{G^T/T} \prod_{i=1}^n |x_i(g)|^{s_i} \sum_{x \in L \setminus X} f(p(g) \cdot x) dg$$

と定義する。この $Z(f, L; s)$ を、ゼータ関数 $\zeta_j(L; s)$ の積分表示と与える。すなわち、

$$Z(f, L; s) = \sum_{j=1}^r \zeta_j(L; s) \cdot \Phi_j(f; s).$$

ここで、 $\Phi_j(f; s)$ は、(無限素点における) 局所ゼータ関数であり、

$$\Phi_j(f; s) = \int_{X_j} \prod_{i=1}^n |p_i(x)|^{s_i - \delta_i} f(x) dx$$

で定義される。

さて、以上のまゝに積分表示が得られたとき、ゼータ関数の関数等式・解析接続の証明は、ゼータ積分 $Z(f, L; s)$ と局所ゼータ関数 $\Phi_j(f; s)$ の関数等式・解析接続に帰着する。これは、 $Z(f, L; s)$ に対しては、Poisson 変換公式に基づいて容易に証明される。 $\Phi_j(f; s)$ に対しては、PV の正則性などの仮定の下で証明され、PV の理論の ($\mathbb{R}$ 上の) 基本定理というべき位置を占めている。

以上の詳細は、[SS], [S1] に譲ることにし、ここでは、理論の一般化は、①ゼータ積分を一般化し、適切な積分表示を得る、②その際登場する局所ゼータ関数に相当するものに於て、関数等式を示す、③(上で触れたかったが)ゼータ関

数の極の位置や Γ -factor を統制している b 関数も適切な拡張を行う, ことによって与えられるべきであるという点のみ確認しておく。

§ 2. 一般化の目標.

我々の目指している一般化がどのようなものであるべきかを見るために, 以前から知られているゼータ関数で (p.v. の理論の枠内で考察されようにも関わらず) [SS] や [S1] の一般論に包摂されているもののを挙げよう。

Ex. 1 p.v. として $R_{K/\mathbb{Q}}(\mathrm{GL}(1), M(1))$ ($[K:\mathbb{Q}] < +\infty$) を考える。このとき, § 1 で導入された Zeta 関数は, Dedekind のゼータ関数 (又はその partial ゼータ関数) であり, 量指標に対する Hecke L 関数は一般論にのっている。

Ex. 2 p.v. として $(\mathrm{GL}(1) \times \mathrm{SO}(n), V(n))$ を考える。ここで $V(n)$ は n 次元ベクトル空間で, 表現は直交群のベクトル表現 (ヒスカル一倍の合成) とする。又, $\mathrm{SO}(n)_{\mathbb{R}}$ はコンパクトとする。このとき, § 1 のゼータ関数は通常の Epstein ゼータ関数である。一方, Epstein はすでに, いわゆる環関数体の Epstein ゼータ関数, 例えば,

$$\sum_{m_1, \dots, m_n = -\infty}^{+\infty} \frac{Q(m_1, \dots, m_n)}{(m_1^2 + \dots + m_n^2)^s}, \quad Q \text{ は } n \text{ 変数調和斉次式}$$

も取扱っているが、これも一般論には含まれない。

Ex.3 同じ $pV(GL(n) \times SO(n), V(n))$ で $SO(n)_{\mathbb{R}} = SO(p, n-p)$ (不定値二次形式の特殊直交群) とする場合も考えよう。このとき、 ξ のゼータ関数は、Siegel による不定値二次形式のゼータ関数である。この一般化は H. Maass [M2], D. Hejhal [H] で考察されている。大雑把に言うときは、 $SO(Y)$ 上の保型形式 φ に対し次のようなものを考えている。

Y は非退化有理不定値対称行列

$$\sum_{\substack{x \in SO(Y)_{\mathbb{Z}} \backslash \mathbb{Z}^n \\ {}^t x Y x \neq 0}} \frac{\mu(\varphi; x)}{|{}^t x Y x|^s}, \quad \mu(\varphi; x) = \int_{G_x^+ / \Gamma_x} \varphi(g g_x^{-1}) d\mu_x(g),$$

