

$SO_0(n, 1)$ 上の球函数に随伴する Harish-Chandra
級数の積分表示について.

早大 理工 大田生田 雅一

§1 序

ここで半単純 Lie 群 G (連結かつ中心有限) 上の (τ, ψ)
球函数 $E(\lambda, v, g)$ とは次の様に定義された G 上の C^∞
函数を意味するものとする。

$K \subset G$ の 1 つの極大 compact 部分群, $G = KAN$ 及び
 $g \in G$ $g = k(g) \exp H(g) m(g)$ を岩沢分解とある。次に
 K の有限次元表現 (τ_i, V_i) $i = 1, 2$ に対して

$V = \text{Hom}(V_2, V_1)$, $V_M = \{v \in V \mid \tau_1(m)v = v \tau_2(m), v_m \in M\}$,
但し, M は A の K に属する中心化群。とする。

A の Lie 環 $\mathfrak{a}$ の $\mathbb{C}$ -値線型写像の全体を $\mathfrak{a}^*$ と書くと
 $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $v \in V_M$, $g \in G$ に対して $E(\lambda, v, g) \in \mathbb{C}$ の
様に定義する。

$$(1) \quad E(\lambda, v, g) = \int_K e^{(\lambda + \rho)H(gk)} \tau_1(k(gk))v \tau_2(k^{-1}) dk.$$

ここで $\rho \in \mathfrak{a}^*$ は $\text{ad}(H)$ の N の Lie 環 $\mathfrak{a}$ への制限。

の trace の半分. すなわち $\rho(H) = \frac{1}{2} \text{tr}(\text{ad}(H)|_{\mathfrak{g}_c})$

1, dk は K 上の normalized Haar measure.

$\sigma^+ \in \sigma$ の一つの Weyl chamber. $W \in \mathcal{W}(G, A)$ に
 対応する Weyl 群といたし $E(\lambda, v, \exp H)$ ($H \in \sigma^+$) は
 次の極値級数展開を持つことが知られている。(Harish-
 Chandra [1])

Prop. 1 (Harish-Chandra) σ_c^* の open, connected,
 dense, W -stable 部分集合 $\mathcal{Q}$ と $w \in W \in \mathcal{W}$ に
 対応する holomorphic 同値類 $C_w: \mathcal{Q} \rightarrow \text{Hom}(V_{\mu}, V_{\mu})$ が
 存在して, $H \in \sigma^+$, $v \in V_{\mu}$, $\lambda \in \mathcal{Q}$ に対して

$$E(\lambda, v, \exp H) = \sum_{w \in W} \Phi(w\lambda, H) C_w(\lambda) v.$$

ここで Φ は σ_c^* の lattice $\mathcal{L}$ 上で適当に選ぶと, 各
 $v \in \mathcal{L}$ に対して rational 同値類. $T_v: \sigma_c^* \rightarrow \text{Hom}(V_{\mu}, V_{\mu})$
 が定義され, 次の極値級数 Φ で表わされる。

$$\Phi(\lambda, H) = e^{\langle \lambda - \rho \rangle(H)} \sum_{v \in \mathcal{L}} T_v(\lambda) e^{-v(H)}$$

このとき, $\Phi(\lambda, H) \in E(\lambda, v, g)$ に随伴する Harish-
 Chandra 級数と呼び, $\mathcal{L}$ の展開を $\mathcal{L}$ の Harish-Chandra
 展開と言うことにする。以下では G が一般 Lorentz
 群 $SO_0(n, 1)$ の場合に Φ が $E(\lambda, v, g)$ と類似の

積分表示を持つことを示す。 $G = SO_0(n, 1)$ ならば $\mathcal{O}$ の次元は 1 であるから、適当に $H \in \mathcal{O}$ を選んで、

$$\mathcal{O} = \mathbb{R}H, \quad \mathcal{O}^+ = \{tH, t > 0\}, \quad H(g) = t(g)H, \quad g \in G.$$

1. $\lambda \in \mathcal{O}_c^*$ に対して $s = \lambda(H) \in \mathbb{C}$ とおき、 $\mathbb{C}$ と同一視する。

