

ステファニ問題の漸近解

宇都宮 文 教養 徳田 尚之

§. 1 いとぐさ.

“動く自由境界問題”として知られる問題の中で最も代表的なものはステファニ問題である。この自由境界問題では場の方程式の解の一部として境界形状そのものを求めなければならず、その非線形結合のため解を求めるのには大変な困難をもたらし、ステファニ問題のラクランジュ・ビルマニ（以下 L-B と略す）展開を用いた級数解の求め方については前報（徳田 1979）で述べたがここでは収束しない漸近解と L-B 展開によ、て求める方法を示す。

我々の発展させた L-B 展開の層は次の通りである。まず、問題の記述に表われる物理面工の変数を、1-パラメータ群の変換群により、新しい L-B 座標面上に変換する。L-B 変換と呼ばれるこの変換は、偏微分方程式の解を求め

る時によく用いられる相似変換と密接に関係している。まず解は L - B 面でのベキ展開により組立てる。この方法の一番の利点は L - B 面での級数の収束性が大巾に改善されていることである。物理的な解は, L - B 面から物理面に逆変換することにより求めることも出来る。物理面から L - B 面への変換の数学的基礎は Henrici (1974) に詳しい。 L - B 面から物理面への逆変換についての数学的基礎は目下著者が準備中である。本論文では数学的な基礎には触れずに応用面のみに述べることにしたい。

§2. 一相スラフの問題と基礎方程式.

ここで考える問題は一相で, 相変化を誘起する冷却面は Newton の放熱条件とする。時刻 $t = 0$ で出来上がる相(例えば氷相)の厚さ $X = 0$ とし, 瞬間的に冷媒を流し始め氷相が形成されるとすれば, 無次元温度 u を支配する温度場の方程式と境界条件は (徳田 1979 をみよ)。

$$\epsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u(0, t) = u_w(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(X, t) = \frac{dX}{dt}, \quad (3)$$

$$u(X, t) = 1, \quad (4)$$

$$X(0) = 0. \quad (5)$$

こゝで X は $x=0$ の冷却壁から測り、 δ は氷相の厚さであり、 α , t はそれぞれ無次元化された距離、時間変数である。この問題に現われる唯一の無次元パラメータ ϵ は

$$\epsilon = k(u_s - u_0) / \rho L \quad (6)$$

こゝで ρ は密度、 L は潜熱、 k は熱伝導係数、 u_s , u_0 はそれぞれ相変化温度、 u_0 は冷媒の温度である。殆んどすべての物質でこの潜熱 L が比較的大きく、 $\epsilon \sim 0.01 \sim 0.1$ 程度の小さな値をとることから知られている。

式(1)~(5)に対して $t \rightarrow 0$ の領域での収束する級数解は Tao (1979), 徳田 (1979) により求められている。殊に $\epsilon = 0$ の極限を考えると容易に確認出来る様に

$$X = \sqrt{1+2t} - 1 \quad (7)$$

$$u_w = 1 / \sqrt{1+2t} \quad (8)$$

という厳密解をもっていることが分る。こゝで注意したいのは(7), (8)式で $t \rightarrow \infty$ と考えると

$$X \sim \sqrt{2t}, \quad u_w \sim 0$$

となり、壁面が放熱条件ではなく温度指定の Neumann の厳密解に近づくことである。Neumann の解は (Carslaw & Jaeger 1960) は次の様に表わされる。

$$X = 2\alpha t^{1/2} \quad (9)$$

$$\alpha \operatorname{erf}(\sqrt{\epsilon}\alpha) \exp(-\epsilon\alpha^2) = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\pi}} \quad (10)$$

(9)式の α は超越方程式(10)の解で、次の級数解をもつ、

$$\alpha = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{\epsilon}{6} + \frac{31}{720} \epsilon^2 + \dots \right) \quad (11)$$

$\epsilon=0$ の解(9)が $t \rightarrow \infty$ の式(7)の解と一致していることが容易に分る。この $t \rightarrow \infty$ の解の振舞いの頭において(1)~(5)式までの漸近解を求めてみよう。

