

ある高階差分方程式の漸近定数問題について

大阪府立大学工学部 松永 秀章 (Hideaki Matsunaga)
大阪府立成城工業高校 荻田 竜三 (Ryuzou Ogita)
徳島大学総合科学部 村上 公一 (Kouichi Murakami)

1. イントロダクション

2 次元の $(k+1)$ 階線形差分方程式

$$(1) \quad x_{n+1} - x_n + A(x_n - x_{n-k}) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

を考える。ここで、 $A: 2 \times 2$ -定数行列、 $k \in \mathbf{N}$ で、初期値を $x_{-k}, \dots, x_0 \in \mathbf{R}^2$ とする。今、 $\mathbf{R}^2$ 上の各点が (1) の定数解になっていることに注意しておく。

最近、(1) を含むような高階差分方程式の解の漸近挙動が研究されているが、完全に解決されたとは言いがたい ([1], [2])。一方、(1) に対応する時間遅れをもつ微分方程式

$$(E) \quad x'(t) + A(x(t) - x(t-\tau)) = 0, \quad (\tau > 0)$$

の解の漸近挙動は、Murakami ([3]) によって解決済みである。本研究では、(1) の解の漸近挙動を [3] のように完全に分類することを目指とする。特に、(1) の解がある定点や周期点に漸近する場合、その具体的表現を求める。

さて、正則行列 P により $x_n = P u_n$ とおくと (1) は

$$u_{n+1} - u_n + P^{-1}AP(u_n - u_{n-k}) = 0$$

となるので、行列 A として以下の場合を考えれば十分である：

$$(I) \ A = a \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (II) \ A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad (III) \ A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

ただし、 $a, a_1, a_2 \in \mathbf{R}$, $0 < |\theta| \leq \pi/2$ である。

2. 準備 (拡大系とその一般解)

$y_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_{n-k} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$ (ただし、 $m = 2(k+1)$) と定義すると、(1) は m 次元の拡大系

$$(2) \quad y_{n+1} = \hat{A} y_n, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I \\ A & 0 & \dots & 0 & I - A \end{pmatrix}$$

に変換される。この拡大系の初期値 y_0 に対する解は、

$$y_n = \hat{A}^n y_0$$

となる。従って、解 y_n の漸近挙動は、線形写像 $y \rightarrow \hat{A}y$ の固有値問題を考えればよい。

以下、簡単のため、 $\hat{A}$ の固有値 λ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) はすべて単根とする。このとき、 $\mathbf{R}^m$ は固有空間 V_i ($i = 1, 2, \dots, m$) により

$$\mathbf{R}^m = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$$

と直和分解される。(正確には、複素化した空間 $\mathbf{C}^m$ を分解して、それを実数化する。)

さて、 $y_0 \in \mathbf{R}^m$ は各 λ_i に属する固有ベクトル ϕ_i を用いて

$$(3) \quad y_0 = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 + \dots + c_m \phi_m$$

と一意的に表せる。よって

$$\begin{aligned} y_n &= \hat{A}^n y_0 = c_1 \hat{A}^n \phi_1 + c_2 \hat{A}^n \phi_2 + \dots + c_m \hat{A}^n \phi_m \\ &= c_1 \lambda_1^n \phi_1 + c_2 \lambda_2^n \phi_2 + \dots + c_m \lambda_m^n \phi_m \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $|\lambda_i| < 1$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} c_i \lambda_i^n \phi_i = 0$ となるので、 $n \rightarrow \infty$ での解の漸近挙動を考える場合は、 $|\lambda_i| < 1$ の成分は考えなくてもよい。ゆえに、 $\hat{A}$ の固有値が

$$|\lambda_i| = 1 \text{ (一部)}, \quad |\lambda_j| < 1 \text{ (残りすべて)}$$

のとき、 y_0 の ϕ_i 成分 c_i が得られると、 y_n の漸近する軌道 $c_i \lambda_i^n \phi_i$ が求まる。

そこで、(3) で与えられた y_0 の ϕ_i 成分 c_i を求めよう。今、転置行列 $\hat{A}^T$ の固有値 λ_i に属する固有ベクトルを ψ_i とすると

$$\hat{A}^T \psi_i^T = \lambda_i \psi_i^T \quad \text{i.e.} \quad \psi_i \hat{A} = \lambda_i \psi_i$$

