

算術級数中の素数の数に $\gg$ 〓.

(On some improvements of the Brun-Titchmarsh theorem, II)

本橋 洋 — 日大理工

(Y. MOTOHASHI / Nihon Univ.)

Abstract.

The purpose of this note is to improve results obtained in our recent paper [1]. We shall prove the following

Theorem

Let $\pi(x; q, l)$ denote the number of primes $\leq x$ that are congruent to $l \pmod{q}$, where $(q, l) = 1$. Then we have

$$(i) \quad \pi(x; q, l) \leq (1+\varepsilon) \frac{x}{\varphi(q) \log \frac{x}{q^{\frac{1}{2}}}} \quad \text{if } x^{\frac{2}{5}} \leq q \leq x^{\frac{1}{2}}$$

$$(ii) \quad \pi(x; q, l) \leq 2(1+\varepsilon) \frac{x}{\varphi(q) \log \frac{x}{q^{\frac{1}{2}}}} \quad \text{if } 1 \leq q \leq x^{\frac{1}{3}}$$

The result (i) seems especially interesting, for by this we may improve known results concerning the size of the least

$$P_2 \equiv l \pmod{q}.$$

§1. Selberg の篩.

z はあとで定めるとして, $1 < z \leq x$ としておく.

$S(x; q, l)$ で x より小で $\equiv l \pmod{q}$ 且 $\rightarrow z$ 以下の素因子を
持たぬものの数とすれば,

$$(1.1) \quad \pi(x; q, l) \leq S(x; q, l) + \frac{x}{q} + 1.$$

$S(x; q, l)$ は Selberg の方法で評価するが, $==$ では, 天下り式
に篩の重みをきめておく:

$$(1.2) \quad \lambda_d = \begin{cases} \frac{1}{Y} \cdot \frac{\mu(d)d}{\varphi(d)} \sum_{\substack{(r, d)=1 \\ r \leq x/d}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} & (q, d)=1 \text{ 且 } d \leq z \text{ のとき.} \\ 0 & \text{それ以外の場合.} \end{cases}$$

但し $==$ に

$$(1.3) \quad Y = \sum_{\substack{(r, q)=1 \\ r \leq z}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} = \sum_{d_1, d_2 \leq z} \frac{\lambda_{d_1} \lambda_{d_2}}{[d_1, d_2]}$$

であって, $==$ の量に ついては

$$(1.4) \quad Y \geq \frac{\varphi(q)}{q} \log z$$

が成立する. 更に,

(1.5)

$$|\lambda_d| \leq 1.$$

そして

$$(1.6) \quad S(x; q, l) \leq S_0(x; q, l)$$

==に

$$S_0(x; q, l) = \sum_{\substack{n \equiv l \pmod{q} \\ n \leq x}} \left(\sum_{d|n} \lambda_d \right)^2.$$

論文[1]においては、このねをじかに計算して結果を要としてしま、たので、==では Riesz 平均を考えて改変を行う。

即ち、 k を正整数と

$$S_k(x; q, l) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{n \equiv l \pmod{q} \\ n \leq x}} (\log \frac{x}{n})^k \left(\sum_{d|n} \lambda_d \right)^2$$

を考察する。

§2. Tauber 型 定理.

$S_k(x; q, l)$ の主項は、次のようになる $\frac{x}{qY}$ であるので

$$(2.1) \quad E_k(x) = S_k(x; q, l) - \frac{x}{qY}$$

と置く。又、 x についてある $k \leq 3$ とし $Y = Y(x)$ が示されるので、問題は $S_0(x; q, l)$ と $E_3(x)$ との関係である。

まず $S_k(x; q, l)$ は x について単調増大であるから, λ を正の数として (勿論充分小にとる),

$$\frac{1}{\lambda} \int_{e^{-\lambda}x}^x S_{k-1}(\xi; q, l) \frac{d\xi}{\xi} \leq S_{k-1}(x; q, l) \leq \frac{1}{\lambda} \int_x^{e^{\lambda}x} S_{k-1}(\xi; q, l) \frac{d\xi}{\xi}.$$

したがってわかるように (積分と和を入れかえて)

$$\text{左辺} = \frac{1}{\lambda} \{ S_k(x; q, l) - S_k(e^{-\lambda}x; q, l) \}$$

$$\text{右辺} = \frac{1}{\lambda} \{ S_k(e^{\lambda}x; q, l) - S_k(x; q, l) \}$$

従って (2.1) から

$$S_{k-1}(x; q, l) = \frac{x}{qY} + O\left(\lambda \frac{x}{qY}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda} |E_k(x)|\right).$$

(本当は $\max_{e^{-\lambda}x \leq \xi \leq e^{\lambda}x} |E_k(\xi)|$ を最後の項にすべきだが...)

