

Rank Reducing Matrix Norms

北海道教育大札幌校 大久保 和義 (Kazuyoshi Okubo)

Mathematics Laboratory,
Hokkaido Univ. of Education

Joint work with H.J.Woerdeman (The College of William and Mary)

1. はじめに

R_p でランクが p 以下の行列全体の集合を表す, すなわち,

$$R_p := \{X \in M_{mn} \mid \text{rank}(X) \leq p\}$$

とする。行列空間 M_{mn} 上のノルム $\|\cdot\|$ に対して、 M の p th 近似 を

$$d_{\|\cdot\|}(M, R_p) := \min\{\|M - X\| : X \in R_p\}$$

で定義する。よく知られていることとして、 M_n 上のスペクトルノルム $\|\cdot\|_\infty$ に対しては、 $d_{\|\cdot\|_\infty}(M, R_p) := s_{p+1}(M)$ (ただし、 $s_i(M)$ は M の i 番に大きい singular value) となる。

$$P_{R_p}(M) = \{X \in R_p \mid \|M - X\| = d_{\|\cdot\|}(M, R_p)\}$$

とする。 M_{mn} 上のノルム $\|\cdot\|$ また、 $M \in M_{mn}$ に対して $M_p \in P_{R_p}(M)$ で $\text{rank}(M - M_p) = \max\{\text{rank} M - p, 0\}$ ととれるとき、 $\|\cdot\|$ は rank p reducing と呼ばれる。また、すべての $1 \leq p \leq \min\{m, n\}$ に対して p reducing のとき、 $\|\cdot\|$ は rank reducing と呼ばれる。

M_{mn} 上の norm $\|\cdot\|$ が unitarily invariant とは

$$\|UMV\| = \|M\|$$

がすべての $M \in M_{mn}$ とすべての unitary matrices $U \in M_m, V \in M_n$ に対して成り立つとする。

Unitarily invariant norm は symmetric gauge function Φ を用いて

$$\|M\| = \Phi(s_1(M), s_2(M), \dots, s_{\min(m,n)}(M))$$

で表すことができ、これを使うと実際には、 M_n 上の unitarily invariant norm は、rank reducing であることがわかる。

$\|\cdot\|$ を M_{mn} 上の operator norm とする。すなわち、 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ をそれぞれ、 $\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n$ 上のノルムとして $\|\cdot\|$ を

$$\|M\| = \max_{\|x\|_2=1} \|Mx\|_1$$

で定義する。 $\|\cdot\|$ が rank reducing かどうかという問題は、 $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$ の部分空間上への “metric projection” が “linear selection” をもつかという問題に関係する。本講演では、これらの問題に関する結果、特に、numerical radius に関する近似に関する結果について紹介する。

2. 結果

$(V, \|\cdot\|_V)$: Banach space, $W \subset V$: subspace とする。 W が *proximal* (resp. *Chebyshev*) とは $\forall v \in V$,

$$\Pi_W(v) := \{y \in W : \|v - y\|_V = \inf_{w \in W} \|v - w\|_V\} \neq \emptyset \text{ (resp. a singleton)}$$

であることとする。

$\Pi_W : V \rightarrow 2^W$ は *metric projection* と呼ばれる。

また、 $\Pi_W : V \rightarrow 2^W$ が *metric projection* であるとして、

$P : V \rightarrow W$ が *selection for Π_W* であるとは、

$\Leftrightarrow^{def}$

$P(v) \in \Pi_W(v)$ for $\forall v \in V$ であることとする。

P が *linear selection for Π_W* とは、

$\Leftrightarrow^{def}$

P が *selection* かつ *linear* であることとする。

Hilbert space では *selection* として W 上の orthogonal projection だけなので、それは *linear selection* である。

$3 \leq \dim V < \infty$ のときは逆もいえる。すなわち、すべての部分空間に対して *metric projection* が *linear selection* をもつときはその空間は Hilbert space に isometric である。[Stoer (1967)].