である。このとき、 $\lambda_i \psi_i \phi_j = \psi_i \hat{A} \phi_j = \psi_i \lambda_j \phi_j = \lambda_j \psi_i \phi_j$ から

$$(\lambda_i - \lambda_j) \psi_i \phi_j = 0$$

なので、 $i \neq j$ ならば $\psi_i \phi_j = 0$ となる。よって、(3) の両辺に左から ψ_i をかけると

$$\psi_i y_0 = c_1 \underbrace{\psi_i \phi_1}_0 + \dots + c_i \psi_i \phi_i + \dots + c_m \underbrace{\psi_i \phi_m}_0 = c_i \psi_i \phi_i$$

となる。従って

$$(4) \quad c_i = (\psi_i \phi_i)^{-1} \psi_i y_0$$

と決定できる。

Remark 1. $\hat{A}$ に重複する固有値がある場合でも、

$$\dim \ker(\lambda I - \hat{A}) = \text{固有値の重複度}$$

となる成分については、これまでに述べたことと同様の議論が成立する。また、

$$\dim \ker(\lambda I - \hat{A}) < \text{固有値の重複度}$$

となる成分は、一般化固有空間を考えることになるが、 $|\lambda| < 1$ ならば $n \rightarrow \infty$ で 0 となる。

3. 特性方程式

この節では、拡大系 (2) の特性方程式 (固有方程式)

$$(5) \quad \det(\lambda I - \hat{A}) = 0$$

を考えよう。最初に、 A が (I) の場合を考える。以後、簡単のため

$$a_0 = -\frac{\sin \frac{\omega_0}{2}}{\sin \frac{k\omega_0}{2}}, \quad a_{-1} = \frac{\sin \frac{\omega_{-1}}{2}}{\sin \frac{k\omega_{-1}}{2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\theta}{k+1}, \quad \omega_{-1} = -\operatorname{sgn} \theta \frac{2(\pi - |\theta|)}{k+1}$$

とおく。

Lemma 1. A が (I) の場合を考える。

- (i) $a_0 < a < a_{-1}$ ならば, (5) の根は $\lambda = 1$ (2重), その他は $|\lambda| < 1$ である。
- (ii) $a = a_0$ ならば, (5) の根は $\lambda = 1$ (2重), $\lambda = e^{\pm i\omega_0}$ (単根), その他は $|\lambda| < 1$ である。
- (iii) $a = a_{-1}$ ならば, (5) の根は $\lambda = 1$ (2重), $\lambda = e^{\pm i\omega_{-1}}$ (単根), その他は $|\lambda| < 1$ である。
- (iv) $a < a_0$ または $a > a_{-1}$ ならば, $|\lambda| > 1$ となる (5) の根がある。

まず

$$\det(\lambda I - \hat{A}) = \det(\lambda^{k+1}I - \lambda^k I + (\lambda^k - 1)A)$$

に注意しよう。ここで, $F(\lambda) = \lambda^{k+1} - \lambda^k + ae^{i\theta}(\lambda^k - 1)$ とおくと

$$\begin{aligned} \det(\lambda^{k+1}I - \lambda^k I + (\lambda^k - 1)A) &= \begin{vmatrix} \lambda^{k+1} - \lambda^k + a(\lambda^k - 1)\cos\theta & -a(\lambda^k - 1)\sin\theta \\ a(\lambda^k - 1)\sin\theta & \lambda^{k+1} - \lambda^k + a(\lambda^k - 1)\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= \{\lambda^{k+1} - \lambda^k + a(\lambda^k - 1)\cos\theta\}^2 + \{a(\lambda^k - 1)\sin\theta\}^2 \\ &= \{\lambda^{k+1} - \lambda^k + a(\lambda^k - 1)\cos\theta\}^2 - \{ia(\lambda^k - 1)\sin\theta\}^2 \\ &= \{\lambda^{k+1} - \lambda^k + ae^{i\theta}(\lambda^k - 1)\}\{\lambda^{k+1} - \lambda^k + ae^{-i\theta}(\lambda^k - 1)\} \\ &= F(\lambda)\overline{F(\lambda)} \end{aligned}$$

である。よって $F(\lambda) = 0$ の根を調べれば十分である。また $0 < \theta \leq \pi/2$ の下で考えればよい。

Remark 2. $F(1) = 0$ かつ $F'(1) = 1 + kae^{i\theta} \neq 0$ なので, $\lambda = 1$ は常に $F(\lambda) = 0$ の単根である。

実際

$$F(\lambda) = (\lambda - 1)\{\lambda^k + ae^{i\theta}(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \cdots + 1)\}$$