我々の場合 $k \leq 3$ であるから, たとえば, 第一回目の

smoothing には λ のかわりに λ^4 , 次に λ^2 , 最後は λ とすれば, 容易に

$$S_0(x; q, l) = \frac{x}{qY} + O\left(\lambda \frac{x}{qY}\right) + O\left(\frac{|E_3(x)|}{\lambda^2}\right)$$

たとえば $\lambda = (\log x)^{-2}$ として,

補題 1.

$$S_0(x; q, l) = \frac{x}{qY} (1 + O((\log x)^{-2})) + O(|E_3(x)| (\log x)^{1+}).$$

§3. $E_k(x)$ の積分表示

$(q, l) = 1$ であるから, Dirichlet 指標 χ を用いて,

$$\begin{aligned} S_k(x; q, l) &= \frac{1}{k! \varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(l) \sum_{n \leq x} \chi(n) \left(\log \frac{x}{n} \right)^k \left(\sum_{d|n} \lambda_d \right)^2 \\ &= \frac{1}{2\pi i \varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(l) \int_{(\alpha)} L(s, \chi) K(s, \chi) \frac{x^s}{s^{k+1}} ds \quad (\alpha > 1). \end{aligned}$$

但し

$$K(s, \chi) = \sum_{d_1, d_2 \leq x} \frac{\lambda_{d_1} \lambda_{d_2}}{[d_1, d_2]^s} \chi([d_1, d_2])$$

従って, すぐわかるように

$$E_k(x) = \frac{1}{2\pi i \varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(l) \int_{(\alpha)} L(s, \chi) K(s, \chi) \frac{x^s}{s^{k+1}} ds \quad (0 < \alpha < 1)$$

ここで以後 重要に 2 つの補題を引用しておく。

補題 2. (Gallagher [2]) $T \geq 1$ は任意, $\{a_n\}$ は任意の複素数列, 又更に $M, N > 0$ は任意の整数とすると,

$$\sum_{\chi \bmod q} \int_{-T}^T \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n \chi(n) n^{-it} \right|^2 dt$$

$$\ll (qT + N) \sum_{M < n \leq M+N} |a_n|^2.$$

補題 3. (Burgess [3]) $0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$|L(\sigma + it, \chi)| \ll q^{\frac{3+10(\frac{1}{2}-\sigma)}{16} + \varepsilon} (|t|+1)$$

[3] には $\sigma = \frac{1}{2}$ の場合しか出ていないが convexity からすぐ上の形がわかる。又 $(|t|+1)$ も [3] では出ていないが、一樣性が必要なので入れておく。

更に, 補題 2 と ($\chi \neq \chi_0$ のとき)

$$L(\sigma + it, \chi) = \sum_{n \leq y} \frac{\chi(n)}{n^{\sigma+it}} + O((|t|+1) \frac{y^{\frac{1}{2}} \log y}{y^{\sigma}})$$

とから, 容易に

$$(3.1) \quad \sum_{\chi \bmod q} \int_{-T}^T |L(\sigma + it, \chi)|^2 dt \ll q^{2(1-\sigma)} T^3 \log^2 q$$

がわかる。

§4. $E_k(z)$ の評価, I.

まず Selberg にあらずして,

$$\sum_{d|n} G_s(d, \chi) = \bar{\chi}(n) n^s$$

$$(\text{但し } G_s(d, \chi) = \sum_{u|d} \mu\left(\frac{d}{u}\right) \bar{\chi}(u) u^s),$$

を用いて

$$K(s, \chi) = \sum_{d \leq z} \frac{\chi^2(d)}{d^{2s}} G_s(d, \chi) H^2(s, \chi, \frac{z}{d})$$

$$\left(H(s, \chi, \frac{z}{d}) = \sum_{d_1 \leq z/d} \frac{\chi(d_1)}{d_1^s} \lambda_{dd_1} \right)$$

とかけろ。 $\chi = \chi_1$ 更に [1] におけるように, 補助変数 z_1

$$1 < z_1 < z$$

を用いて, $K(s, \chi)$ をつぎのように分解する。

$$K(s, \chi) = \sum_{u \leq z} \frac{\chi(u)}{u^s} \sum_{v \leq \frac{z}{u}} \frac{\mu(v)}{v^{2s}} \chi(v^2) H^2(s, \chi, \frac{z}{uv})$$

$$= \sum_{u \leq z_1} + \sum_{z_1 < u \leq z}$$

$$= K_1(s, \chi) + K_2(s, \chi)$$

従って

$$E_k(z) = E_k^{(1)}(z) + E_k^{(2)}(z)$$

$$E_k^{(j)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(l) \int_{(\alpha)} L(s, \chi) K_j(s, \chi) \frac{z^s}{s^{k+1}} ds$$

($j = 1, 2$).