ここで g_x は、基点 $x_0 \in \mathbb{Z}^n$ を決めたあと $t g_x \cdot x_0 = x$ ($t = |{}^t x Y x_0 / {}^t x_0 Y x_0|^{1/2}$) とするよう $SO(Y)_{\mathbb{R}}$ の元とする。この Maass, Hejhal によるゼータ関数も、勿論、一般論には含まれない。

Ex.4 pV とし $(GL(n) \times SO(m), M(m, n))$, $SO(m)_{\mathbb{R}} = \text{compact}$, $(m \geq n)$ とする。さらに、表現は $\rho(g, k)x = kxg^{-1}$ ($k \in SO(m)$, $g \in GL(n)$, $x \in M(m, n)$) と与えられる。このとき、 ξ 1 つ得られるゼータ関数は Koecher のゼータ関数

$$\sum_{\substack{x \in M(m, n; \mathbb{Z}) / SL(n; \mathbb{Z}) \\ \text{rank } x = n}} \frac{1}{|\det {}^t x x|^s}$$

である。H. Maass はこのゼータ関数も [M1] に始まる一連の研究において次のように拡張した ([M3] も参照のこと) :

$Q(X) \in M(m, n)$ 上の多項式で $SL(n)$ の右からの作用で
不変なもの, $\rho(Y) \in SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$ 上の $SL(n, \mathbb{Z})$ に関する
係数形式とし,

$$\sum_{\substack{X \in M(m, n; \mathbb{Z})/SL(n, \mathbb{Z}) \\ \text{rank } X = n}} \frac{Q(X) \rho(Y(X))}{(\det^T X X)^{\frac{1}{2}n}}, \quad Y(X) = (\det^T X X)^{-\frac{1}{2}n} X X$$

と置く。Maass は, この θ -関数の解析接続, 関数方程式 (余り explicit でない) を示した。 $n=1$ のときは例 2 の球面
数付 Epstein θ -関数に帰着する。この Koecher-Maass θ -
関数も, 一般論において統一的に理解されるべきであろう。

次に, 我々の目標は, 上に例示した各種の θ -関数と具
体例とするような概均値バクトに空間の θ -関数の理論を
構築することである。

§3. 積分表示の一般化

この節では, §1 の状況に戻る。そして, さらに, 群 G が

$$G = L \cdot U, \quad \begin{cases} L \text{ は reductive} \\ U \text{ は } G \text{ の正規部分群で } \chi_i|_U \equiv 1 \text{ (} \forall i \text{)} \end{cases}$$

と分解しうるものとする。 $L_0 \in \bigcap_{i=1}^m \text{Ker } \chi_i|_L$ の単位元連結成分
とし, $T \in L$ の $\mathbb{Q}$ -split central torus で $L = T \cdot L_0$, $|T \cap L_0| < +\infty$
と取るものとする。real points と表わす。

$$G^+ = T^+ \cdot L_0^+ \cdot U^+, \quad \text{上付き } + \text{ は real points の単位元連結成分}$$

と分解しうる。こゝで $T^+ \cdot L_0^+$ は直積, $(T^+ L_0^+) \cdot U^+$ は半直積。

$d^x t, d^x h, d^x u \in \mathbb{R}^n$ なる T^+, L_0^+, U^+ の両側不変 Haar 測度

とし, 指標 $\Delta: T^+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ と

$$d_r g = \Delta(t) d^x t d^x h d^x u \quad (g = t h u)$$

を満足するようにとり。

数論的部分群 Γ は, (必要ならば指数有限部分群にうつ, 2)

$\Gamma \subset L_0^+ \cdot U^+$ ととらえるとする。 $\Gamma_L := \Gamma \cdot U^+ / U^+ \subset L_0^+$ とおく