§3 ラグランジュ・ビルマニ展開

前報の方法(徳田1979)に従って、(1)~(5)式を $L-B$ 面に変換してみよう。(1)~(5)の解が $t \rightarrow \infty$ で Neumann の解に漸近することから次の様子 $L-B$ 変数を導入してみよう。

$$\eta = \frac{x}{X}, \quad \tau = X \frac{dX}{dt} - 2 \quad (12)$$

こゝで、

$$t^* = \alpha^2 t \quad (13)$$

であり、 α は(9)、(10)を満足する解である。以下 $\frac{d}{dt}$ を $\frac{d}{d\tau}$ と変換することにする。

(12)式を(1)~(5)式に代入し、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \epsilon \alpha^2 (\tau + 2) \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} = \epsilon \alpha^2 \frac{u_w}{1-u_w} X^2 (1-u) + \epsilon \alpha^2 \frac{d\tau}{dt} X^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (14)$$

$$X \frac{u_w}{1-u_w} = \frac{\partial u}{\partial \eta} (0, \tau) \quad (15)$$

$$\frac{\chi \dot{\chi}}{1-u_w} = d^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} (1, \tau) \quad (16)$$

$$u(0, \tau) = 0 \quad (17)$$

$$u(1, \tau) = 1 \quad (18)$$

$$\chi(0) = 0 \quad (19)$$

(14) ~ (19) 式が τ のみの関数と η のみの関数ととして扱えるには、下線に施した項 $\frac{\dot{u}_w}{1-u_w} \chi^2$ と $\frac{d^2}{dt^2} \chi$ が τ のみの関数ととして表わされる必要がある。これが可能であることを示すには、従属変数 χ , u_w 従, τ が次の展開をもつと仮定しよう。

$$\chi \sim 2t^{1/2} + C_2 + C_3 \frac{\ln t}{t^{1/2}} + C_4 \frac{1}{t^{1/2}} + \dots \quad (20)$$

$$u_w \sim d_1/t^{1/2} + d_2/t^2 + d_3 \ln t/t^{3/2} + d_4/t^{3/2} + \dots \quad (21)$$

$$\tau = \chi \dot{\chi} - 2 \sim C_2/t^{1/2} + 2C_3/t^2 + \dots \quad (22)$$

式(22)の逆変換は容易に求めることが出来て、

$$1/t^{1/2} \sim 1/C_2 (\tau - \frac{2C_3}{C_2^2} \tau^2 + \dots) \quad (23)$$

式(20), (21), (22), (23)を用いると, (14)式の下線部の項は次の展開をもつことが分る。

$$\frac{d^2}{dt^2} \chi^2 \sim -\frac{2C_2}{t^{3/2}} - \frac{2C_2^2 + 8C_3}{t^2} + \dots = a_1 \tau + a_2 \tau^2 + \dots \quad (24)$$

$$\frac{\dot{u}_w}{1-u_w} \chi^2 \sim -\frac{2d_1}{t^{3/2}} - \frac{(4d_2 + 2C_2 d_1 + 2d_1^2)}{t^2} + \dots = b_1 \tau + b_2 \tau^2 + \dots \quad (25)$$

τ, τ^2

$$a_1 = -2, \quad a_2 = -(2 + \frac{4C_3}{C_2^2}) \quad (26)$$

$$b_1 = -\frac{2d_1}{C_2}, \quad b_2 = (4\frac{C_3 d_1}{C_2^3} - 4\frac{d_2}{C_2^2} - \frac{2d_1}{C_2} - \frac{2d_1^2}{C_2^2}) \quad (27)$$

式(24), (25)を(14)式に代入すると u は τ のみの関数であることが分る。よ、 τ u は τ について漸近べき展開をそとと仮定しよう。

$$u(\eta, \tau) \sim u_0(\eta) + \tau u_1(\eta) + \tau^2 u_2(\eta) + \dots \quad (28)$$

式(28)を式(14), (17), (18)に代入すると $u_0, u_1, \dots$ は支配する方程式は

$$u_0'' + 2\epsilon d^2 \eta u_0' = 0, \quad u_0(0) = 0, \quad u_0(1) = 1 \quad (29)$$

$$u_1'' + 2\epsilon d^2 \eta u_1' + 2\epsilon d^2 u_1 = \epsilon d^2 b_1(1 - u_0) - \epsilon d^2 \eta u_0'$$

$$u_1(0) = u_1(1) = 0 \quad (30)$$

$$u_2'' + 2\epsilon d^2 \eta u_2' + 4\epsilon d^2 u_2 = \epsilon d^2 \{ a_2 u_1 + b_2(1 - u_0) - b_1 u_1 - \eta u_1' \}, \quad u_2(0) = u_2(1) = 0 \quad (31)$$

境界条件(15), (16)は、従、 τ 次の漸近展開をもつ。

(注)* (28)式の展開が正しいかどうかは、この展開により求めた解が境界条件(15), (16)式、即ち(32), (33)式又は(34), (35)式を満足出来る解に於、正しいかどうかによる。

$$\chi \frac{u_w}{1-u_w} \sim u'_0(0) + \tau u'_1(0) + \tau^2 u'_2(0) + \dots \quad (32)$$

$$\frac{\chi \dot{\chi}}{1-u_w} \sim \alpha^* \left\{ u'_0(1) + \tau u'_1(1) + \tau^2 u'_2(1) + \dots \right\} \quad (33)$$

