

熱対向流量量子乱流の渦糸法による数値計算

足立 洋之

Hiroyuki Adachi

大阪市立大学院理学研究科

Department of Physics, Osaka City University

2009 年 11 月 2 日

1 イントロダクション

量子乱流は約 50 年前に Vinen による超流動 ^4He の熱カウンタ一流の実験で初めて観測された [1]。以来多くの実験的、理論的または数値的な研究が有限温度の特有の現象である、熱カウンタ一流量子乱流に成功裏に捧げられてきた [2]。現在多くの研究者は絶対零度近傍の量子乱流をターゲットにしている [3]。その大きな要因として、絶対零度近傍の量子乱流と古典乱流との類似性が上げられる。驚くべきことに、絶対零度近傍の量子乱流が古典乱流においてもっとも重要な統計則である Kolmogorov 則に従うことが数値計算によって確かめられたのである [4]。一方で有限温度の量子乱流（熱カウンタ一流量子乱流など）は二流体モデルで記述され、古典乱流との対応はほとんど見られない。そのため有限温度での量子乱流は現在あまり熱心に研究されていない。しかしながら、有限温度の量子乱流の物理は完全に理解されたわけではなく、我々に残されている問題が無数にある。また近年、PIV(Particle Image Velocimetry) を用いて熱カウンタ一流の可視化が行わ

れ、非常に興味深い結果が得られている [5, 6]。これらの理由もあり、今正しい熱カウター流の理解が求められていると言える。実際、我々の熱カウター流に対する理解は必ずしも満足するものではない。以下では熱カウター流量子乱流についての解説と研究の歴史について言及しつつ、解決されていない点を明らかにしたい。

先にも触れたが、超流動 ^4He は粘性のない超流体と粘性を持つ常流体で構成され、それぞれは独立に運動するという二流体モデルで記述される [7]。一般的に常流体の密度と速度はそれぞれ ρ_n と v_n 、超流体の場合はそれぞれ ρ_s と v_s で表される。全密度は $\rho = \rho_s + \rho_n$ は温度にほとんど依存しないが、 ρ_s/ρ 、 ρ_n/ρ は強く温度に依存する。この超流動の系において、回転的な流れは全て循環が循環量子 $\kappa = h/m_4$ により量子化された量子渦により構成される。ここで h はプランク定数、 m_4 は ^4He 原子の質量である。

熱カウター流は超流動 ^4He 中の温度勾配によって引き起こされる内部対流であり、二流体モデルによって説明される現象である。二流体のうち常流体だけがエントロピーと熱を運ぶことができるので、常流体は高温側から低温側へ流れる。一方、超流体は運動量密度の保存則 $j = \rho_s v_s + \rho_n v_n = 0$ を満たすように、常流体とは反対に低温から高温へ流れる。このようにして超流体と常流体の間に相対速度 $\mathbf{v}_{ns} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ が生まれ熱カウター流が発生する。Gorter と Mellink は、超流動 ^4He がある臨界相対速度以上で二流体が独立でなくなることを発見した。二流体に働くこの相互作用を相互摩擦という [8]。Vinen は、この相互摩擦が、量子渦と常流体との相互作用によるものであることを明らかにし、Feynman によって提唱された量子渦が 3 次元的に複雑に絡まった量子乱流状態が実現していることを明らかにした [9]。

さらに Vinen は一様な熱カウター流中の乱流を仮定することで、渦糸長密度 L (単位体積当たりの渦糸の長さ) の時間発展方程式を

$$\frac{dL}{dt} = \alpha \chi_1 |\mathbf{v}_{ns}| L^{3/2} - \chi_2 \frac{\kappa}{2\pi} L^2 \quad (1)$$