と Γ_L は L_0 の数論的部分群である。 $K \in L_0^+$ の極大コンパクト

部分群, $\mathfrak{z} \in L_0^+$ 上の両側不変微分作用素 ρ に対する可換 ρ

$\mathbb{C}$ -algebra とする。 K の有限次元 (既約, $\mathbb{C}$ -値) 表現 σ ,

$\chi \in \text{Hom}(\mathfrak{z}, \mathbb{C})$ に対し, $\phi \in \text{Hom}(\sigma, \chi)$ の L_0^+ / Γ_L 上の保

型形式とする。従って, σ の表現空間 V_σ とする。

$$\phi: L_0^+ / \Gamma_L \rightarrow V_\sigma, \quad \phi(k h) = \sigma(h) \phi(k) \quad (k \in K, h \in L_0^+)$$

$$D\phi = \chi(D)\phi \quad (D \in \mathfrak{z})$$

を満足しうる。

こゝで, $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対し, ϕ に付随するゼータ積分

$$Z_\phi(f, L; s) = \int_{T^+} \chi(t)^s \Delta(t) d^x t \int_{L_0^+ \cdot U^+ / \Gamma} \phi(h) \sum_{x \in L_0 \backslash X} f(\rho(t h u) \cdot x) d^x h d^x u$$

を考へる。以下, この積分も $\text{Re } s_1, \dots, \text{Re } s_n \gg 0$ で絶対収

束しうるとする。通常, ゼータ関数 (§1 の意味の) が収

束しうるとし, ϕ の L_0^+ 上有限性より, 明らかに $Z_\phi(f, L; s)$

も収束する。特に ϕ が cusp form ならば $z_\phi(L, f; s)$ は収束する。

これ、種合表示を証明する routine に従って $z_\phi(L, f; s)$ を変形していくと、容易に次のような等式に到達する。

$$z_\phi(f, L; s) = \sum_{j \geq 1} \sum_{x \in \Gamma \backslash L \cap X_j} \frac{\mu(x)}{\prod_{i=1}^n |p_i(x)|^{s_i}} \\ \times \int_{X_j} \prod_{i=1}^n |p_i(y)|^{s_i - \delta_i} f(y) dy \times \int_{L_{(x)}^+ / \Gamma_{(x)}} \phi(h_y h_x^{-1} w) dV_x(w).$$

ここで、各連結成分 X_j から基点 x_j を選んでおくと、 $h_y, h_x \in L_0^+$ は

$$y = \rho(t h_y u) x_j, \quad x = \rho(t' h_x u') x_j \quad (t, t' \in T^+, u, u' \in U^+)$$

と取るものとする。又 $L_{(x)}^+ = G_x^+ U^+ / U^+ \subset L_0^+$, $\Gamma_{(x)} = (\Gamma \cap G_x^+) U^+ / U^+ \subset L_{(x)}^+$ であり、 dV_x は $L_{(x)}^+$ の Haar 測度で、 $\text{vol}(L_{(x)}^+ / \Gamma_{(x)}) = 1$ と取るように正規化しておく。

上の等式をみると、 $z_\phi(f, L; s)$ が §1 にあつたと同様に(ゼータ関数 $\times$ 局所ゼータ関数)と分解しゼータ関数の種合表示を与えるためには、種合

$$\Phi_x^{(j)}(y) := \int_{L_{(x)}^+ / \Gamma_{(x)}} \phi(h_y h_x^{-1} w) dV_x(w)$$

において、 $\Phi_x^{(j)}(x) = (\text{x の情報}) \times (\text{y の情報})$ と分離されればよいから、このことは、例えば、次のようにして

場合に実現する:

(A) ϕ が指標 σ とする: $\Phi_x^{(j)}(y) = \phi(h_x^{-1}) \phi(h_y)$ である。Hecke L 関数はこのように例え与えられる。