である。ゆえに, 以下では

$$(6) \quad f(a, \lambda) \equiv \lambda^k + ae^{i\theta}(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \cdots + 1) = 0$$

の根を調べる。

Proposition 1. λ を単位円周上にある (6) の根とすると λ と a の値はそれぞれ

$$(7) \quad \lambda = e^{i\omega_m}, \quad \text{where } \omega_m = \frac{2(\theta + m\pi)}{k+1},$$

$$(8) \quad a_m = \frac{\sin(\omega_m/2)}{\sin(\omega_m/2 - \theta)}$$

for some $m = -[\frac{k+1}{2}], \dots, -1, 0, 1, \dots, [\frac{k}{2}]$ と表せる (ただし $[\cdot]$ はガウス記号)。

逆に, a が (8) で与えられると $\lambda = e^{i\omega_m}$ は (6) の根である。

Proof. λ を単位円周上にある (6) の根とすると, $\lambda \neq 1$ より

$$\lambda^k + ae^{i\theta} \frac{\lambda^k - 1}{\lambda - 1} = 0$$

である。 $\lambda^k \neq 1$ なので

$$(9) \quad -a = \frac{\lambda^k(\lambda - 1)}{e^{i\theta}(\lambda^k - 1)}$$

とできる。両辺の共役をとると, $\bar{\lambda} = 1/\lambda$ より

$$(10) \quad -a = \frac{\bar{\lambda}^k(\bar{\lambda} - 1)}{e^{-i\theta}(\bar{\lambda}^k - 1)} = \frac{e^{i\theta}(1/\lambda^k)(1/\lambda - 1)}{1/\lambda^k - 1} = \frac{e^{i\theta}(1/\lambda - 1)}{1 - \lambda^k} = \frac{e^{i\theta}(\lambda - 1)}{\lambda(\lambda^k - 1)}$$

が成り立つ。(9) と (10) より a を消去すると

$$\frac{\lambda^k(\lambda - 1)}{e^{i\theta}(\lambda^k - 1)} = \frac{e^{i\theta}(\lambda - 1)}{\lambda(\lambda^k - 1)}$$

これより $\lambda^{k+1} = e^{2i\theta}$, 即ち

$$\lambda = e^{i\omega_m} \quad \text{where } \omega_m = \frac{2\theta + 2m\pi}{k+1}, \quad m = -[\frac{k+1}{2}], \dots, -1, 0, 1, \dots, [\frac{k}{2}]$$

と表せる。このとき

$$\begin{aligned} a &= -\frac{e^{i\theta}(\lambda - 1)}{\lambda(\lambda^k - 1)} = -\frac{e^{i\theta}(\lambda - 1)}{e^{2i\theta} - \lambda} = \frac{\lambda^{1/2} - \lambda^{-1/2}}{e^{-i\theta}\lambda^{1/2} - e^{i\theta}\lambda^{-1/2}} \\ &= \frac{e^{i(\omega_m/2)} - e^{-i(\omega_m/2)}}{e^{i(\omega_m/2 - \theta)} - e^{-i(\omega_m/2 - \theta)}} = \frac{\sin(\omega_m/2)}{\sin(\omega_m/2 - \theta)} \equiv a_m \end{aligned}$$

を得る。

逆に, a が (8) で与えられるとき, $\lambda = e^{i\omega_m}$ は (6) の根であることは明らか。 $\square$

Proposition 2. (8) で定まる a_m について $a_m > 0$ の中での最小値と $a_m < 0$ の中での最大値はそれぞれ次の通り：

$$\frac{\sin \frac{\pi - \theta}{k+1}}{\sin \frac{k(\pi - \theta)}{k+1}} > 0, \quad -\frac{\sin \frac{\theta}{k+1}}{\sin \frac{k\theta}{k+1}} < 0$$

Proof.

$$h(x) = \frac{\sin(x/2)}{\sin(x/2 - \theta)} \quad (-\pi < x \leq \pi, x \neq 2\theta)$$

とおくと $h(0) = 0$, h : 周期 2π , かつ

$$h'(x) = -\frac{\sin \theta}{2 \sin^2(x/2 - \theta)} < 0$$

より h は単調減少である。ここで,

$$\omega_{-\lceil \frac{k+1}{2} \rceil} < \cdots < \omega_{-1} < 0 < \omega_0 < \cdots < \omega_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$$