と理論的に導いた [1]。ここで、 α 、 χ_1 、 χ_2 は温度に依存するパラメータである。右辺第一項は相互摩擦による渦へのエネルギー注入から、第二項は渦同士のリコネクションによるエネルギー散逸から求められ、それぞれ渦糸長密度の成長と減衰を表す。この両者が拮抗するところで、熱カウンタ一流量子乱流の統計的な定常状態が実現する。定常状態では渦糸長密度は時間変化しないので、式 (1) の左辺をゼロと置くと、

$$L = \gamma^2 v_{ns}^2 \quad (2)$$

が得られる。 γ は温度に依存するパラメータである。この定常状態での渦糸長密度の関係式は多くの熱カウンタ一流の実験で観測されている [2]。この Vinen による熱カウンタ一流の一連の研究の後、膨大な実験研究がおこなわれた。しかし、量子渦の運動は非線形および非局所的であるため、観測結果を量子渦の運動から直接理解することはできなかった。

この状況を打破したのが Schwarz である。Schwarz は渦糸法を用いて量子渦糸の 3 次元ダイナミクスの直接数値シミュレーションを行い、熱カウンタ一流で観測される渦糸長密度 L を相対速度 v_{ns} および温度の関数として求め、実験結果と定量的一致を得た [10]。こうして、Feynman 以来の、超流動乱流が両氏渦糸タングルから構成されているという描像が裏づけられたということになった。しかし、この Schwarz の金字塔とも言うべき数値計算には、実は 2 つの大きな欠陥がある。一つは「局所誘導近似 (LIA, Localized Induction Approximation)」が用いられていることである。次の章で詳細を述べるが、局所誘導近似とは渦間の相互作用を無視した近似である。Schwarz はほぼ等方的な量子乱流状態が実現している場合、渦間の相互作用はキャンセルし合って無視できると考え、局所誘導近似を用いたのである。2 つめの欠陥は、ミキシングという非物理的な操作を用いていることである。周期境界条件中での Schwarz のシミュレーションでは、渦がしだいに超流動相対速度に垂直な平面上に平行に並ぶようになり、渦同士のリコネクションが誘発されず乱流状態ではなかった。Schwarz は乱流状態を維

持するために、半分の渦を手動的に 90° 回転させて渦が平行になるのを無理やり回避し、リコネクションを起こさせ乱流を維持するような操作を行った。これがミキシングという操作で非物理的で受け入れ難いものである。これらの欠陥のため、実は熱カウンタ流量子乱流の定常状態のシミュレーションは未だ完全に成功したとは言えないのである。

我々は渦間の相互作用も取り入れた full Biot-Savart 渦糸法を用い、しかもミキシング操作を行わずに熱カウンタ流量子乱流の数値シミュレーションを行い、渦糸長密度などの統計量を計算した。本稿ではその結果について述べる。

2 渦糸法の方程式

渦糸法は、文字どおり、量子渦を循環のそろった渦糸として扱う。「糸」とはその芯の内部構造を無視することを意味する。超流動 ^4He の場合、渦芯は原子サイズで、渦のダイナミクスに現われるどのスケールよりもはるかに小さい。渦がその周囲につくる超流動速度場は Biot-Savart 則によって表され、それを他の渦が感じて運動する。渦糸法は、古典流体力学の分野で古くから研究され、いまでもなお、数理的には非常に興味深い対象である。しかし、古典流体の場合は、渦糸法はトイ・モデル (toy model) であることは否めない。古典粘性流体中では、それぞれの渦は、循環を一定に保たず、生成および消滅を繰り返すからである。ところが、超流動中の量子渦はこれらとは異なり、安定な位相欠陥として振舞う。そのため、量子渦糸という描像が現実的となる。

ヘルムホルツの定理により、量子渦は絶対零度ではその渦上の点での超流動速度で運動する。なので渦糸法では渦上に誘起する超流動速度場を求め、渦の運動を計算する。量子渦上の点 $\mathbf{s}$ につくる超流動速度場は

Biot-Savart 則で

$$\mathbf{v}_\omega = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3} \quad (3)$$

と表される。ここで $\mathbf{s}$ は渦糸に沿った 1 次元座標である。積分は、この 1 次元座標に沿った線積分を意味する。しかしながら、この Biot-Savart 積分は $\mathbf{s}_1 \rightarrow \mathbf{r}$ で発散する。そのため、 $\mathbf{r}$ を渦糸上の点の座標 $\mathbf{s}$ で置き換えて、 $\mathbf{s}_1$ 近傍の寄与と、それより遠方の寄与に分けると Biot-Savart 則は

$$\mathbf{v}_\omega = \frac{\kappa}{4\pi} \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \ln \left(\frac{2(l_+ l_-)^{1/2}}{e^{1/4} a_0} \right) + \frac{\kappa}{4\pi} \int'_{\mathcal{L}} \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3} \quad (4)$$