以下では $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ とし、まず $E_k^{(1)}$ を考える。

補題3を用いて、

$$\gamma = \gamma(\alpha) = \frac{1}{16} (3 + 10(\frac{1}{2} - \alpha)) + \varepsilon$$

とすると

$$|E_k^{(1)}| \ll \frac{x^\alpha q^\gamma}{\varphi(q)} \sum_{u \leq z_1} \frac{1}{u^\alpha} \sum_{v \leq z/u} \frac{1}{v^{2\alpha}} \sum_{\chi \bmod q} \int_{(\alpha)} |H(s; \chi, \frac{z}{uv})|^2$$

$$\frac{|ds|}{|s|^k}$$

補題2より

$$\sum_{\chi \bmod q} \int_{(\alpha)} |H(s; \chi, \frac{z}{uv})|^2 \frac{|ds|}{|s|^k} \ll (q + \frac{z}{uv}) (\frac{z}{uv})^{1-2\alpha} \log x.$$

従って

$$(4.1) \quad |E_k^{(1)}| \ll x^\alpha q^\gamma z^{1-2\alpha} (z_1^\alpha + \frac{z}{q}) (\log x)^2.$$

§5. $E_k(x)$ の評価, II.

[1] と同じく, $K_2(s, \chi)$ を $s \neq 1$ と,

$$K_2(s, \chi) = \sum_{\substack{z_1 < u \leq z \\ uv \leq z \\ d_1, d_2 \leq \frac{z}{uv}}} \frac{\chi(uv^2 d_1 d_2)}{(uv^2 d_1 d_2)^s} \mu(v) \lambda_{uv d_1} \lambda_{uv d_2}$$

$$= \sum_{n \leq z^2/z_1} \frac{\chi(n)}{n^s} f(n)$$

$$f(n) = \sum_{\substack{n = uv^2 d_1 d_2 \\ z_1 < u \leq z \\ v \leq \frac{z}{u} \\ d_1, d_2 \leq \frac{z}{uv}}} \mu(v) \lambda_{uv d_1} \lambda_{uv d_2}$$

このとき $|f(n)| \leq \tau_4(n)$ (4個の積で表わすことができる) とし

$$|E_k^{(2)}(x)| \ll \frac{x^k}{\rho(k)} \left\{ \sum_{\chi \bmod g} \int_{-\infty}^{+\infty} |L(\alpha + it, \chi)|^2 \frac{dt}{(|t|+1)^{k+1}} \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\chi \bmod g} \int_{-\infty}^{+\infty} |K_2(\alpha + it, \chi)|^2 \frac{dt}{(|t|+1)^{k+1}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

従って, (3.1) 及び補題2より

$$\begin{aligned}
 |E_k^{(2)}(x)| &\ll \frac{x^\alpha}{\varphi(q)} \left\{ q^{2(1-\alpha)} \log^2 q \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(q + \frac{z^2}{z_1} \right) \sum_{n \leq \frac{z^2}{z_1}} \frac{\tau_+^2(n)}{n^{2\alpha}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 (5.1) \quad &\ll x^\alpha q^{-\alpha} \left(\frac{z^2}{z_1} \right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \left(q^{\frac{1}{2}} + \frac{z}{\sqrt{z_1}} \right) (\log x)^{1/2} \\
 &\ll x^\alpha q^{-\alpha} \left(\frac{z^2}{z_1} \right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \left(q^{\frac{1}{2}} + \frac{z}{\sqrt{z_1}} \right) (\log x)^{1/2}
 \end{aligned}$$

以上より (4.1) と (5.1) より τ ($k \geq 3$ のとき)

$$\begin{aligned}
 |E_k(x)| &\ll x^\alpha q^\gamma z^{1-2\alpha} (z_1^\alpha + \frac{z}{q}) (\log x)^{1/2} + \\
 &\quad + x^\alpha q^{-\alpha} \left(\frac{z^2}{z_1} \right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \left(q^{\frac{1}{2}} + \frac{z}{\sqrt{z_1}} \right) (\log x)^{1/2} \\
 &\ll x^\alpha z^{1-2\alpha} (\log x)^{1/2} \left\{ q^\gamma z_1^\alpha + \frac{z}{z_1^{1-\alpha} q^\alpha} + \frac{z}{q^{1-\gamma}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{q^{\frac{1}{2}-\alpha}}{z_1^{\frac{1}{2}-\alpha}} \right\}.
 \end{aligned}$$

(おこし)

$$q^\gamma z_1^\alpha \geq \frac{q^{\frac{1}{2}-\alpha}}{z_1^{\frac{1}{2}-\alpha}} \quad \left(z_1^{\frac{1}{2}} q^\gamma \geq q^{\frac{1}{2}-\alpha} \right)$$

$$\gamma \geq \frac{1}{16} (3 + 10(\frac{1}{2}-\alpha)) \geq \frac{1}{2}-\alpha \quad (\alpha \geq 0).$$

よって

$$(5.2) \quad |E_k(x)| \ll x^\alpha z^{1-2\alpha} (\log x)^{1/2} \left\{ q^\gamma z_1^\alpha + \frac{z}{z_1^{1-\alpha} q^\alpha} + \frac{z}{q^{1-\gamma}} \right\}.$$

§6. 定理の証明.