2. $\psi = \psi$ に対して $\psi(\lambda, tH) = \psi(s, t)$ とし、

$E(\lambda, v, \exp(tH)) = E(s, v, t)$ 等と書く。この際、

$\psi(s, t)$ の積分表示は次の様になる。

Prop. 2. K の Lie 環 $\mathfrak{K}$ の複素化 $K_{\mathbb{C}}$ の $GL(n+1, \mathbb{C})$ に属する analytic subgroup $E \subset K_{\mathbb{C}}$ とする。

(i) $K_{\mathbb{C}}$ の noncompact real form L (すなわち、 $K_{\mathbb{C}}$ の real form $\mathfrak{h} \in \text{Lie 環}$ を持つ $K_{\mathbb{C}}$ の analytic subgroup) が存在して、函数 $R \mapsto e^{(s-p)t(a+K)} \tau_1(K(a+K))v \in (K^*)$ ($t > 0$ 固定) は K と L による $K_{\mathbb{C}}$ の隣接台に解析接続出来る。

(ii) 適当な $r \in \mathbb{R}$ が存在して、 $\operatorname{Re}(s) < r$ ならば積分

$$(2) \int_L e^{(s-p)t(a+K)} \tau_1(K(a+K))v \in (K^*) dl$$

が収束し、 $t > 0$, $v \in V_M$ に対して絶対収束し、 t の関数として $\mathbb{C}^n$ 上、 s の関数として $\operatorname{Re}(s) < r$ で holomorphic.

又、(2) $\in F(s, t)v$ と書くと $\psi \mapsto F(s, t)v$ は

$\operatorname{Hom}(V_M, V_M)$ の元 $F(s, t)$ を定義する。

- (iii) さらに $\operatorname{Re}(s) < r$ のとき, $C(s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(s+r)t} F(s, t)$ が存在して, $s \mapsto C(s)$, $s \mapsto F(s, t)$ は $\mathbb{C}$ 上 $\operatorname{Hom}(V_M, V_M)$ 値 meromorphic な函数に解析接続出来る.
- (iv) $t > 0$ を固定した時, 次の等式が s の meromorphic な関数として成立する.

$$\Xi(s, t) C(s) = F(s, t)$$

§2. $\Xi(s, t)$ の漸近微分方程式.

$\mathfrak{Z} \subset G$ 上の両側不変な微分作用素全体の作る $\mathbb{C}$ 上の代数 $Z \in \mathfrak{Z}$ に対して, $\varphi_A(Z) \in [3]$ の 9 章の意味での "radial part". $[3]$ 9 章の記号を用い, Ξ の漸近微分方程式は.

$$(i): \varphi_A(Z) \Xi(s, t) = \Xi(s, t) \tau(\Omega(Z, s)) \quad Z \in \mathfrak{Z}$$

さらに,

$$(ii) \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(-s+r)t} \Xi(s, t) = \operatorname{id}_{V_M}$$

が成立する. このとき, $\varphi_A(Z)$ ($Z \in \mathfrak{Z}$) は t に関する常微分作用素となり, 特に $Z = \omega$: Casimir 作用素であるとき, $x = e^{-t}$ と変数変換すると, $x = 0$ で確定特異点を持つ 2 階の常微分作用素となる. 従って $\Xi(s, t)$ は上の条件 (i), (ii) により特徴付けられる. 亦即ち, $\operatorname{Hom}(V_M, V_M)$ に値を持つ $s \in \mathbb{R}$ $t > 0$ 上の同族

$F(s, t)$ が次の条件

$$(ii)' \quad \mathcal{P}_A(\omega) F(s, t) = F(s, t) \mathcal{Q}(\omega, s) \quad t > 0$$

$$(iii)' \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t \operatorname{str} p} F(s, t) = C(s) \quad \text{が存在する。}$$

を満たすならば

$$F(s, t) = \Phi(s, t) C(s) \quad t > 0$$

となる。

従って Prop 2 の (IV) は Prop 2 の (i) ~ (iii) 及び次の Lemma 1 が成立すれば、微分方程式 (ii)' が満たされることと互に等価であることが証明出来る。