と近似することができる (l_+ 、 l_- は点 $\mathbf{s}$ の隣の 2 点とつながる線要素)。 $\mathbf{s}'$ は点 $\mathbf{s}$ での渦度の方向を向いた単位接線ベクトルで、 $\mathbf{s}''$ は $\mathbf{s}'$ に垂直な法線方向のベクトルで、その場所の曲率半径 R の逆数の大きさをもつ。積分上端のダッシュは $\mathbf{s}$ 近傍を除くことを意味する。式 (4) 第一項を局所項、局所誘導速度といい、第二項を非局所項と呼ぶ。先に述べた「局所誘導近似」はこの二項のうち局所項のみを用いた計算で、Schwarz はこの局所誘導近似がだいた 90% の精度で正しいと述べている [11]。対して我々が本研究で用いた full Biot-Savart 則は非局所項も含めて計算する手法である。

絶対零度での渦糸の方程式はこの Biot-Savart の二項を用いて

$$\dot{\mathbf{s}}_0 = \frac{\kappa}{4\pi} \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \ln \left(\frac{2(l_+ l_-)^{1/2}}{e^{1/4} a_0} \right) + \frac{\kappa}{4\pi} \int'_{\mathcal{L}} \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3} + \mathbf{v}_s \quad (5)$$

となる。 $\mathbf{v}_s$ は熱カウンタ一流なので印加される超流動速度場である。さらにこの式を有限温度に発展させることができる。非圧縮完全流体中を渦度をもった物体が運動するときのは、マグナス力がかかる。量子渦糸の場合、マグナス力は、

$$\mathbf{f}_M = \rho_s \kappa \mathbf{s}' \times (\dot{\mathbf{s}} - \mathbf{v}_s) \quad (6)$$

で、 $\dot{\mathbf{s}}$ は点 $\mathbf{s}$ における渦糸の速度である。これと実験で観測された相互摩擦力 (α 、 α' は温度に依存する係数)

$$\mathbf{f}_D = -\alpha \rho_s \kappa \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)] - \alpha' \rho_s \kappa \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \quad (7)$$

とで運動方程式を立てると

$$m_{eff} \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} = \mathbf{f}_M + \mathbf{f}_D \quad (8)$$

となる。超流動成分が排除された渦芯の有効質量は、渦芯の半径を a とすれば、 $\rho_s a^2$ のオーダーであり、 a が十分小さいため、この運動方程式で慣性項は無視される。こうして得られる $\mathbf{f}_M + \mathbf{f}_D = 0$ を $\dot{\mathbf{s}}$ について解くことにより、

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_0 + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \dot{\mathbf{s}}_0) - \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \dot{\mathbf{s}}_0)] \quad (9)$$

を得る。これが我々が数値計算で解く渦糸の運動方程式である。

ここで量子乱流を特徴づける、いくつかの統計量について紹介しておく。量子乱流を特徴づける量のもっとも典型的なものが、渦糸長密度 L で、先に述べたようにこれは単位体積当たりの渦糸の長さとして記述される。次にあげられるのが、異方性パラメータで

$$I_{||} = \frac{1}{\Omega L} \int_{\mathcal{L}} [1 - (\mathbf{s}' \cdot \hat{\mathbf{r}}_{||})^2] d\xi \quad (10)$$

と表される ($\hat{\mathbf{r}}_{||}$ は相対流速 $\mathbf{v}_{ns}$ に垂直な単位ベクトル、 Ω は系のサイズ)。もし乱流が完全に等方的なら $I_{||} = 2/3$ で、反対に渦が全て $\mathbf{v}_{ns}$ に垂直なら $I_{||} = 1$ である。これらの統計量は、発生した量子乱流がどのようなものなのかを読み解くための、重要な手がかりとなる。