まず (5.2) に於て

$$q^{\delta} z_1^{\alpha} = \frac{z}{z_1^{1-\alpha} q^{\alpha}}$$

すなわち $z_1 = z / q^{\alpha+\delta}$

とすると (5.2) は最小となるが, 二重に $z_1 \geq 1$ でなければ

いけないから, 条件

$$(i) \quad z \geq q^{\alpha+\delta}$$

を得る. 又 $z = a$ として z_1 の値を (5.2) に代入して,

$$\begin{aligned} |E_k(x)| &\ll x^{\alpha} z^{1-2\alpha} (\log x)^{1/2} \left\{ z^{\alpha} q^{\delta(1-\alpha)-\alpha^2} + \frac{z}{q^{1-\delta}} \right\} \\ &\ll x^{\alpha} q^{\delta} z^{1-2\alpha} (\log x)^{1/2} (z^{\alpha} q^{-\alpha\delta-\alpha^2} + z q^{-1}) \end{aligned}$$

$z = a$ 次に

$$z^{\alpha} q^{-\alpha\delta-\alpha^2} \geq z q^{-1}$$

即ち, (ii) $z \leq q^{(1-\alpha)\delta-\alpha^2}/(1-\alpha)$ なる場合は

$$|E_k(x)| \ll x^{\alpha} q^{(1-\alpha)\delta-\alpha^2} z^{1-\alpha} (\log x)^{1/2}$$

又 $z = a$ の右辺は

$$z < \frac{x^{1-\varepsilon}}{q^{1+\alpha+\delta}} \quad \text{のとき}$$

$\frac{x}{qY}$ となる $S_k(x; q, l)$ の主項より小さくなる。

z はなるべく大きくとりたいたいから, $\alpha + \beta$ が 1 になるように
 11 行, となる $\alpha = 0$ が best である。よって このとき

$$(iii) \quad z = \frac{x^{1-\varepsilon}}{q^{\frac{3}{2}}}$$

(i), (ii), (iii) は同時に成立して 1 になるだけはないから,
 (実は (i), (ii) は必ず同時に成立して 112)。($\alpha = 0$ として)

$$z \geq q^{\frac{1}{2}}, \quad z \leq q^2$$

となる

$$x^{\frac{2}{5}-\varepsilon} \leq q \leq x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

これは我々の定理の $\beta = 1$ の場合に他ならない。

次に,

$$(iv) \quad z \geq q^{(1-\alpha\beta-\alpha^2)/(1-\alpha)} \quad \text{となる } z \text{ は}$$

$$|E_k(x)| \ll x^\alpha q^{\beta-1} z^{2(1-\alpha)} (\log x)^{12} \quad \text{であるから, 24 から}$$

$$\frac{x}{qY} \text{ より 小さいためには, } z \leq \frac{x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}{q^{\frac{\beta}{2(1-\alpha)}}} \quad \text{である必要がある。}$$

z をなるべく大きくとりたいたいから, $\alpha = \frac{1}{2}$ とする。よって, このとき

$$(V) \quad z = \left(\frac{x^{1-\varepsilon}}{q^{\frac{3}{8}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

とすべきである。これは (iv), (i) と同時に成立するか？

$$(i) \text{ から } z \geq q^{\frac{11}{16}}, \quad (iv) \text{ から } z \geq q^{\frac{21}{16}}$$

従って (V) から

$$q \leq x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}$$

これは定理のオ2の場合に他ならない。

種の場合に ついてよく考えてみるべきである。

ここでは、これ以上の考察はしないことにする。又、 $P_2 \equiv 1 \pmod{q}$ については別の機会にゆずりたいと思う。

文 献

- [1] Y. MOTOHASHI ; On some improvements of the Brun-Titchmarsh theorem, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [2] P.X. Gallagher ; A large sieve density estimate near $\alpha = 1$, Invent. Math. 41 (1970), 329-339.
- [3] D.A. Burgess ; On character sums and L-series, II, Proc. London Math. Soc., (3) 13 (1963), 524-536.