

4 次元 の Ricatti 方 程 式

埼玉大・教育 小 暮 陽 三

§ 1. ま え が き

Kerner, E は化学反応および酵素反応の方程式に応用するため, 多次元 の Ricatti 方程式の線形化法⁽¹⁾を提案し, さらに Gibbs 流の統計力学的な扱いを試みている。Votettera 方程式を基礎にした同様な統計力学的な扱いは E. Teramoto⁽²⁾ による Review がある。しかし, 同じ Kerner の仕事でも, Ricatti 方程式から出発した扱いは, あまりすっきりしていないように思われる。統計力学にまで立ち入らないでも, 最近 H. C. Morris⁽³⁾ は Kerner の線形化が実行できる条件を明きらかにしている。しかし, 彼の条件から逆に Kerner の線形化できる Ricatti 方程式を導くことは難しく, 与えられた Ricatti 方程式が線形化できないことは判断できても, 線形化可能な Ricatti 方程式を必要に応じて具体的に導くわけにはいかない。Morris 自身も 2 次元, 3 次元の場合に限って, 適当なる一環 の元を試行錯誤式に求めていて, 線形化できる例として, かなり特殊な方程式を導いている。より高次元に対しては "In higher dimensions the situations is more complicated and we do not examine it further at this moment" としている。

このノートは 4 次元の場合について, Morris の条件を満たす一般化した Ricatti 変換を求める。やはり試行錯誤式に計算を行うと, 結果は特殊な形しか得られないことを示す。詳細は原論文に譲ることにして必要最小限だけ, Kerner, Morris, の方法を抜書きをしよう。出発点となる式は

$$\dot{x}_i = \epsilon_i + \sum_j k_{ij} x_j + \sum_{jk} K_{ijk} x_j x_k \quad (1-1)$$

Kerner の変換は

$$x_i = -(\Gamma^{\ell}_{z_{\ell}})^{-1}_{ik} \dot{z}_k, \quad (1-2)$$

$\{\Gamma^{\ell}\}$ は n 行 n 列の行列で

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_b \boldsymbol{\Gamma}_r &= \boldsymbol{\Gamma}_w K_{wbr}, \\ (\boldsymbol{\Gamma}_b)_{ac} &= (\boldsymbol{\Gamma}^c)_{ab}, \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

を満足することが, Kerner の条件である。(1-3) の下の式は $\boldsymbol{\Gamma}^c$ と $\boldsymbol{\Gamma}_b$ を結ぶ関係を表わす定義である。これに対して Morris は (1-3) の代りに

$$[\boldsymbol{\Gamma}_b, \boldsymbol{\Gamma}_r]_+ = 2 K_{wbr} \boldsymbol{\Gamma}_w, \quad (1-4)$$

$$[\boldsymbol{\Gamma}_b, \boldsymbol{\Gamma}_r]_- = 2 L_{wbr} \boldsymbol{\Gamma}_w, \quad (1-5)$$

を満たす $\{\boldsymbol{\Gamma}_j\}$ の条件に置きかえている。添字-は交換積, +は反交換積である。(1-4), (1-5) は Ricatti 変換の行列 $\{\boldsymbol{\Gamma}_j\}$ と $\{K_{ijk}\}$ とが混ざった条件であるから, $K_{wbr} = (\bar{K}_s)_{wr}$ で行列 $\{\bar{K}_s\}$ を定義し

$$[\bar{K}_s, \bar{K}_b]_- = L_{wsb} \bar{K}_w \quad (1-6)$$

を条件とする。しかし, 実際に (1-6) から出発して, K_{ijk} を定めることは難しく, 結局 (1-4), (1-5) に戻って, 好都合な $\{\boldsymbol{\Gamma}_j\}$ を探し当て, 線形化出来る方程式を導くという手順を踏むことになる。(1-5) の右辺が 0 のときは Abelian と称し, $\boldsymbol{\Gamma}_b, \boldsymbol{\Gamma}_r$ は同時に対角化できるので問題はない。これに対して L_{wbr} が 0 でない Non-Abelian の場合は適当 $\{\boldsymbol{\Gamma}_j\}$ を選んで, (1-4), (1-5) を満足させなくてはならない。

§ 2. 4次元への拡張

次の基底行列 (4行4列) を 4個とる。

$$\boldsymbol{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma}_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (2-1)$$