3 計算結果

我々は熱カウンタ一流相対速度 $\mathbf{v}_{ns}$ を加えた式 (9) を数値計算した。渦糸法では渦の生成は記述できないので、図 1(a) のように六つの渦輪を初期条件として配置して時間発展を追った。全ての計算において、全方向周期境界条件を用い、周期ボックスの一辺の長さ 0.1cm、空間分解能 $\Delta\xi = 8.0 \times 10^{-4}$ cm、時間分解能 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ s で計算を行った。図 1

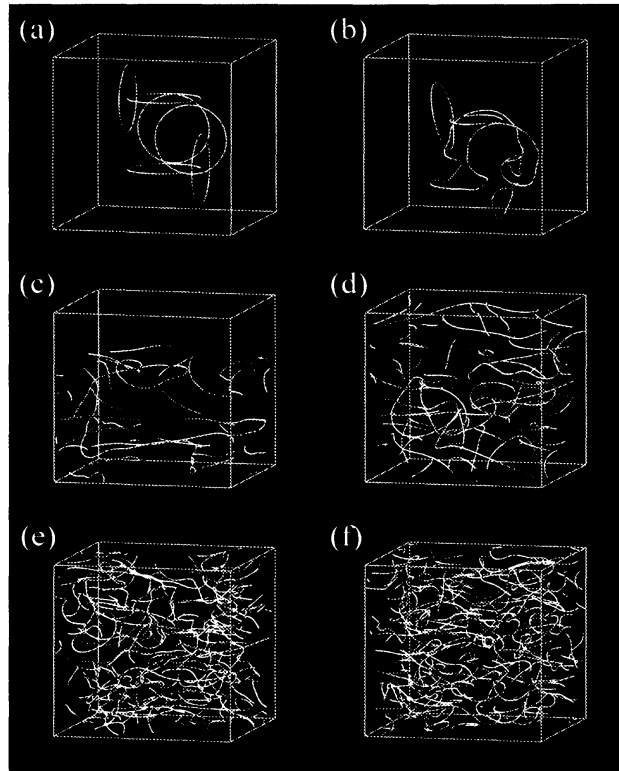


図1 量子渦タングルの時間発展のシミュレーション。温度 $T = 1.9\text{K}$ 、 $|\mathbf{v}_{ns}| = 0.572\text{cm}$ で、 $\mathbf{v}_{ns}$ は Z 方向。(a) $t = 0\text{s}$ 、(b) $t = 0.05\text{s}$ 、(c) $t = 0.5\text{s}$ 、(d) $t = 1.0\text{s}$ 、(e) $t = 3.0\text{s}$ 、(f) $t = 4.0\text{s}$ である。

に典型的な数値シミュレーションによる乱流の時間発展をのせた。最初単純な渦輪の集合が相互摩擦によって、時間と共に成長し、渦同士再結合を起こして最終的には統計的な定常状態へ行き着く。図2で渦糸長密度と異方性パラメターの時間発展を示した。どちらの統計量も最初大きく変動するが、ある時間以降細かな振動をしながら、ほぼ一定の値を保っていることがわかる。もちろん我々は Schwarz が用いたミキシングなどを行っていない。我々は Schwarz の成し得なかった、全方向周期境界条件での熱カウンタ流量子乱流の定常状態を得ることができたと言える。また、定常状態での渦糸長密度を、温度と相対速度を変えてプロットしたものが図3である。図を見て分かるように、我々の数値計算でも実験の観測事実と同じ $L = \gamma^2 v_{ns}^2$

の関係を満たしていることがわかる。表 1 はパラメーター γ の実験値 [2] との比較である。我々が得た γ は定量的にほぼ一致しており、これは数値計算が実験にかなり近いものであることを意味している。

では、なぜ Schwarz の計算は先に述べたように、熱カウンタ流量子乱流の定常状態を実現できなかったのだろうか。その原因は局所誘導近似にあることが今回わかった。図 4 に full Biot-Savart 計算と局所誘導近似計算の比較をのせる。局所誘導近似計算では最初は渦がりコネクションを起こりタングル状態になるのだが、しだいに渦が $\mathbf{v}_{ns}$ に垂直にそろいだし、図に見ら