Lemma 1. $t > 0$ を固定した時 $s \rightarrow \Phi(s, t)$ は $\mathbb{C}$ 上 meromorphic 且解析接続をもつ。

従って、より詳しく次の Lemma 2 が証明出来る。

Lemma 2. $\omega \in W$ $C_\omega \in \text{Prop 1}$ と同じ性質とある。
このとき $s \rightarrow C_\omega(s)$ は $\operatorname{Hom}(V_M, V_M)$ 値 $\mathbb{C}$ 上 meromorphic と解析接続出来る、さらに、

$$s \rightarrow \Phi(\omega, t) C_\omega(s), \quad s \rightarrow C_\omega(s)^{-1} (\text{逆行列})$$

も同様に meromorphic と解析接続出来る、 $s \rightarrow \Phi(\omega, s, t) C_\omega(s)$ の特異点の商々 1 位の程度、 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ (半整数全体) と等しい。

ける。

証明は長くなるので、概略のみ示す。まず C_ω ($\omega \in W$)
 に関して、 $G = SO_0(n, 1)$ の non-unitary principal
 series の intertwining operator の計算に帰着される。
 このとき、 C_ω の性質を導く以前は intertwining operator の
 それと同じである (I4] 及び [3] の Chap. 9) さら
 に $G = SO_0(n, 1)$ の時、lattice Λ は $1, 2, \dots$ と
 同一視出来る。

$$\Phi(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{(s-c)t} e^{-kt} P_k(s)$$

となる。又、 $\{T_k(wS) C_\omega(s) \mid \omega \in W, k=0, 1, 2, \dots\}$
 のすべての要素の集合は $\mathcal{O}$ の収束系を構成しない discrete
 な部分集合となる。又、 $\text{Hom}(V_M, V_M)$ の operator norm $\|\cdot\|$
 と書くことにすると、 $\mathcal{O}(T_k, T_k)$ の性質の compact な
 集合 B を得て正数 $C_1(B) > 0$, $C_2(B) > 0$ が存在して、

$$\|T_k(wS) C_\omega(s)\| \leq C_1(B) \left(\prod_{j=0}^{k-1} (C_2(B) + 1) \right) / k!$$

よって次の等式

$$e^{-pt} E(s, v, t) = \sum_{\omega \in W} e^{\omega s t} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} P_k(wS) C_\omega(s) v$$

の両辺の Laurent 展開を考え、その Laurent 係数の $t \rightarrow t+0$
 での挙動を比較する。すると、上の等式の左辺が $\mathcal{O}$ 上
 holomorphic であることと、 $\omega \in W$ $\omega \neq 1$ (単位元)

とあると, $N = 1 \times \omega \times S$, $\omega \times S = -S$, であることを用いて Lemma 2 の $\Xi(s\omega(t))\omega(s)$ と同様の部分から得られる。

§3 岩沢分解の解析接続.

G, K, A, N 等の Lie 環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$, 又その複素化 $\mathfrak{g}_c, \mathfrak{k}_c, \mathfrak{a}_c, \mathfrak{n}_c$ 等と書く。さらにはこれより得る $GL(n+1, \mathbb{C})$ の部分環とみなす。そして $GL(n+1, \mathbb{C})$ に属する各々の解析的部分群をそれぞれ G_c, K_c, A_c, N_c とする。次に,

$$A_c = \{ \exp(zH) = a_z \mid z \in \mathbb{C} \text{ } \Re m(z) < \pi \}$$

$$G_c = K_c A_c N_c$$

とする。すなわち, G_c は G を含む G_c の開部分複素多様体となる。又 G の岩沢分解 $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{a}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{n}(\mathfrak{g}) \quad \mathfrak{g} \in G$$

と書くと, $\mathfrak{k}: G \rightarrow K, \quad \mathfrak{a}: G \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{n}: G \rightarrow N$ は実解析的である。次の Lemma 3 が成り立つ。

Lemma 3. G_c は連結であり, $\mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$ の holomorphic な解析接続. $\mathfrak{k}: G_c \rightarrow K_c, \quad \mathfrak{a}: G_c \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mathfrak{n}: G_c \rightarrow N_c$

が一意に決定される。

$g \in G$ に対して

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

2.

