

I 型 ファクターの無限テンソル積の

ファクター型について

阪大基礎工 竹之内 脩

H_v ($v=1, 2, \dots$) : ヒルベルト空間.

e_v は H_v の固定された単位ベクトル.

$H = \prod_v \otimes (H_v, e_v)$: $\prod_v \otimes e_v$ を含む無限テンソル積 (von Neumann の不完全無限直積).

M_v は H_v 上に与えられた I 型 ファクター.

$T \in M_v$ の H 上への拡大を $\bar{T}$, $\bar{M}_v = \{\bar{T}; T \in M_v\}$,

$M = \{\bar{M}_v; v=1, 2, \dots\}$ から生成された H 上の von Neumann 環.

この M が $\prod_v \otimes e_v$ という無限テンソル積である.

さて, 各 H_v は M_v に属して, $H_v = H_{v1} \otimes H_{v2}$ とテンソル積に分解され, $M_v = B(H_{v1}) \otimes I_{v2}$.

e_v はこの分解に対応して,

$$(1) \quad e_v = \sum_{j=1}^{m_v} \lambda_{vj}^{1/2} \psi_{vj} \otimes \psi_{v2j}$$

と表わされる. ここで,

$$(2) \quad \begin{cases} \lambda_{vj} > 0 \quad (\forall v, j \text{ について}), \\ \lambda_{v1} \geq \lambda_{v2} \geq \dots, \quad \sum_{j=1}^{m_v} \lambda_{vj} = 1, \\ \{\psi_{vj}; j=1, 2, \dots\}, \{\psi_{v2j}; j=1, 2, \dots\} \text{ はそれぞれ } H_{v1}, \end{cases}$$

$$\setminus H_{v_2} \text{ a NOS}$$

とある。(indices は, $m_v < \infty$ ならば, $j=1, \dots, m_v$; $m_v = \infty$ ならば, $j=1, 2, \dots$ と置く.) (1) の f は長わらばいいところがあるであろうが, 集合 $\{\lambda_{v_1}, \lambda_{v_2}, \dots\}$ は, 各要素の重複度も含めて一意的に定まる.

そこで, M の $\lambda_{v_1}, \lambda_{v_2}, \dots$ の性質を用いて, M のファクター型を分類することができるといふ問題となる. その答として,

定理

$$M \text{ が I 型} \iff (3) \quad \sum_v (1 - \lambda_{v_1}) < \infty.$$

$$M \text{ が II 型} \iff \forall v \quad n_v < \infty, \text{ 無限に多くなる } n_v > 1. \text{ かつ,}$$

$$(4) \quad \sum_{v,j} \left(\left(\frac{1}{n_v} \right)^{1/2} - \lambda_{v_j}^{1/2} \right)^2 < \infty.$$

$$::: \text{に, } n_v = \dim H_{v_1}. \text{ また, } \lambda > m_v \text{ のとき, } \lambda_{v_j} = 0 \text{ とする.}$$

$$M \text{ が III 型} \iff (5) \quad \sum_{j,k} \lambda_{v_j} \lambda_{v_k} \min \left\{ \left| \frac{\lambda_{v_j}}{\lambda_{v_k}} - 1 \right|^2, c \right\} = \infty$$

ある $c > 0$, かつある $c > 0$ について,

$$\text{von Neumann [7] は } \dim H_{v_1} = \dim H_{v_2} = 2 \quad (v=1, 2, \dots) \text{ のとき,}$$

$$\lambda_{v_1} = 1 \text{ ならば, } M \text{ は I 型,}$$

$$\lambda_{v_1} = \lambda_{v_2} = 1/2 \text{ ならば, } M \text{ は II 型}$$

を示した.

$$\text{Pukánsky [6] は } \dim H_{v_1} = \dim H_{v_2} = 2 \quad (v=1, 2, \dots) \text{ のとき,}$$

$$\lambda_{v_1} = p, \lambda_{v_2} = q \quad (p, q > 0, p+q=1, p \neq q) \text{ ならば,}$$