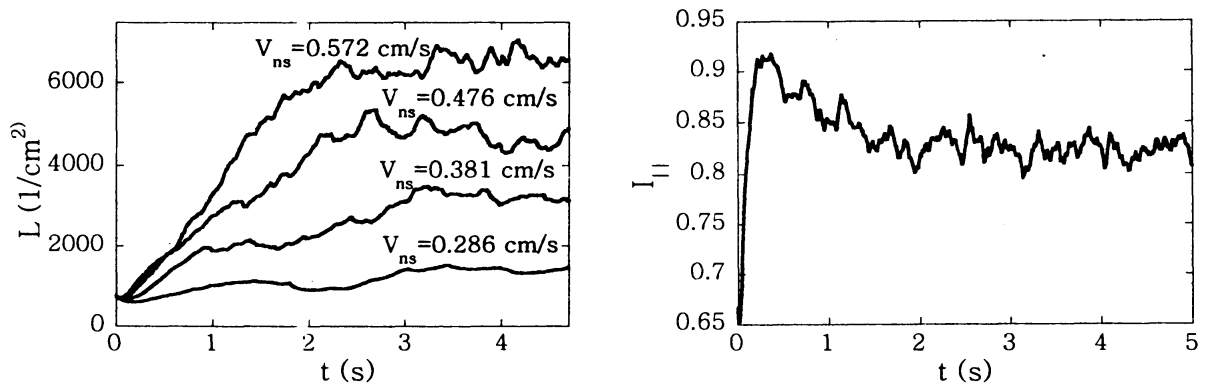


図 2 渦糸長密度 L の時間発展 (左) と $T = 1.9$ K、 $v_{ns} = 0.572$ cm/s での異方性パラメーター $I_{\parallel}$ の時間発展 (右)

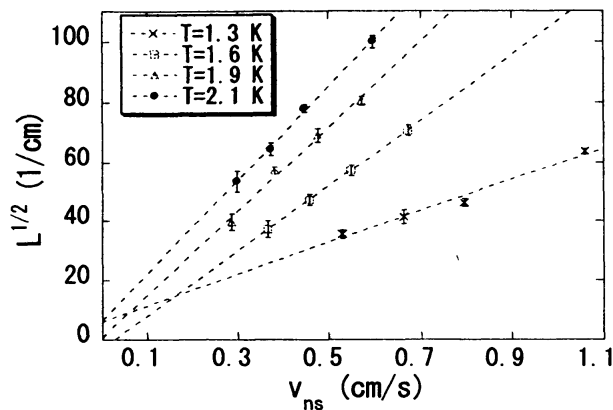


図 3 定常状態の渦糸長密度 L の v_{ns} に対するプロット。エラーバーは標準偏差。

T (K)	$\gamma_{num}(\text{s/cm}^2)$	γ_{exp}
1.3	53.5	60
1.6	109.6	90
1.9	140.1	130
2.1	157.3	150

表1 我々の数値計算によるパラメータ γ_{num} と Childers & Tough[2] の実験により得られた γ_{exp} との比較。

れるような層構造をつくるようになり、乱流状態ではなくなっていくことが確かめられた。この結果は Schwarz による局所誘導近似を用いた計算においてもみられたものである。これは、ただ局所誘導近似が数値計算には不適というだけではない。前述のように Biot-Savart 積分の非局所項は渦間の相互作用を担う項である。つまり、熱カウンタ一流量子乱流において、渦間の相互作用が決定的に重要だということである。これは、あらゆる種類の量子乱流にあてはまる性質であると予想できる。

4 まとめと今後の展望

今回我々は熱カウンタ一流量子乱流の定常状態の数値計算に成功し、実験とも定量的な一致を見た。さらに局所誘導近似が乱流の数値計算では妥当ではないことを示した。これは、乱流の性質に対して、渦間の相互作用がかなり重要な役割を果たしているという、今までにあまり認知されていない新たな解釈を加えたことになる。今回の研究を基にして、熱カウンタ一流の PIV による可視化実験との比較など未だ理解されていない量子乱流に関わる現象を明らかにできるかもしれない。