(B) $L_{(x)}^+$ が L_0^+ の極大コンパクト群で (従って K と見做す) ϕ が K -不変, i.e., $\sigma = 1$ のとき: $\Phi_x^{(j)}(y) = \phi(h_x) \omega_\phi(h_y)$, ω_ϕ は ϕ に対応する帯球関数である。(例として [T], p380 参照)。§2 例 4 の pv において, $L = GL(n)$, $U = SO(n)$, $L_0 = SL(n)$ とおくと, $Q(x) \equiv 1$ とした場合。Maass ω - ϕ 関数がこのようにして与えられる。

(B) で与えられている状況を更に一般化しよう。基点 x_j に対し, 等価空間 $M_j = L_0^+ / L_{(x_j)}^+$ とおく。自然な写像 ω を

$$\begin{array}{ccc} x_j & \longrightarrow & M_j = L_0^+ / L_{(x_j)}^+ \\ \omega \downarrow & & \downarrow \omega \\ y = t_{h_y} u \cdot x_j & \longmapsto & h_y \bmod L_{(x_j)}^+ =: \bar{y} \end{array}$$

と定義する。 $\Phi_x^{(j)}(y)$ は $\bar{y} \in M_j$ の関数であることは容易にわかる。今 $\Phi_x^{(j)}(\bar{y})$ と記すことにする。 M_j 上の一般化された球関数の空間として

$$\mathcal{E}(M_j, \sigma, \chi) = \left\{ \Phi: M_j \rightarrow V_\sigma \mid \begin{array}{l} \Phi(h_k m) = \sigma(h_k) \Phi(m) \quad (h_k \in K) \\ \bar{D} \Phi = \chi(D) \Phi \quad (\forall D \in \mathfrak{z}) \end{array} \right\}$$

とおく。 $\bar{D}$ は, D が induce された M_j 上の不変微分作用素である。保型形式 ϕ がタイプ (σ, χ) であるから, $\Phi_x^{(j)}(m)$

$\in \mathcal{E}(M_j, \sigma, \chi)$ とする。

仮定 2. $\dim \mathcal{E}(M_j, \sigma, \chi) < +\infty$.

この仮定が満足されたとし、 $\mathcal{E}(M_j, \sigma, \chi)$ の基底 $\Phi_j^{(1)}(m)$, $\dots$, $\Phi_j^{(l_j)}(m)$ ($l_j = \dim \mathcal{E}(M_j, \sigma, \chi)$) を一つ固定し、 $\Phi_x^j \in$

$$\Phi_x^j(m) = \sum_{i=1}^{l_j} C_j^{(i)}(\phi; \chi) \Phi_j^{(i)}(m)$$

と一次結合に展開する。こゝで、係数 $C_j^{(i)}(\phi; \chi)$ は χ にのみ依存するであろう。

以上を考慮すると、仮定 2 の下で、

$$Z_\phi(f, L; s) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{l_j} \left\{ \sum_{\chi \in \Gamma \backslash L_0 \chi_j} \frac{\mu(\chi) C_j^{(i)}(\phi; \chi)}{\prod_{k=1}^n |P_k(\chi)|^{s_k}} \right\} \\ \times \int_{X_j} \prod_{k=1}^n |P_k(y)|^{s_k - \delta_k} \Phi_j^{(i)}(\bar{y}) f(y) dy$$

が得られる。右辺の第 1 因子が係数形式 ϕ に伴ったゼータ関数、第 2 因子が局所ゼータ関数とみなすべしものである。

仮定 2 が満足される場合として

(1) L_0^+ がユニパクト、従って M_j がユニパクト等質空間の場合；有限次元性はユニパクト群の表現論より明らか；

(2) M_j が reductive 対称空間の場合；球関数の空間 $\mathcal{E}(M_j, \sigma, \chi)$ の有限次元性は van den Ban [B1], [B2] より；

がある。

前章の例としては, §2 Ex 2, 及び, §2 Ex 4において
 $L = SO(m) \times GL(1)$, $L_0 = SO(m)$, $V = SL(n)$ とした場合があり, この
 と主 $\phi \equiv 1$, $Q(x)$ は任意とした Maass のゼータ関数が得ら
 れる。

後者の例としては, §2 Ex 3 の Maass, Hejhal のゼータ関
 数がある。より一般に self-dual homogeneous cone のゼータ関
 数は, 保型形式付に拡張される。

§4. 関数等式に向けて.