実際には次のようにもっと強いことがいえる。

もし、 $3 \leq \dim V < \infty$ として、次元 p の部分空間すべてに対して *metric projection* が *linear selection* をもつとするような p ($p \leq \dim V - 2$) が存在すれば、 V は Hilbert space に isometric である。[D. Amir (1986)].

さらに、codimension 1 のいかなる部分空間の *metric projection* もは *linear selection* をもつことが知られている。[N. Aronszajn and K.T. Smith (1954), F. Deutsch

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{C}^n$ に対して $|x| := (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)^t$ とする。
 $\|\cdot\|$ が $\mathbb{C}^n$ 上の *absolute norm* とは
 $\Leftrightarrow^{def}$
 $\|x\| = \||x|\|$ を満たすこととする。

$\|\cdot\|$: operator matrix norm が *absolute* とは,
 $\Leftrightarrow^{def}$

The image space のノルムが *absolute vector norm* のときとする。

Lemma 1. $\|\cdot\|$ を M_{mn} 上の *absolute operator norm* とする。もし, $\text{rank} M \geq p$ ならば M は *rank p の closest rank $\leq p$ approximant* をもつ。

Theorem 2. $\|\cdot\|$ を M_{mn} 上の *absolute operator norm* とすると, $\|\cdot\|$ は *rank $m-1$ reducing norm* である。

Proof. $M \in M_{mn}$ で $\text{rank} M = m$ としてよい。Lemma 1 から, $\|\cdot\|$ が *absolute operator norm* とすると $\exists A \in M_{mn}$ で次の条件を満たす。

$$1 \quad \text{rank} A = m-1$$

$$2 \quad \|A - M\| = d_{\|\cdot\|}(M, R_{m-1})$$

$N := \text{Im}(A)$ とすると, $\text{codim}(N) = 1$, すなわち, Π_N は *linear selection* をもつ。従って, $\exists P; N$ 上の *linear projection* で

$$\|x - Px\|_1 = \inf_{n \in N} \|x - n\|_1 \quad (x \in \mathbb{C}^n)$$

を満たす。このとき, $\|M - PM\| = d_{\|\cdot\|}(M, R_{m-1})$ かつ, $\text{rank}(M - PM) = 1$ となる。

Corollary 3. (B.I. Wainberg and H. J. Woerdeman)

$\|\cdot\|$ を M_n 上の *maximum row length norm* とする。 $1 \leq k, l \leq n$ として $Q = \{Q = (q_{ij}) \in M_n(R) \mid q_{ij} = 0 \text{ (} i > l \text{ or } j > k \text{)}\}$ とする。このとき, $M \in M_n(R)$ に対して, M の *singularity radius* $\mu_{Q, \|\cdot\|}(M) = \min_{\Delta \in \sigma_Q(M)} \|\Delta\|$ は $\text{rank}(\Delta) = 1$ で得られる。ここで, $\sigma_Q(M) = \{\Delta \in Q \mid \det(M - \Delta) = 0\}$ とする。

Theorem 4. $\|\cdot\|_1$ が *inner product norm* ならば, *operator norm* は *rank reducing* である。

Theorem 5 (Yu. I. Lyubich). $n \geq 3$ として, $\|\cdot\|$ を $\mathbb{C}^n$ 上の *norm* によって induce された M_n 上の *operator norm* とする。このとき, $d_{\|\cdot\|}(I, R_p) = \|I - X\|$ となるような *rank p の matrix X* が存在するための必要十分条件は *rank $n-p$ の norm 1 projection P* が存在することである。

Proof. $\Rightarrow$) $X := I - P$ とおくとよい。

$Q := 1 - X$ とおく。このとき, $\dim \operatorname{Ker} Q = n - p$, かつ $\operatorname{Ker} Q = \{x \in C^n \mid Qx = x\}$ で, $\|Q\| = 1$ から, $\exists P : \operatorname{Ker} X$ 上の projection で $\|P\| = 1$ となる。実際, Ergodic Theorem から