$$k(g) = \begin{pmatrix} k_{11}(g) & k_{12}(g) & 0 \\ k_{21}(g) & k_{22}(g) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a(g) = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \text{cht}(g) & \text{sh t}(g) \\ 0 & \text{sh t}(g) & \text{cht}(g) \end{pmatrix}$$

$$m(g) = \begin{pmatrix} 1_{n-1} - \Delta(g) & \Delta(g) \\ \epsilon \Delta(g) & 1 - \Delta(g) & \Delta(g) \\ \epsilon \Delta(g) & -\Delta(g) & 1 + \Delta(g) \end{pmatrix}$$

$$\Delta(g) = \begin{pmatrix} \Delta_1(g) \\ \vdots \\ \Delta_{n-1}(g) \end{pmatrix} \quad \Delta(g) = \frac{\epsilon \Delta(g) \Delta(g)}{2}$$

$$\epsilon \Delta(g) = (\Delta_1(g), \Delta_{n-1}(g))$$

と表わす。

$$k_{11}(g) = g_{11} - \frac{g_{12} + g_{13}}{g_{32} + g_{33}} g_{31}$$

$$k_{12}(g) = \frac{g_{12} + g_{13}}{g_{32} + g_{33}}$$

$$k_{21}(g) = g_{21} - \frac{g_{22} + g_{23}}{g_{32} + g_{33}} g_{31}$$

$$k_{22}(g) = \frac{g_{22} + g_{23}}{g_{32} + g_{33}}$$

$$\epsilon(g) = \log(g_{32} + g_{33})$$

$$\Delta(g) = \epsilon g_{31} / (g_{32} + g_{33})$$

3.

$g \in G$ の高々 4 条件。 $g_{32} + g_{33} \neq 0$

と仮定する。

次に K_c の real form L の定義がある。まず $(\mathfrak{g}, K)$ に対して Cartan involution $\theta \in \Theta$ とある。 $\mathfrak{g}$ の実数空間 $\mathfrak{g}_\theta \in$

$$\mathfrak{g}_\theta = \{ X + \theta X ; X \in \mathfrak{g} \}.$$

とある。

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_\theta \quad (\text{直和})$$

とある。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{m} \oplus \sqrt{-1} \mathfrak{g}_\theta.$$

とある。 $\mathfrak{h}$ は K_c の real form とある。 $L \in \mathfrak{h}$ に対して K_c の解析的部分群とある。上の表示で書く。

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} l_{11} & \sqrt{-1} l_{12} & 0 \\ -\sqrt{-1} l_{21} & l_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \in SO_0(n-1, 1) \right\}$$

とある。 $2\eta \in \mathbb{Z}$, $A^+ = \{ a \in \mathbb{C} : \eta > 0 \}$ とある。

Lemma 4. $A^+ L \subset G_c$.

が成り立つ。次に $K \cong SO(n)$ 取、 K の任意の有限次元表現は $K_c \cong SO(n, \mathbb{C})$ の holomorphic 表現に拡張出来る。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を同じ記号で表わすと、次の同好。

$$\varphi_s(g) = e^{(B-P)\psi(g)} T_s(K(g))$$

は, $\text{Hom}(V, V) \subset \text{値}$ とする G_c 上の holomorphic な関数となる。さらに,

$$g \in G_c, k \in K_c, m \in M_c, a \in A_c, n \in N_c \text{ で,} \\ k g m a n \in G_c \text{ とするときは, 次の関数等式}$$

$$(3) \quad \varphi_c(k g m a n) = e^{(s-p)t(a)} T_1(k) \varphi_c(g) T_1(m)$$

が成り立つ。(= $\varphi_c(k g m a n) = \varphi_c(k g m) e^{(s-p)t(a)}$ と成り立つ = とより結論される) したがって (2) の積分は,

$$(2)' \quad F(s, t) v = \int_L \varphi_c(a_t e) v T_1(e^{-t}) dt$$

と書かれる。 L が K_c の real form であること, 被積分関数がすべて holomorphic であること及び関数等式 (3) と F, v , 微分方程式 (ii)' を満たすことの証明は, $E(s, v, t)$ の場合 ([2] p. 12 p. 279 ~ p. 282) と同じである (φ_c での議論を正当化する為と上の条件が必要となる) 従って Prop 2 は 積分の収束性-(ii), 上の証明に必要な微分と積分の順序交換の可能性, 極限の存在及び S と同様の解析性-(iii) を証明すれば十分である。

まず M は L の 1 つの極大 compact 部分群である。

$$Q_r = \begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh r & \sqrt{1} \sinh r & 0 \\ 0 & -\sqrt{1} \sinh r & \cosh r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$$

とすると, $l \in L$ if $m_1, m_2 \in M, r \geq 0, \tau, z$.