一方, 式 (20), (21), (22) の関係から式 (24), (25) を求めた手順と全く同様に式 (32), (33) は次の展開をもちあはすもの。

$$\begin{aligned} \chi \frac{u_w}{1-u_w} &\sim 2d_1 + \frac{(d_1 c_2 + 2d_2 + 2d_1^2)}{t^{1/2}} + \frac{2(d_{30} + d_1 c_{30}) \ln t^*}{t^*} + \frac{(d_1 c_{31} + 2d_{31} + c_2 d_1^2 + 2d_1^3)}{t^*} \\ &+ \dots = 2d_1 + \frac{(d_1 c_2 + 2d_2 + 2d_1^2)}{c_2} \tau + \frac{2(2d_{30} + d_1 c_{30}) \tau^2 \ln \tau}{c_2^2} \\ &+ \frac{(2d_1^2 + c_2 d_1)(d_1 + 2c_{30}) + d_1 c_{31} + 2d_{31}}{c_2^2} \tau^2 + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\chi \dot{\chi}}{1-u_w} &\sim 2\alpha^* + \frac{c_2 + 2d_1}{t^{1/2}} + \frac{(2c_{30} + c_2 d_1 + 2d_1^2)}{t^*} + \dots \\ &= 2\alpha^* + \frac{c_2 + 2d_1}{c_2} \tau + \left(c_2 d_1 + 2d_1^2 - \frac{4c_{30} d_1}{c_2^2} \right) \frac{\tau^2}{c_2^2} + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

よ, τ 式 (29) ~ (31) の解から求まる (32), (33) 式の展開と, 式 (20), (21), (22) 式から求めらる展開式 (34), (35) が一致することが必要である。もし未定係数 $c_2, c_{30}, c_{31}, \dots, d_1, d_2, d_{30}, d_{31}, \dots$ を 与える こと が 求めらる こと が出来れば正しい L-B 展開が出来ることになる。例えば式 (20), (21) の c_{30}, d_{30} 等の対数項が必要となる。たのはこの様な手順を踏んだ結果分かる。

§ 4. L-B 属南の係数の決定.

 u_0 と係数 d_1 (24) 式に満足する解 u_0 は

$$u_0 = \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{\epsilon} d \eta)}{\operatorname{erf}(\sqrt{\epsilon} d)} = \frac{\operatorname{erf}(Y)}{\operatorname{erf}(\sqrt{\epsilon} d)} \quad (36)$$

c. 2 $Y = \sqrt{\epsilon} d \eta$ である.

$$u'_0(0) = \frac{2\sqrt{\epsilon} d}{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{\epsilon} d)} = 2d^2 \exp(\epsilon d^2) \quad (37)$$

$$u'_0(\sqrt{\epsilon} d) = 2 \quad (38)$$

式(34)と(37)の比較から d_1 が定まる.

$$d_1 = d^2 \exp(\epsilon d^2) \quad (39)$$

式(35)と(38)の初項は一致していることに注意される.

 u_1 と係数 c_2, d_2 (30)式に満足する u_1 は

$$u_1 = \frac{b_1}{2} (1 - u_0) + \frac{Y}{2} u'_0 - \frac{b_1}{2} \exp(-Y^2) + \frac{d^2 - \frac{b_1}{2} \exp(-\epsilon d^2)}{Dw(\sqrt{\epsilon} d)} Dw(Y) \quad (40)$$

c. 2 Dw は Dawson 積分と呼ばれていて次式で定義される

$$Dw(Y) = \exp(-Y^2) \int_0^Y \exp(t^2) dt \quad (41)$$

$$u'_1(Y) = \frac{1-b_1}{2} u'_0 + \frac{Y}{2} u''_0 + b_1 Y \exp(-Y^2) + \frac{d^2 - \frac{b_1}{2} \exp(-\epsilon d^2)}{Dw(\sqrt{\epsilon} d)} \{-2Y Dw(Y) + 1\} \quad (42)$$