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k Q^j$$

であり, $\operatorname{rank} P = n - p$ となる。

Remark 6. *Operator matrix norm* は必ずしも *rank p reducing* でない。

Example $\mathbb{R}^3$ で $\|\cdot\|'$ を単位球を正 12 面体とする norm とする。このとき, $\|P\| = 1$ かつ $\operatorname{rank} P = 2$ なる projection は存在しない。[Singer(1970)]
したがって, $\|\cdot\|$ を $\|\cdot\|'$ で induce された M_3 上の norm とすると, $\|I - X\| = d_{\|\cdot\|}(I, R_1)$ ならば, $X = 0$ であることが分かる。

[数域半径の場合]

Let $A \in M_n$. $W(A)$ で A の数域

$$W(A) = \{\langle Ax, x \rangle \mid \|x\| = 1\}$$

を表し $w(A)$ で A の数域半径

$$w(A) = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$$

を表す。

また,

$$d_w(M, R_p) = \min\{w(M - X) : X \in R_p\}$$

とする。

数域半径に関しては次のことは知られている。[H(1968)]

(1) $w(U^*AU) = w(A)$ (unitary similarity invariant).

(2)

$$w\left(\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \leq w\left(\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\right) \leq w\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{22} \end{bmatrix}\right).$$

(3) $\frac{1}{2}\|A\|_\infty \leq w(A) \leq \|A\|_\infty$.

By (3) から,

$$\frac{1}{2}s_{p+1}(A) \leq d_w(A, R_p) \leq s_{p+1}(A)$$

であることは分かる。

Lemma 7. p を自然数として, $M \in M_n$ を $\text{rank} M \geq p$ を満たすとする。このとき, 数域半径に関して, $\text{rank} X = p$ なる M の *closest rank $\leq p$ approximant* X が存在する。

Proof. $p \in \{1, \dots, n\}$ としよう。仮に $d_w(M, R_{p-1}) < d_w(M, R_p)$ ならよい。 $d_w(M, R_{p-1}) = d_w(M, R_p)$ とする。 $X \in R_p$ を $w(\cdot)$ に関する M の *closest rank $\leq p$ approximant* とする。

$$U^*(M - X)U = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

となるような, unitary matrix $U \in M_n$ が存在する。ここで, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ は $M - X$ の固有値である。 Y_i を $U^*(M - X)U$ の始めの i 行を保ち, 後の行を 0 とする行列として, $X_i = X + UY_iU^*$ とする。このとき,

$$w \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \leq w \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \leq w \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = w(A)$$

だから,

$$w(M - X_i) \leq w(M - X) = d_w(M, R_p)$$

がすべての $i \in \{0, \dots, n\}$ についていえる。 $\text{rank} X_i$ と $\text{rank} X_{i+1}$ の差は高々 1 で, $\text{rank} X_0 \leq p$, $\text{rank} X_n = \text{rank} M \geq p$ だから, ある $i \in \{0, \dots, n\}$ で $\text{rank} X_i = p$ を得る。

Theorem 8. M_n 上の数域半径は *rank $n - 1$ reducing* である。

Proof. Theorem 2 のようにできる。

Lemma 9. $A \in M_n$ とすると $d_w(A, R_{n-1}) \geq \text{dist}(0, W(A))$ である。ただし, $\text{dist}(\alpha, Q)$ は α から集合 $Q \subset \mathbb{C}$ への距離を表す。

Theorem 10. A を固有値が $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0 \geq -\lambda_{k+1} \geq \dots \geq -\lambda_n$, $\lambda_1, \lambda_n \neq 0$ となるエルミート行列とする。このとき,

$$d_w(A, R_1) = \max\{\lambda_2, \lambda_{n-1}, \frac{\lambda_1 \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}\}$$

ただし, $k = 1$ のとき, $\lambda_2 = 0$, $k = n - 1$ のとき, $\lambda_{n-1} = 0$ とする。

Proof. はじめに $n = 2$ の場合を考えよう。 $a, b > 0$ として $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$ とする。

A を rank が 1 の行列の和として

$$A = \begin{bmatrix} \frac{p}{-b(a-p)p} & -\frac{q}{b(a-p)} \\ -\frac{b(a-p)p}{aq} & \frac{q}{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a-p}{b(a-p)p} & -\frac{q}{a} \\ \frac{b(a-p)p}{aq} & -\frac{b}{ap} \end{bmatrix}$$