$l = m_1 l_r m_2$ と書ける。 dm は M の normalized Haar measure とすると。

$$dl = c_0 (\cosh r)^{2p-1} dm_1 dr dm_2 \quad l = m_1 l_r m_2 \quad c_0 > 0$$

と取る。

$$\text{したがって, } t(a_l m_1 l_r m_2) = t(a_l l_r) = \log(\cosh t + \sinh t \cosh r)$$

$$K(a_l m_1 l_r m_2) = m_1 K(a_l l_r) m_2$$

$$T_2(K(a_l m_1 l_r m_2)) \vee T_2(m_2^{-1} l_r^{-1} m_1^{-1}) = T_2(m_1) T_2(K(a_l l_r)) \vee T_2(l_r^{-1}) T_2(m_1^{-1})$$

($v \in V_M$) と取る。従って,

$$F(s, t)v = c_0 \int_M T_2(m) \left(\int_0^\infty (\cosh r)^{2p-1} (\cosh t + \sinh t \cosh r)^{s-p} T_2(K(a_l l_r)) \vee T_2(l_r^{-1}) dr \right) T_2(m^{-1}) dm$$

とすると,

$$I(s, t)v = \int_0^\infty (\cosh r)^{2p-1} (\cosh t + \sinh t \cosh r)^{s-p} T_2(K(a_l l_r)) \vee T_2(l_r^{-1}) dr.$$

とすると,

$$F(s, t)v = c_0 \int_M T_2(m) I(s, t)v T_2(m^{-1}) dm.$$

と取り $F(s, t) T_2(m) = T_2(m) F(s, t)$ とする。

$$\text{よって, } K(a_l l_r) = J_r(u) \quad e^{x(u)} = (1 + \frac{1}{2}e^{-r}) / (\frac{1}{2}e^r + e^{-r})$$

と取り $T_2(l_r)$ は $e^{p \times}$ の形の対角要素を持つ対角行列

で表わされる。従、上次の積分の収束性 (及び $t \rightarrow +\infty$ の振舞の存在) を考察しなければならない。

$$I_{Pg}(s, t) = \int_0^\infty (\rho h r)^{2p-1} (cht + \rho h t chr)^{s-p} \left(\frac{1 + \frac{1}{2} e^{-r}}{1 + \frac{1}{2} e^{-t}} \right)^p e^{-sr} dr.$$

$$\text{すなわち, } e^{(-s+p)t} (cht + \rho h t chr)^{s-p} \rightarrow \left(\frac{1+chr}{2} \right)^{s-p} \quad t \rightarrow +\infty$$

$$K(a, br) \rightarrow 1 \quad t \rightarrow +\infty \quad \text{すなわち}$$

$$I(s)v = \int_0^\infty (\rho h r)^{2p-1} \left(\frac{1+chr}{2} \right)^{s-p} v T_2(r^{-1}) dr.$$

とある。

$$C(s)v = C_0 \int_M T_2(m) I(s) v T_2(m^{-1}) dm.$$

結局、上の積分の中の被積分関数に評価を考察すれば求める結果を得られる。

References.

- [1] Harish-Chandra Differential equations and semi-simple Lie groups (1960) unpublished.
- [2] N. R. Wallach. Harmonic analysis on homogeneous spaces (1973). Marcel. Dekker
- [3] G. Warner. Harmonic analysis on semi-simple Lie groups II. (1972) Springer
- [4] A. W. Knap and E. M. Stein. Interlwinning operators

For semi-simple groups. *Ann. of Math.* 73 (1971)

489-578.