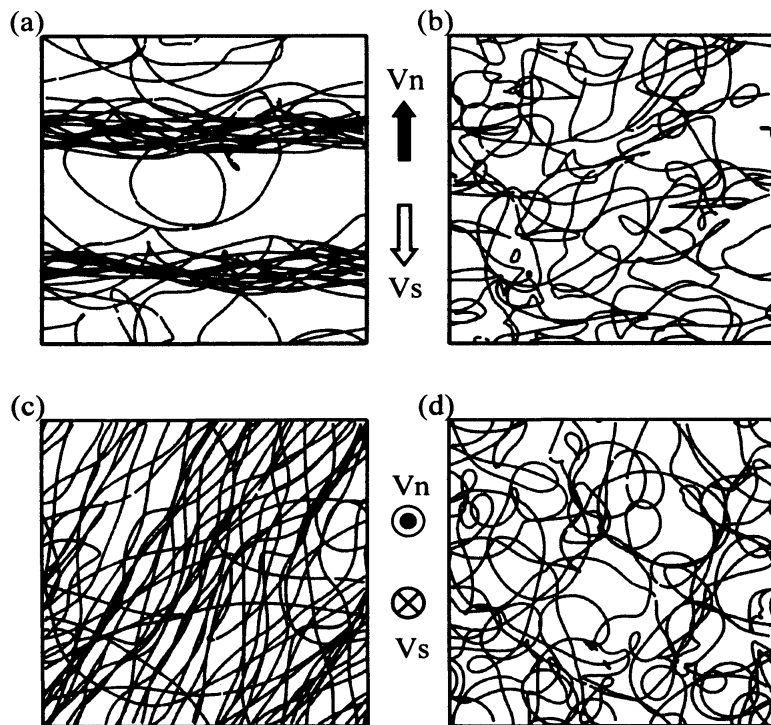


図4 (a)、(c)はそれぞれ、full Biot-Savart 計算の $\mathbf{v}_{ns}$ に対して横からと上からの図 ($t = 20s$)。 (b)、(d)は局所誘導近似計算のもの。どちらの計算も $T = 1.6K$ 、 $v_{ns} = 0.55cm/s$ で行った。

参考文献

- [1] W.F. Vinen, it Proc. Roy. Soc. **A 240**, 114 (1957); W.F. Vinen, it Proc. Roy. Soc. **A 240**, 128 (1957); W.F. Vinen, it Proc. Roy. Soc. **A 242**, 493 (1957); W.F. Vinen, it Proc. Roy. Soc. **A 243**, 400 (1957).
- [2] J.T. Tough, in *Progress in Low Temperature Physics*, edited by D.F.Brewer (North-Holland, Amsterdam, 1982), Vol.VIII.
- [3] *Progres in Low Temperature Physics*,,edited by W.P. Halperin and

M. Tsubota (ELSEVIER, Amsterdam, 2008) Vol.XVI.

- [4] C. Nore, M. Abid, and M.E. Brachet, Phys. Rev. Lett. **78**, 3896 (1997); C. Nore, M. Abid, and M.E. Brachet, Phys. Fluids **9**, 2644 (1997); T. Araki, M. Tsubota, and S.K. Nemirovskii, Phys. Rev. Lett. **89**, 145301 (2002); M. Kobayashi and M. Tsubota, Phys. Rev. Lett. **94**, 065302 (2005); M. Kobayashi and M. Tsubota, J. Phys. Soc. Jpn. **74**, 3248 (2005).
- [5] M.S. Paoletti, R.B. Fiorito, K.R. Sreenivasan, and D.P. Lathrop, J. Phys. Soc. Jpn. **77**, 111007 (2008).
- [6] T. Zhang and S.W. Van Sciver, Nat. Phys. **1**, 36 (2005).
- [7] L.D. Landau and E.M. Lifshits, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press (1987).
- [8] C.J. Gorter and J.H. Mellink, Physica, **15**, 285 (1949).
- [9] R.P. Feynman, *Progress in Low Temperature Physics*, edited by C. J. Gorter (North-Holland, Amsterdam, 1955), Vol.I
- [10] K.W. Schwarz, Phys. Rev. B **38**, 2398 (1988).
- [11] K.W. Schwarz, Phys. Rev. B **31**, 5782 (1985).