に注意すると, $a_m > 0$ の中で a_{-1} が最小値であり, $a_m < 0$ の中で a_0 が最大値である。それぞれの値は

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{\sin \frac{\theta - \pi}{k+1}}{\sin \left(\frac{\theta - \pi}{k+1} - \theta \right)} = \frac{\sin \frac{\pi - \theta}{k+1}}{\sin \left(\theta - \frac{\theta - \pi}{k+1} \right)} = \frac{\sin \frac{\pi - \theta}{k+1}}{\sin \frac{k\theta + \pi}{k+1}} = \frac{\sin \frac{\pi - \theta}{k+1}}{\sin \frac{k(\pi - \theta)}{k+1}} \\ a_0 &= \frac{\sin \frac{\theta}{k+1}}{\sin \left(\frac{\theta}{k+1} - \theta \right)} = \frac{\sin \frac{\theta}{k+1}}{\sin \frac{-k\theta}{k+1}} = -\frac{\sin \frac{\theta}{k+1}}{\sin \frac{k\theta}{k+1}} \end{aligned}$$

となる。 □

Proposition 3. 単位円周上にある (6) の全ての根は単根である。

Proof. λ を単位円周上にある (6) の根とすると $\lambda \neq 1$ かつ $\lambda^k \neq 1$ である。(9) を用いると

$$\begin{aligned} (11) \quad \frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial \lambda} &= k\lambda^{k-1} + ae^{i\theta} \frac{k\lambda^{k-1}(\lambda - 1) - (\lambda^k - 1)}{(\lambda - 1)^2} \\ &= k\lambda^{k-1} - \frac{\lambda^k(\lambda - 1)}{\lambda^k - 1} \cdot \frac{k\lambda^{k-1}(\lambda - 1) - (\lambda^k - 1)}{(\lambda - 1)^2} \\ &= \frac{\lambda^{k-1}\{\lambda^{k+1} - (k+1)\lambda + k\}}{(\lambda^k - 1)(\lambda - 1)} \end{aligned}$$

が成り立つ。もし $\frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$ とすると

$$\lambda^{k+1} - (k+1)\lambda + k = 0$$

である。ここで, $\bar{\lambda} = 1/\lambda$ より $1/\lambda^{k+1} - (k+1)/\lambda + k = 0$, 即ち

$$k\lambda^{k+1} - (k+1)\lambda^k + 1 = 0$$

も成立している。このとき, 上の2式を辺々加えると

$$(k+1)\lambda^{k+1} - (k+1)\lambda^k - (k+1)\lambda + k + 1 = 0$$

$$\therefore (k+1)(\lambda - 1)(\lambda^k - 1) = 0$$

となる。 $\lambda \neq 1$ かつ $\lambda^k \neq 1$ なので、これは矛盾。以上より

$$\left. \frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=e^{i\omega_m}} \neq 0$$

を得る。 □

Proposition 4. $|a|$ を増加させると、単位円周上にある (6) の全ての根の絶対値は増加する。

Proof. まず、(6) の根 $\lambda = \lambda(a)$ を $a \in \mathbb{C}$ の正則関数とみなすと、Proposition 3 と陰関数定理より、各 $a = a_m$ の近傍で

$$(12) \quad \frac{d\lambda}{da} = - \frac{\frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial a}}{\frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial \lambda}}$$

が存在している。今 $\lambda = re^{i\omega}$ と極表示すると

$$(13) \quad \frac{d\lambda}{da} = \frac{\lambda}{r} \left(\frac{dr}{da} + ir \frac{d\omega}{da} \right)$$

である。よって、 a が実数の範囲を動くとき、(12) と (13) より

$$\frac{dr}{da} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{r}{\lambda} \frac{d\lambda}{da} \right\} = \frac{r}{\left| \frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial \lambda} \right|^2} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial a} \cdot \overline{\frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial \lambda}} \right\}$$

と表せる。ここで、

$$\frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial a} = e^{i\theta} \frac{\lambda^k - 1}{\lambda - 1} = -\frac{\lambda^k}{a}$$