$$M \text{ は III 型}$$

を示した。

Anaki [1], Bures [3] は上記 I 型のための必要十分条件を与えた。

Bures [3] は、

$n_1, n_2, \dots$ が有界のとき、II 型のための必要十分条件、

λ_{v1} が下に有界、 $\lambda_{v1}/\lambda_{vj}$ が下に有界（正の数で下から

おとえられたい）とき、M は III 型。

を示した。

Moore [5] は、上記 II 型のための必要十分条件、および、

λ_{v1} が下から正の数でおとえられたいとき、IV 型のための

必要十分条件

を与えた。

記号。以下、 $\sum, \prod$ は $v=1, 2, \dots$ に対する和および積を、

$\sum_j, \sum_k$ は、 $j, k=1, \dots, m_v$ ($m_v < \infty$ のとき)、または、

$j, k=1, 2, \dots$ ($m_v = \infty$ のとき) に対する和を表わす。また、

$I(v) = \{1, \dots, m_v\}$ ($m_v < \infty$ のとき)、または $= \{1, 2, \dots\}$

($m_v = \infty$ のとき)。

§ 1. 一般的準備

Lemma 1. いま、 $\dim H_{v1} = \dim H_{v2} = n_v = m_v$ とする。そ

のとき、M は、次のような測度空間 (Ω, μ) と、その上の

可測変換群 G を用いて, von Neumann [8] に δ, τ 構成される
 の Γ フクター空間同型である. (以下, $m_v < \infty$ とし書く.
 $m_v = \infty$ の場合は容易に書き直すことができる.)

$$\Omega_v = \{\omega_{vj} ; j=1, \dots, m_v\}, \quad \mu_v(\{\omega_{vj}\}) = \lambda_{vj}.$$

$$G_v = \{g_{v0}, g_{v1}, \dots, g_{vm_v-1}\} \quad \omega_{vj} g_{vk} = \omega_{v(j+k)} \quad (j+k \text{ は } \text{mod } m_v \text{ と考へる.})$$

$\Omega = \prod_v \Omega_v, \quad \mu = \prod_v \mu_v, \quad G = \prod_v' G_v$ (制限直積)
 G は, 各成分の上に対す G_v の作用に δ, τ , 自然に Ω
 上へ変換群と考へる.

(Bures [3], Lemma 5.2, Prop. 5.1)

Lemma 2.

$$H_{v1}^0 = \overline{\mathcal{D}} \{ \psi_{vij} ; j \in I(v) \}, \quad E_{v1} = \text{proj}(H_{v1}^0 \otimes H_{v2}) \text{ in } H_v.$$

とする. $E_{v1} \in M_v$.

$$\bar{E}_{v1} = E_{v1} \text{ の } H \text{ 上への拡張, } E = \prod_v \bar{E}_{v1} \quad \text{とする.}$$

$E \in M, \quad EH = \prod_v \otimes (H_{v1}^0, e_v), \quad (M)_E = (M)_{E_{v1}}$ の無限直積.

いま, $(M)_E$ の Γ フクター型が知られたとす. $((M)_E$ は
 Lemma 1 に δ, τ 測度空間から作られる Γ フクター空間同型
 であるから, その型は比較的に決定しやす.)

$(M)_E$ が I 型, II 型, III 型 なるに従って, M は, I, II, III 型.

$(M)_E$ が有限型かつスターであるとき, M がまた有限型であるための条件は, $\sum_v (1 - \frac{m_v}{n_v}) < \infty$

証明. 最後のところだけ証明すればよい. いずれかの $n_v = \infty$ ならば, M が無限型は明らか. 以下 $n_v < \infty$ とする.

$\sum_v (1 - \frac{m_v}{n_v}) = \infty$ ならば, $\prod_v \frac{n_v}{m_v} = \infty$. $\varepsilon = 2$, $A_1, A_2, \dots$ $\subset \{1, 2, \dots\}$ と, 互いに共通部分をもたない有限集合で, $\prod_{v \in A_k} \frac{n_v}{m_v} > 2$ ($k=1, 2, \dots$) なるものを選べば, $\prod_{v \in A_k} \otimes H_{v_i}$ は $F_k \in \prod_{v \in A_k} \otimes M_v$, $\dim R(F_k) = \prod_{v \in A_k} m_v$, $F_k \prod_{v \in A_k} \otimes E_{v_i} = 0$ なる如き射影作用素 F_k を含む. $\bar{G}_k = \bar{F}_k \prod_{v \in A_k} \bar{E}_{v_i}$ とすれば, $E, \bar{G}_1, \bar{G}_2$ は互いに直交する M の射影作用素で, 互いに同等. 故に, M は無限型.

$\sum_v (1 - \frac{m_v}{n_v}) < \infty$ のとき, M はとも角半有限. $(M)_E$ が有限型であるから, E は有限. M の次元関数 d と, $d(E) =$

$\prod_v \frac{m_v}{n_v}$ なる如く定める. $\varepsilon = 3/2$, $I = \sum_{(\varepsilon_v)} E_{(\varepsilon_v)}$ と表わす

れ. $\varepsilon = 1$ に, (ε_v) は 0 と有限個の 1 とからなつた列で,

$E_{(\varepsilon_v)} = \prod_v \otimes \bar{E}_{v_i}^{(\varepsilon_v)}$, $E_{v_i}^{(0)} = E_{v_i}$, $E_{v_i}^{(1)} = I_{v_i} - E_{v_i}$ とする. $E_{(\varepsilon_v)}$ は

すべて有限で, $d(E_{(\varepsilon_v)}) = d(E) \prod_{v=1}^{\infty} \left(\frac{n_v - m_v}{n_v} \right)^{\varepsilon_v} = \left(\prod_{v: \varepsilon_v=0} \frac{m_v}{n_v} \right) \times$

$\left(\prod_{v: \varepsilon_v=1} \left(1 - \frac{m_v}{n_v} \right) \right)$. しかるに, $d(I) = 1$ となり, M が有限型であることが知られる.