(42)式の $u_1(\sqrt{\epsilon}d)$ の値を (33)式に代入し, (35)式の第二項と比較すると C_2, b_1 が求まる。

$$C_2 = -1, \quad b_1 = 2d_1 = 2d^2 \exp(-\epsilon d^2) \quad (43)$$

(42)の結果を用いると u_1 は次の様に簡単に得る。

$$u_1(Y) = d_1(1 - u_0) + \frac{Y}{2} u_0' - d_1 \exp(-Y^2)$$

全く同じ手順で (42)式の $u_1'(\sqrt{\epsilon}d)$ の値を (32)式に代入し, (34)式の第二項目と比較すれば

$$d_2 = 0 \quad (44)$$

$$u_2 \text{ と } C_{30}, d_{30}, d_{31}$$

式 (31) に満たす解 u_2 は。

$$u_2 = \frac{b_2}{4}(1 - u_0) + \frac{a_2 - b_1}{2} u_1 + \frac{1}{2}(Y u_1' + 2u_1) - \frac{Y \exp(-Y^2)}{2\sqrt{\epsilon}d} [d_1(1 - 2d_1) + \frac{d_1 b_2}{2d^2} DW_1(\sqrt{\epsilon}d)] + \frac{b_1}{4} DW_1(Y) \quad (45)$$

ここで

$$DW_1(Y) = -1 + 2Y \exp(-Y^2) \int_0^Y \exp(t^2) dt = -1 + 2Y DW(Y) \quad (46)$$

であり, 係数 b_2, a_2 は式 (26), (27) で与えられる。

u_1 の時と同じ手順で少し長い計算の結果

$$C_{30} = - \frac{\epsilon d^2 + d_1(1 - d_1)(1 - \frac{1}{2d^2})}{2[(1 - \frac{1}{2d^2})d_1 - 1]} \quad (47)$$

$$d_{30} = - \frac{d_1 C_{30}}{2} \quad (48)$$

$$d_{3,1} = -\frac{d_1 C_{3,1}}{2} + \frac{d_1^2}{2} \left[\left(\frac{1}{2d^2} - 1 \right) + \left(1 - \frac{1}{2d^2} \right) d_1 - \frac{\sqrt{\epsilon}}{d} (1-d_1) DW(\sqrt{\epsilon}d) \right] \\ - C_{3,0} d_1^2 \left[\left(1 - \frac{1}{2d^2} \right) + \frac{\sqrt{\epsilon}}{d} DW(\sqrt{\epsilon}d) \right] \quad (49)$$

この段階では $C_{3,1}$ は決まるだけの係数である。従って (49) 式から明らかになる様に $d_{3,1}$ も決まるだけの。これは、(22) 式の展開で $O(1/d^2)$ までには $C_{3,1}$ が現われることに起因しており次のオーダーの展開で求まるものと思われる。

§5. L-B 展開の物理面への逆変換.

ここで断点を (13) 式の右辺とすると、§4 の結果は次の如くまとめることができる。

$$\chi \sim 2d t^{1/2} - 1 + \frac{\epsilon d^2 + (1 - \frac{1}{2d^2}) d_1 (1-d_1)}{2 \left[(1 - \frac{1}{2d^2}) d_1 - 1 \right]} \frac{\ln d^2 t}{d^2 t} + \frac{C_{3,1}}{d^2 t} + \dots \quad (50)$$

$$u_w \sim \frac{d_1}{d t^{1/2}} - \frac{d_1 C_{3,0}}{2} \frac{\ln d^2 t}{d^3 t^{3/2}} + \frac{d_{3,1}}{d^3 t^{3/2}} + \dots \quad (51)$$

$$\tau \sim -\frac{1}{d t^{1/2}} + \frac{2 C_{3,0}}{d^2 t} + \dots \quad (52)$$

$$\chi \frac{u_w}{1-u_w} \sim 2d_1 + d_1 (1-2d_1) \tau + \left[d_1 \left\{ \left(\frac{1}{2d^2} - 2 \right) + \left(3 - \frac{1}{2d^2} \right) d_1 - \frac{\sqrt{\epsilon}}{d} (1-d_1) DW(\sqrt{\epsilon}d) \right\} \right. \\ \left. + 2 C_{3,0} d_1 \left\{ -1 + \left(3 - \frac{1}{2d^2} \right) d_1 + \frac{\sqrt{\epsilon}}{d} DW(\sqrt{\epsilon}d) d_1 \right\} \right] \tau^2 + \dots \quad (53)$$

$$\frac{\chi \dot{\chi}}{1-u_w} \sim 2d^2 + (1-2d_1) \tau + [d_1 (2d_1 - 1) + 4 C_{3,0} d_1] \tau^2 + \dots \quad (54)$$

2. 2

$$d_1 = d^2 \exp(\epsilon d^2), \quad C_{3,0} = \frac{\epsilon d^2 + (1 - \frac{1}{2d^2}) d_1 (1-d_1)}{2 \left[(1 - \frac{1}{2d^2}) d_1 - 1 \right]}$$