なので、これと (11) を用いると

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial a} \cdot \overline{\frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial \lambda}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial a} \cdot \overline{\frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial \lambda}} - \lambda \cdot \frac{\overline{\partial f(a, \lambda)}}{\partial a} \cdot \frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial \lambda} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{a} \cdot \frac{\bar{\lambda}^{k-1} \{ \bar{\lambda}^{k+1} - (k+1)\bar{\lambda} + k \}}{(\bar{\lambda}^k - 1)(\bar{\lambda} - 1)} + \lambda \cdot \frac{\bar{\lambda}^k}{a} \cdot \frac{\lambda^{k-1} \{ \lambda^{k+1} - (k+1)\lambda + k \}}{(\lambda^k - 1)(\lambda - 1)} \right\} \\ &= \frac{1}{2a} \left\{ \frac{k\lambda^{k+1} - (k+1)\lambda^k + 1}{(\lambda^k - 1)(\lambda - 1)} + \frac{\lambda^{k+1} - (k+1)\lambda + k}{(\lambda^k - 1)(\lambda - 1)} \right\} \\ &= \frac{k+1}{2a} \end{aligned}$$

が成り立つ。従って

$$\left. \frac{d\lambda}{da} \right|_{a=a_m} = \frac{(k+1)r}{2a_m \left| \frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial \lambda} \right|^2}$$

となり、Proposition 4 の主張が成り立つ。 □

Proof of Lemma 1. Remark 2 より $f(\lambda)\overline{f(\bar{\lambda})} = 0$ の根 λ の分類をすればよい。

(i) $a_0 < a < a_{-1}$ の場合。 $a = 0$ のとき $\lambda = 0$ ($2k$ 重根) である。よって Proposition 2 と根 λ の a に関する連続性より $a_0 < a < a_{-1}$ ならば $|\lambda| < 1$ for all λ である。

(ii) $a = a_0$ の場合。 Propositions 1 and 2 より $\lambda = e^{i\omega_0}$ だけが $|\lambda| \geq 1$ を満たす $f(\lambda) = 0$ の根である。 Proposition 3 より $\lambda = e^{i\omega_0}$ は単根である。また $\lambda = e^{-i\omega_0}$ だけが $|\lambda| \geq 1$ を満たす $\overline{f(\lambda)} = 0$ の根であり、単根になっている。

(iii) $a = a_{-1}$ の場合。(ii) と同様にして $\lambda = e^{\pm i\omega_{-1}}$ だけが $|\lambda| \geq 1$ を満たしており、それぞれ単根である。

(iv) $a < a_0$ または $a > a_{-1}$ の場合。 Proposition 4 より $|\lambda| > 1$ for some λ である。 $\square$

行列 A が (II) または (III) の場合、Lemma 1 と同様にして次の結果が成り立つ。

Lemma 2. A が (II) の場合を考える。

- (i) $-\frac{1}{k} < a_1 < 1$ かつ $-\frac{1}{k} < a_2 < 1$ ならば、(5) の根は $\lambda = 1$ (2 重), その他は $|\lambda| < 1$ である。
- (ii) $a_1 = 1$ かつ $a_2 = 1$ ならば、(5) の根は $\lambda = e^{i\frac{2l\pi}{k+1}}$ (2 重) ($l = 0, \dots, k$) となる。 ($|\lambda| = 1$)
- (iii) $a_1 = -\frac{1}{k}$ かつ $a_2 = -\frac{1}{k}$ ならば、(5) の根は $\lambda = 1$ (4 重), その他は $|\lambda| < 1$ である。
- (iv) $\exists j: a_j < -\frac{1}{k}$ または $a_j > 1$ ならば、 $|\lambda| > 1$ となる (5) の根がある。

Lemma 3. A が (III) の場合を考える。

- (i) $-\frac{1}{k} < a < 1$ ならば、(5) の根は $\lambda = 1$ (2 重), その他は $|\lambda| < 1$ である。
- (ii) $a = 1$ ならば、(5) の根は $\lambda = e^{i\frac{2l\pi}{k+1}}$ (2 重) ($l = 0, 1, \dots, k$) となる。 ($|\lambda| = 1$)
- (iii) $a = -\frac{1}{k}$ ならば、(5) の根は $\lambda = 1$ (4 重), その他は $|\lambda| < 1$ である。
- (iv) $a < -\frac{1}{k}$ または $a > 1$ ならば、 $|\lambda| > 1$ となる (5) の根がある。