Lemma 3. $v=1, 2, \dots$ に對して, $I(v)$ の部分集合 $I'(v)$ で,

$$\sum_v \sum_{j \in I'(v)} \lambda_{vj} < \infty$$

を満たすものとして考えよう。 $I'(v) = I(v)$ ならば v は Π 既約元であるから、それは考慮外として、

$$J(v) = I(v) - I'(v) \neq \emptyset$$

とすると、 $j \in J(v)$ に対して、

$$\lambda'_{vj} = \lambda_{vj} / \sum_{k \in J(v)} \lambda_{vk}, \quad e'_v = \sum_{j \in J(v)} \lambda'_{vj}{}^{1/2} \phi_{vj} \otimes \phi_{vj}$$

とすれば、

$$H = \prod_v \otimes (H_v, e_v) = \prod_v \otimes (H_v, e'_v).$$

故に、 M はこのように基底ベクトルの変更によって変化したものが、さらに、定理の λ_{vj} が満たすおのあの条件も変化した(3), (4), (5)になる。

証明. 無限テニソル積が一収するのための条件は、

$\sum_v (1 - (e_v, e'_v))$ が収束することであるが、この場合、

$$\begin{aligned} \sum_v (1 - (e_v, e'_v)) &= \sum_v \left(1 - \sum_{j \in J(v)} \lambda_{vj}^{1/2} \lambda'_{vj}{}^{1/2} \right) = \sum_v \left(1 - \left(\sum_{j \in J(v)} \lambda_{vj} \right)^{1/2} \right) \\ &\leq \sum_v \left(1 - \sum_{j \in J(v)} \lambda_{vj} \right) = \sum_v \sum_{j \in I'(v)} \lambda_{vj} < \infty. \end{aligned}$$

(3), (4), (5) が変化したものとしてついでに後に用いるのは、

Ⅲ型条件のことにだけであるから、その場合を述べる。十分大

なる v に対して、 $\sum_{j \in J(v)} \lambda_{vj} \geq 1/2$ であるから、このとき、

$$\lambda_{vj} \lambda_{vk} \leq \lambda'_{vj} \lambda'_{vk} \leq 4 \lambda_{vj} \lambda_{vk} \quad (j, k \in J(v)).$$

よって、

$$\sum_v \sum_{j, k} \lambda_{vj} \lambda_{vk} \min \left\{ \left| \frac{\lambda_{vj}}{\lambda_{vk}} - 1 \right|^2, c \right\} \leq \sum_v \sum_{j, k \in J(v)} \lambda'_{vj} \lambda'_{vk} \min \left\{ \left| \frac{\lambda'_{vj}}{\lambda'_{vk}} - 1 \right|^2, c \right\}$$

$$+ 2c \sum_v \sum_{j \in I'(v)} \lambda_{vj} + c \sum_v \left(\sum_{j \in I'(v)} \lambda_{vj} \right)^2,$$

より、

$$\sum_v \sum_{j,k \in J(v)} \lambda'_{vj} \lambda'_{vk} \min \left\{ \left| \frac{\lambda'_{vj}}{\lambda'_{vk}} - 1 \right|^2, c \right\} \leq 4 \sum_v \sum_{j,k} \lambda_{vj} \lambda_{vk} \min \left\{ \left| \frac{\lambda_{vj}}{\lambda_{vk}} - 1 \right|^2, c \right\}.$$

したがって、 λ_{vj} について述べた (5) の条件と、 λ'_{vj} について述べた (5) の条件は同等。

さて、Lemma 1, 2 と、von Neumann の定理 (von Neumann [8]) によって、 M の フォクター型 の 分類 は、 Ω 上の 測度 に関し、2 次の 必要十分問題となる。

I 型 : μ は 本質的に (測度 μ の 部分を除いて) discrete は 測度 である。

II 型 : Ω 上の non-discrete は 有限測度 ρ で、 G 不変かつ μ と 同等なものがある。かつ、 $\sum_v \left(1 - \frac{m_v}{n_v}\right) < \infty$ 。