ただし $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ は 2行2列の行列

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2-2)$$

である。 $\{\boldsymbol{\Gamma}_j\}$ は一次独立であり, また, Jacobi の恒等式など, リー環の元が満た

すべき4条件⁽⁴⁾を満足している。この証明はやさしいので省略する。

C_1, C_2 の交換積, および反交換積は

$$[C_1, C_2] = C_2, \quad [C_1, C_2]_+ = C_2, \quad (2-3)$$

の関係があり, $C_2^2 = 0, C_1^2 = C_1$ の性質がある。以上から (2-1) の $\{F_j\}$ について交換積と反交換積を計算すると

$$[F_1, F_2] = F_2, \quad [F_1, F_3] = F_3, \quad [F_1, F_4] = F_4. \quad (2-4)$$

$$[F_1, F_1]_+ = 2F_1, \quad [F_1, F_2]_+ = F_2, \quad [F_1, F_3]_+ = F_3, \quad [F_1, F_4]_+ = F_4 \quad (2-5)$$

の関係が成り立ち, (2-4), (2-5) 以外の交換積, 反交換積はすべて0になる。

Morris の方法に従って, Ricatti 方程式 (1-1) の非線形項の係数 K_{ijk} は, 反交換積 (2-5) により

$$K_{111} = 1, \quad K_{212} = K_{221} = \frac{1}{2}, \quad K_{313} = K_{331} = \frac{1}{2}, \quad K_{414} = K_{441} = \frac{1}{2}, \quad (2-6)$$

になる。一方, Non - Abelian を示す行列要素, (1-5) は交換積 (2-5) によって

$$L_{212} = L_{221} = \frac{1}{2}, \quad L_{414} = L_{441} = \frac{1}{2}, \quad L_{313} = L_{331} = \frac{1}{2} \quad (2-7)$$

で与えられる。

したがって, (1-1) に対して (2-6) をとった

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \epsilon_1 + k x_1 + x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= \epsilon_2 + k x_2 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_3 &= \epsilon_3 + k x_3 + x_1 x_3, \\ \dot{x}_4 &= \epsilon_4 + k x_4 + x_1 x_4, \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

は (2-1) の $\{F_j\}$ による Ricatti 変換 (1-2) を行うと, 線形化できる。(2-8) の非線形項は Morris の称する Canonical Form になっている。(2-8) に直交変換を行い, 変数を x_i から y_i に移すと,

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= \alpha_1 + k y_1 + \alpha y_1^2 + \beta y_1 y_2 + r y_1 y_3 + \delta y_1 y_4, \\ \dot{y}_2 &= \alpha_2 + k y_2 + \beta y_2^2 + \alpha y_1 y_2 + r y_2 y_3 + \delta y_2 y_4, \\ \dot{y}_3 &= \alpha_3 + k y_3 + r y_3^2 + \beta y_2 y_3 + \alpha y_1 y_3 + \delta y_3 y_4, \\ \dot{y}_4 &= \alpha_4 + k y_4 + \delta y_4^2 + \beta y_2 y_4 + r y_3 y_4 + \alpha y_1 y_4, \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

Morris の 3 次元の式 (3.12) を 4 次元に拡張した結果を導いたことになっていて, $y_4 = 0$ とすると, 彼の (3.12) を含んでいる。

§ 3. 結 び

(2-1) の $\{ \mathbf{r}_j \}$ は次の条件を満たす。

- 1) 互に 1 次独立である。
- 2) $K_{wbs} = (\bar{K}_s)_{wb}$ とすると, (1-6) の

$$[\bar{K}_s, \bar{K}_b]_- = L_{wsb} \bar{K}_w \quad (3-1)$$

を満足している。また,

- 3) (2-8) の k は明らかに

$$[k, \bar{K}_r]_- = 0, \quad \forall r \quad (3-2)$$

を満足し,

- 4) $(\bar{M}_1)_{st} = (K_{stl} + L_{stl})$ とすると

$$[\bar{M}_1, k] = 0, \quad \forall l \quad (3-3)$$

を明らかに満たしている。ただし 4) は必要条件である。よって, $\{ \mathbf{r}_j \}$ は 4 次元の Ricatti 変換で, 1 次の係数 k_i はすべて等しいとした最も単純な形を選んでおいた。

もちろん, ここで求めた $\{ \mathbf{r}_j \}$ は一意的ではなく, 早急な結論は出せないが, Kerner の変換条件を満足する Ricatti 方程式はかなり制約を受けた特殊な形に限定されると予想される。このことは Morris の 2 次元, 3 次元と比べても考えられることである。なお 1 次元の Ricatti 方程式の応用については H. Sabata⁵⁾ の仕事があり, これらと合わ

せて、今少し立ち入った考察が必要であろう。

参 考 文 献

- 1) Kerner. E. Bull. Math. Biophysics. 34 243-275, 1972.
- 2) 寺本 英, 生命の物理第Ⅱ部, 岩波
- 3) H. C. Morris. Bull. Math. Biology 36 67-76, 1974.
- 4) 山内恭彦, 杉浦光夫, 連続群論入門 p 33. 培風館
- 5) 鯖田秀樹 生物モデルの数学 (数理科学講究録 174, 1973年3月) p 126-129