4. 主結果

この節では、(1) の解がある定点や周期点に漸近する際の具体的表現を与える。

Theorem 1. A が (I) の場合を考える。

- (i) $a_0 < a < a_{-1}$ ならば、(1) の解 x_n はある定点 b に近づく。

ただし、 $b = (I + kA)^{-1}(x_0 + A \sum_{j=1}^k x_{-j})$ である。

- (ii) $a = a_0$ または $a = a_{-1}$ ならば、(1) の解 x_n はある周期点 x_n^* に近づく。

$$\text{ただし, } x_n^* = b + \begin{pmatrix} \cos n\omega & -\sin n\omega \\ \sin n\omega & \cos n\omega \end{pmatrix} c, \quad \omega = \begin{cases} \omega_0 & (a = a_0) \\ \omega_{-1} & (a = a_{-1}) \end{cases}$$

$$b = (I + kA)^{-1} \left(x_0 + A \sum_{j=1}^k x_{-j} \right),$$

$$c = (I + kA^T)^{-1} \left(x_0 + A^T \sum_{j=1}^k \begin{pmatrix} \cos j\omega & -\sin j\omega \\ \sin j\omega & \cos j\omega \end{pmatrix} x_{-j} \right)$$

である。

(iii) $a < a_0$ または $a > a_{-1}$ ならば, (1) は発散する解をもつ。

Proof. $\lambda = 1$ は常に $\hat{A}$ の固有値である。 $\lambda = 1$ のとき, $\text{rank}(\lambda I - \hat{A}) = m - 2$ なので, 固有空間の次元は 2 となる。ここで, $\hat{A}\phi = \lambda\phi$ を満たす固有ベクトル ϕ は

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。また, $\psi\hat{A} = \lambda\psi$ を満たす固有ベクトル ψ は

$$\psi_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{11}, a_{12}, 1, 0), \quad \psi_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{21}, a_{22}, 0, 1)$$

である (ただし a_{jl} は A の (j, l) 成分)。

(i) $a_0 < a < a_{-1}$ の場合。Lemma 1 (i) より $\lambda = 1$ の重複度は 2 である。このとき

$$y_n = b_1 1^n \phi_1 + b_2 1^n \phi_2 + \underbrace{\dots}_{|\lambda_j| < 1}$$

と表せるので, (1) の解 x_n は (n : 十分大のとき)

$$b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

に漸近する。よって $b = (b_1, b_2)^T$ を求めよう。 $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$, $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ とおくと (3) より

$$y_0 = b_1 \phi_1 + b_2 \phi_2 + \underbrace{\dots}_{\lambda \neq 1 \text{ なる固有空間の基底}} = \Phi b + \dots$$

である。この両辺に左から $(\Psi\Phi)^{-1}\Psi$ をかけると

$$(14) \quad b = (\Psi\Phi)^{-1}\Psi y_0 = (I + kA)^{-1} \left(x_0 + \sum_{j=1}^k Ax_{-j} \right)$$

となる。

(ii) $a = a_0$ の場合を考える ($a = a_{-1}$ の場合も同様にしてできる)。(1) の解 x_n の $\lambda = 1$ に関する成分は (14) で与えられる。よって $\lambda = e^{\pm i\omega_0}$ に関する固有ベクトルと成分を求めよう。

$\lambda = e^{i\omega_0}$ に属する固有ベクトルは

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} \lambda^{-k} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \lambda^0 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad \text{および} \quad \psi_1 = (\lambda^k a e^{-i\theta}(1, i), \dots, \lambda^1 a e^{-i\theta}(1, i), (1, i))$$

である。また、 $\lambda = e^{-i\omega_0} = \overline{e^{i\omega_0}}$ に属する固有ベクトルは $\phi_2 = \overline{\phi_1}$ および $\psi_2 = \overline{\psi_1}$ である。

よって、 $\tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}$ とおくと

$$y_n = \tilde{b} + c_1 e^{in\omega_0} \phi_1 + c_2 e^{-in\omega_0} \phi_2 + \underbrace{\dots}_{|\lambda_j| < 1} = \tilde{b} + 2 \operatorname{Re}(c_1 e^{in\omega_0} \phi_1) + \dots$$

と表せる。従って (1) の解 x_n は (n : 十分大のとき)

$$\begin{aligned} (15) \quad x_n^* &= b + 2 \operatorname{Re} \left\{ c_1 e^{in\omega_0} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\} \\ &= b + 2 \operatorname{Re} c_1 \operatorname{Re} \left\{ e^{in\omega_0} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\} - 2 \operatorname{Im} c_1 \operatorname{Im} \left\{ e^{in\omega_0} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\} \\ &= b + 2 \operatorname{Re} c_1 \begin{pmatrix} \cos n\omega_0 \\ \sin n\omega_0 \end{pmatrix} - 2 \operatorname{Im} c_1 \begin{pmatrix} \sin n\omega_0 \\ -\cos n\omega_0 \end{pmatrix} \\ &= b + \begin{pmatrix} \cos n\omega_0 & -\sin n\omega_0 \\ \sin n\omega_0 & \cos n\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Re} c_1 \\ 2 \operatorname{Im} c_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