とする。 $X_1 = \begin{bmatrix} p & q \\ -\frac{b(a-p)p}{aq} & -\frac{b(a-p)}{a} \end{bmatrix}$ として, Theorem 8 から, $d_w(A, R_1) = \min_{p,q} w(X_1)$ となる。したがって, $\min_{p,q} w(X_1) = \frac{ab}{a+b}$ であることを示すとよい。 $w(X_1) \geq \min_p \max\{|p|, \frac{b(a-p)}{a}\}$ であることは簡単で, この最小値は $p = \frac{ab}{a+b}$ で得られる。これより, $w(X_1) \geq \frac{ab}{a+b}$ となるが, 一方, $q = -\frac{ab}{a+b}$ とすると, $X_1 = \frac{ab}{a+b} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ で

$$w(X_1) = \frac{ab}{a+b} w\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{ab}{a+b}$$

となる。

次に, $n \geq 3$ として $A \in M_n$ が定理の仮定を満たすとしよう。このとき, $\frac{\lambda_1 \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n} \leq \min\{\lambda_1, \lambda_n\}$ と $a \geq a' > 0, b \geq b' > 0$ ならば $\frac{a'b'}{a'+b'} \leq \frac{ab}{a+b}$ であることが分かる。また, 一般に, X' を X の principal submatrix とすると, $w(X) \geq w(X')$ だから,

$$\begin{aligned} d_w(A, R_1) &= \min_{X \in R_1} w(A - X) \\ &\geq \max_{A': 2 \times 2 \text{ principal submatrix of } A} \min_{X' \in R_1} w(A' - X') \\ &= \max\{\lambda_2, \lambda_{n-1}, \frac{\lambda_1 \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}\} \end{aligned}$$

となる。

一方, $A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_n \end{bmatrix}$ ならば, 2×2 行列の場合に還元し, $d_w(A', R_1) = w(A' - X') = \frac{\lambda_1 \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}$ となる。ここで, X' は A' の closest rank ≤ 1 approximant とする。 $X = X' \oplus 0 \in M_n$ とおくと, $X \in R_1$ で $w(A - X) = \max\{\lambda_2, \lambda_{n-1}, \frac{\lambda_1 \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}\}$ である。

Proposition 11. $a \in \mathbb{C}$ とする。 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ならば, $d_w(A, R_1) = \frac{1}{2} s_2(A) = \frac{1}{4}(\sqrt{4 + |a|^2} - |a|)$ である。

Proposition 12.

$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする。

$0 \leq a \leq 1$ ならば, $d_w(A, R_1) = 1 - \frac{a}{2}$ であり、

$a > 1$ ならば, $d_w(A, R_1) = \frac{1}{2a}$ である。

References

- [A] D. Amir, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Operator Theory: Adv. Appl. OT 20, Birkhäuser, Basel, 1986.
- [AS] N. Aronszajn and K. T. Smith, Invariant subspaces of completely continuous operators, *Ann. of Math.* **60** (1954), 345-350.

- [D] F. Deutsch, Linear selections for the metric projection, *J. Funct. Anal.* **49** (1982), 269-292.
- [H] J. A. R. Holbrook, On the power-bounded operators of Sz-Nagy and Foiaş, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **29** (1968), 299-310.
- [OW] K. Okubo and H. Woerdeman, Rank Reducing Matrix Norms, *Linear and Multilinear Algebra*, to appear.
- [Si] I. Singer, *Bases in Banach Spaces*, v.1, Springer-Verlag, 1970.
- [S] J. Stoer, Über die Existenz Linearer Approximationsoperatoren, in "Funktional-analysis Approximationstheorie, Numerische Mathematik" (L. Collatz, G. Meinardus, and H. Unger, Eds.), Birkhäuser, Basel, 1967.
- [WW] B. I. Wainberg and H. J. Woerdeman, The maximum row length nonsingularity radius, *Linear Algebra Appl.* **247** (1996), 251-263.