式(50), (51)の物理面の展開と式(52), (53)のL-B面での展開を比較してみると次の二点に気がつく。第1は、物理面では χ, u_w 互に対数項が存在するのに、L-B面には存在しない。第2の点は前述1に様々 $O(1/t)$ の項までの展開で、物理面の展開には未定係数 (c_1, d_1) が存在する²⁾にL-B展開では完全に各係数が決ま、ていることである。これは式(22)又は(52)で明らかになる様にこの展開の $O(1/t)$ には c_0 しか現われないが c_1 は周知していることも推定される。L-B面の展開にも高次の項では関数の非解析性を示す対数項が現われるかどうかは意味のある問題である。

式(52), (54)のL-B展開は漸近展開で収束はしない展開と見られる。ただし、もし χ, u_w 自体には特異点があっても、 $\chi \frac{u_w}{1-u_w}$ 等の組合せがお互いの特異点を除去する様式なのであれば、²⁾L-B展開は収束級数に居る可能性もあることと付け加えておこう。ここでは式(53), (54)のL-B展開での解と変換公式(12)と使、物理面へ逆変換する方法を示す。逆変換は(53), (54)式の第1項、第2項、...、第 n 項まで取り逆変換する方法で詳しくは前報(徳田1979)を参照されたい。以下上記の変換を第1次、第2次...、第 n 次変換とそれぞれ呼ぶことにする。

第1次逆変換

L-B 層内 (53), (54) の第1項のみを考へる。

$$\chi^{(1)} \frac{u_w^{(1)}}{1-u_w^{(1)}} = 2d^2 \exp(\epsilon d^2) \quad (55)$$

$$\frac{\chi^{(1)} \dot{\chi}^{(1)}}{1-u_w^{(1)}} = 2d^2 \quad (56)$$

こゝで上添字⁽¹⁾は第1次変換による解を示す。(55), (56)は容易に解くことが出来る

$$\chi^{(1)} = 2d \sqrt{t + d^2 \exp(\epsilon d^2)} - 2d^2 \exp(\epsilon d^2) \quad (57)$$

$$u_w^{(1)} = \frac{d^2 \exp(\epsilon d^2)}{\sqrt{t + d^2 \exp(\epsilon d^2)}} \quad (58)$$

第2次逆変換

L-B 層内の第2項までを考へる。

$$\chi^{(2)} \frac{u_w^{(2)}}{1-u_w^{(2)}} = 2d^2 \exp(\epsilon d^2) + d^2 \exp(\epsilon d^2) (1 - 2d^2 \exp(\epsilon d^2)) \chi^{(1)} \quad (59)$$

$$\frac{\chi^{(2)} \dot{\chi}^{(2)}}{1-u_w^{(2)}} = 2d^2 + (1 - 2d^2 \exp(\epsilon d^2)) \chi^{(1)} \quad (60)$$

こゝで

$$\chi^{(2)} = \chi^{(1)} \dot{\chi}^{(1)} - 2d^2 \quad (61)$$

(59), (60)の解は

$$\begin{aligned} d_1 C \sqrt{(C + \chi^{(1)})^2 + D^2} + 2d_1^2 (1 - 2d_1) \log \frac{C + \chi^{(2)} + \sqrt{(C + \chi^{(2)})^2 + D}}{C + \sqrt{C^2 + D}} \\ + C \chi^{(2)} + \frac{\chi^{(2)2}}{2} = 4d_1^2 d_1 t + d_1 C \sqrt{C^2 + D} \end{aligned} \quad (62)$$

$$\therefore \text{E1} \quad C = 1 - 2d_1^2 + 4d_1^2 d_1, \quad D = 16d_1^2 d_1^2 (1 - 2d_1), \quad d_1 = d^2 \exp(\epsilon d^2)$$

である。

以下同様、高次の逆変換に進むことが出来る。3次以上は解析的「解」を求めることは不可能なので数値解に頼らざるを得ないと思われる。詳細な数値例は別の論文に紹介する予定である。

参考文献

Carslaw, H.S & Jeager, J.C 1960 "Conduction of Heat in Solids" Oxford University Press.

Henrici, P 1974 "Applied and Computational Complex Analysis" Vol 1, John Wiley & Sons.

Taa, L.N 1979 "Free Boundary Problems with Radiation Boundary Conditions" Quarterly of Applied Mathematics, Vol 37.

Tohru, N. 1972 "スカラー問題の数値解"
京大数理解析研講究録.