に漸近する。そこで $c = (2 \operatorname{Re} c_1, 2 \operatorname{Im} c_1)^T$ を求めよう。(4) より

$$\begin{aligned} c &= \begin{pmatrix} c_1 + \overline{c_1} \\ (c_1 - \overline{c_1})/i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\psi_1 \phi_1)^{-1} \psi_1 y_0 + (\overline{\psi_1 \phi_1})^{-1} \overline{\psi_1} y_0 \\ (\psi_1 \phi_1)^{-1} \psi_1 y_0 / i + (\overline{\psi_1 \phi_1})^{-1} (-\overline{\psi_1} y_0 / i) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|\psi_1 \phi_1|^2} \begin{pmatrix} \overline{\psi_1 \phi_1} \psi_1 y_0 + \psi_1 \phi_1 \overline{\psi_1} y_0 \\ \overline{\psi_1 \phi_1} \psi_1 y_0 / i + \psi_1 \phi_1 (-\overline{\psi_1} y_0 / i) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(\operatorname{Re} \psi_1 \phi_1)^2 + (\operatorname{Im} \psi_1 \phi_1)^2} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \psi_1 \phi_1 & \operatorname{Im} \psi_1 \phi_1 \\ -\operatorname{Im} \psi_1 \phi_1 & \operatorname{Re} \psi_1 \phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 y_0 + \overline{\psi_1} y_0 \\ \psi_1 y_0 / i - \overline{\psi_1} y_0 / i \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \psi_1 \phi_1 & -\operatorname{Im} \psi_1 \phi_1 \\ \operatorname{Im} \psi_1 \phi_1 & \operatorname{Re} \psi_1 \phi_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \psi_1 y_0 \\ \operatorname{Im} \psi_1 y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、 ϕ_1, ψ_1 の定め方より $\psi_1 \phi_1 = 2(1 + k a e^{-i\theta})$ なので

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \psi_1 \phi_1 & -\operatorname{Im} \psi_1 \phi_1 \\ \operatorname{Im} \psi_1 \phi_1 & \operatorname{Re} \psi_1 \phi_1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 2(1 + k a \cos(-\theta)) & -2 k a \sin(-\theta) \\ 2 k a \sin(-\theta) & 2(1 + k a \cos(-\theta)) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} (I + k A^T)^{-1} \end{aligned}$$

である。また, $\psi_1 y_0 = (1, i)x_0 + a \sum_{j=1}^k (e^{i(j\omega_0 - \theta)}, ie^{i(j\omega_0 - \theta)})x_{-j}$ より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \psi_1 y_0 \\ \operatorname{Im} \psi_1 y_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1, 0)x_0 + a \sum_{j=1}^k (\cos(j\omega_0 - \theta), -\sin(j\omega_0 - \theta))x_{-j} \\ (0, 1)x_0 + a \sum_{j=1}^k (\sin(j\omega_0 - \theta), \cos(j\omega_0 - \theta))x_{-j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_0 + a \sum_{j=1}^k \begin{pmatrix} \cos(j\omega_0 - \theta) & -\sin(j\omega_0 - \theta) \\ \sin(j\omega_0 - \theta) & \cos(j\omega_0 - \theta) \end{pmatrix} x_{-j} \\ x_0 + a \sum_{j=1}^k \begin{pmatrix} \cos(j\omega_0 - \theta) & -\sin(j\omega_0 - \theta) \\ \sin(j\omega_0 - \theta) & \cos(j\omega_0 - \theta) \end{pmatrix} x_{-j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_0 + A^T \sum_{j=1}^k \begin{pmatrix} \cos j\omega_0 & -\sin j\omega_0 \\ \sin j\omega_0 & \cos j\omega_0 \end{pmatrix} x_{-j} \\ x_0 + A^T \sum_{j=1}^k \begin{pmatrix} \cos j\omega_0 & -\sin j\omega_0 \\ \sin j\omega_0 & \cos j\omega_0 \end{pmatrix} x_{-j} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ。ゆえに

$$(16) \quad c = (I + kA^T)^{-1} \begin{pmatrix} x_0 + A^T \sum_{j=1}^k \begin{pmatrix} \cos j\omega_0 & -\sin j\omega_0 \\ \sin j\omega_0 & \cos j\omega_0 \end{pmatrix} x_{-j} \\ x_0 + A^T \sum_{j=1}^k \begin{pmatrix} \cos j\omega_0 & -\sin j\omega_0 \\ \sin j\omega_0 & \cos j\omega_0 \end{pmatrix} x_{-j} \end{pmatrix}$$