前節で述べたことにより, L_0^+ がコンパクト, 又は M_j が
 対称空間の場合には, 保型形式付ゼータ関数の理論が展開で
 きる望みがある。まず, ゼータ積分 $Z_\phi(f, L; \lambda)$ の関数等式
 解析接続だが, これは Poisson の和公式を用いて通常の場合
 と同様に証明できる容易な部分である。

次に問題となるのは, 相対不変式の複素巾と球関数の積

$$\prod_{k=1}^m |P_k(y)|^{n_k - s_k} \mathcal{Q}_j^{(i)}(\bar{y})$$

のフーリエ変換 (= 局所ゼータ関数の関数等式) である。群
 L_0^+ がコンパクトの時は, [S3], [S4], [S5] で扱われている。
 [S3] では一変数ゼータ関数に詳しく議論されている。[S4] で
 は §2 Ex. 4 $L_0 = SO(m)$ の場合を詳しく調べている。多変数を

含む一般論は [§5] で述べた。詳細はこれらの文献を参照して頂きたい。

($\chi \in \text{Hom}(Z, \mathbb{C})$ が generic ならば)

M_j が reductive 対称空間 G/H であるときには、 $E(M_j, \sigma, \chi)$ に含まれる球面関数の積分表示 (= 帯球面関数の Harish-Chandra 積分表示の一般化で、大島利雄氏の Poisson 変換の理論より得られる) を用いると、局所関数等式は、適当な双曲型部分群に対する $L_0^+ = \mathbb{C}$ -コンパクトの場合に帰着する。(cf. [§6])

References

- [B1] E.P. van den Ban, Invariant differential operators on a semisimple symmetric space and finite multiplicities in a Plancherel formula, Ark. Mat. 25(1987), 175-187.
- [B2] E.P. van den Ban, Asymptotic behaviour of matrix coefficients related to a reductive symmetric space, Indag. Math. 49(1987), 225-249.
- [H] D.Hejhal, Some Dirichlet series with coefficients related to period of automorphic eigen forms, Proc. Japan Acad. 58(1982), 413-417.
- [M1] H.Maass, Spherical functions and quadratic forms, J. Indian Math. Soc. 20(1956), 117-162.
- [M2] H.Maass, Über die räumliche Verteilung der Punkte in Gittern mit indefiniter Metrik, Math. Ann. 138(1959), 287-315.
- [M3] H.Maass, Siegel's modular forms and Dirichlet series, Lect. Notes in Math. No.216, Springer, 1971.

- [S1] F.Sato, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: Functional equations, Tôhoku Math. J. 34(1982), 437-483.
- [S2] F.Sato, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces II: A convergence criterion, Tôhoku Math. J. 35(1983), 77-99.
- [S3] F.Sato, 概均質ベクトル空間に付随する調和多次項式係数ゼータ関数, 幾何と係型形式研究集会報告集, 1988年東北大学, 254-267
- [S4] F.Sato, The Maass zeta function attached to positive definite Quadratic forms, 数理解講究録 No. ?
- [S5] F.Sato, Zeta functions with polynomial coefficients associated with prehomogeneous vector spaces, Preprint(1989).
- [S6] F.Sato, Zeta functions whose coefficients involve periods of automorphic forms, in preparation.
- [SS] M.Sato and T.Shintani, On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math. 100(1974), 131-170.
- [T] T.Tamagawa, On Selberg's trace formula, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 8(1960), 363-386.