を得る。

(iii) $a < a_0$ または $a > a_{-1}$ の場合。Lemma 1 (iv) より $|\lambda| > 1$ となる特性根があるので, (1) は発散する解をもつ。□

Theorem 1 と同様にして, A が対角行列または三角行列の場合, 次の結果が得られる。

Theorem 2. A が (II) の場合を考える。

(i) $-\frac{1}{k} < a_1 < 1$ かつ $-\frac{1}{k} < a_2 < 1$ ならば, (1) の解 x_n はある定点 b に近づく。

ただし, $b = (I + kA)^{-1}(x_0 + A \sum_{j=1}^k x_{-j})$ である。

(ii) $a_1 = 1$ かつ $a_2 = 1$ ならば, (1) の解 x_n は $(k+1)$ -周期解 x_n^* となる。

ただし, $x_n^* = \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^k \sum_{j=0}^k \cos\left(\frac{2l(n+j)\pi}{k+1}\right) x_{-j}$ である。

(iii) $\exists j: a_j \leq -\frac{1}{k}$ または $a_j > 1$ ならば, (1) は発散する解をもつ。

Theorem 3. A が (III) の場合を考える。

(i) $-\frac{1}{k} < a < 1$ ならば, (1) の解 x_n はある定点 b に近づく。

ただし, $b = (I + kA)^{-1}(x_0 + A \sum_{j=1}^k x_{-j})$ である。

(ii) $a \leq -\frac{1}{k}$ または $a \geq 1$ ならば, (1) は発散する解をもつ。

5. 付録 (一様分布)

最後に、行列 A が (I) の場合、方程式 (1) の解 x_n の漸近する様子を別の視点から考察しよう。以下では、方程式 (1) を複素数値差分方程式

$$(17) \quad z_{n+1} - z_n + ae^{i\theta}(z_n - z_{n-k}) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

として考える。ここで $a \in \mathbf{R}$, $0 < |\theta| \leq \pi/2$, $k \in \mathbf{N}$ で、初期値を $z_{-k}, \dots, z_0 \in \mathbf{C}$ とする。また、(17) の特性方程式は $F(\lambda) = 0$ である。このとき、次の結果が成り立つ。

Theorem 4. a_0, a_{-1} はそれぞれ3節で与えられた値とし、 β を次のように定める：

$$\beta = (1 + kae^{i\theta})^{-1} (z_0 + ae^{i\theta} \sum_{j=1}^k z_{-j})$$

- (i) $a_0 < a < a_{-1}$ ならば、(17) の解 z_n は定点 β に近づく。
- (ii) $a = a_0$ または $a = a_{-1}$ の場合。
 - (a) θ/π が有理数ならば、(17) の解 z_n は定点 β を中心とする円の等分点に近づく。
 - (b) θ/π が無理数ならば、数列 $\{\arg(z_n - \beta)\}$ は区間 $[0, 2\pi)$ 上で一様分布する。

ここで、 $0 \leq p_n < 2\pi$ を満たす数列 $\{p_n\}$ が区間 $[0, 2\pi)$ 上で一様分布するとは、任意の実数 p, q ($0 \leq p \leq q < 2\pi$) に対して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card}\{n \mid p \leq p_n \leq q, 1 \leq n \leq N\} = \frac{q-p}{2\pi}$$

が成り立つときに言う。

Theorem 4 の証明は、紙面の関係上省略するが、(ii)-(b) の一様分布を証明する際、次の Weyl の判定法を用いる： $0 \leq p_n < 2\pi$ を満たす数列 $\{p_n\}$ が任意の整数 $m (\neq 0)$ に対して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{imp_n} = 0$$

ならば、数列 $\{p_n\}$ が区間 $[0, 2\pi)$ 上で一様分布する。

参考文献

- [1] R. P. Agarwal, M. Pituk, Convergence to equilibria in recurrence equations, Advances in difference equations II, *Comput. Math. Appl.* **36** (1998), no. 10-12, 357-368.
- [2] R. D. Driver, G. Ladas and P. N. Vlahos, Asymptotic behavior of a linear delay difference equation, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115** (1992), 105-112.
- [3] K. Murakami, Asymptotic constancy and periodic solutions for linear autonomous delay differential equations, *Funkcial. Ekvac.* **39** (1996), 519-540.