III 型 : Ω 上の σ 有限測度 ρ で、 G 不変かつ μ と 同等なものはない。

そこで、 Ω 上の 測度の 性質を調べる。

Lemma 4. Ω 上の σ 有限測度 ρ が G 不変であったことの必要十分条件は、 $\forall v (=1, 2, \dots)$ に対して、 $\rho = \rho_v \times \rho_v^*$ と表わされることである。ここに、 ρ_v は Ω_v の 各点に mass 1 とする 測度、 ρ_v^* は $\Omega_v^* = \prod_{i \neq v} \Omega_i$ 上の 測度で、 $G_v^* = \prod_{i \neq v} G_i$ に関して 不変なもの。(Moore [5])

証明 [⇐] p_v は G_v 不変. $\therefore p$ は G_v 不変. G は G_v で生成されたから, p は G 不変.

[⇒] $X \subset \Omega_v^*$ に対し, $p_v^*(X) = p(\{\omega_v\} \times X)$ となればよい.

以下, 簡単のため, $N = 1, 2, \dots$ に対し,

$$\begin{aligned}\omega_N &= (\omega_v; 1 \leq v \leq N), & \omega_N^* &= (\omega_v; v > N), & \omega &= (\omega_N, \omega_N^*) \\ \Omega_N &= \prod_{v=1}^N \Omega_v, & \Omega_N^* &= \prod_{v>N} \Omega_v, & \Omega &= \Omega_N \times \Omega_N^*, \\ \mu_N &= \prod_{v=1}^N \mu_v, & \mu_N^* &= \prod_{v>N} \mu_v, & \mu &= \mu_N \times \mu_N^*\end{aligned}$$

と書く. また, Ω_N, Ω_N^* 上の関数 $x_N(\omega_N), x_N^*(\omega_N^*)$ は, $\omega = (\omega_N, \omega_N^*)$ に対し, $x_N(\omega) = x_N(\omega_N), x_N^*(\omega) = x_N^*(\omega_N^*)$ と見做すことにし, Ω 上の関数と考へることにする. $\therefore$ 以上より, $L^2(\Omega_N, \mu_N)$ は $L^2(\Omega, \mu)$ の閉部分空間と考へることにできる.

Lemma 5. 直積測度の定義から, $L^2(\Omega, \mu) = \prod_{\mathbb{N}} (L^2(\Omega_v, \mu_v), 1)$
 $x_v \in L^2(\Omega_v, \mu_v), \|x_v\| = 1$ ($v = 1, 2, \dots$) に対し, $x(\omega) = \prod_v x_v(\omega_v) \in L^2(\Omega, \mu)$ であるための必要十分条件は,
 $\sum_v \|1 - x_v\|^2 = 2 \sum_v (1 - \mathcal{Q}(x_v, 1)) < \infty$, かつ, $\sum_v \mathcal{Q}(x_v, 1)$ が収束.

証明 $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{v=1}^N x_v = x$. $\therefore (x, 1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{v=1}^N (x_v, 1)$. 故に,
 $\prod_{v=1}^{\infty} (x_v, 1)$ は収束. 逆に, $\therefore$ 無限乗積が収束すれば,
 $\left\| \prod_{v=1}^N x_v - \prod_{v=1}^{N'} x_v \right\|^2 = 2 \left(1 - \mathcal{Q} \left(\prod_{v=N+1}^{N'} x_v, 1 \right) \right) \rightarrow 0$. ($N < N', N \rightarrow \infty$)

$\therefore x \in L^2(\Omega, \mu)$. $\prod_{v=1}^{\infty} (x_v, 1)$ の収束は上にあげた条件と同値

Lemma 6. Ω 上の直積測度 $\mu = \prod_v \mu_v$, $\rho = \prod_v \rho_v$ が同等であるための必要十分条件は, $(\mu_v(\Omega_v) = \rho_v(\Omega_v) = 1 \ (v=1, 2, \dots))$ とする.

$$(6) \quad \sum_v \left(1 - \int_{\Omega_v} \sqrt{\frac{d\rho_v}{d\mu_v}}(\omega_v) d\mu_v(\omega_v) \right) < \infty.$$

現在の場合, $\mu_v(\{\omega_{vj}\}) = \lambda_{vj}$, $\rho_v(\{\omega_{vj}\}) = \rho_{vj}$ とし,

$$(7) \quad \sum_v \left(1 - \sum_j (\lambda_{vj} \rho_{vj})^{1/2} \right) < \infty. \quad (\text{角谷 [4]})$$

証明 [⇐] $x_v(\omega_v) = \frac{d\rho_v}{d\mu_v}(\omega_v)$ とすれば, $\sqrt{x_v} \in L^2(\Omega_v, \mu_v)$, $\|\sqrt{x_v}\| = 1$. (6) は, $\sum_v (1 - (\sqrt{x_v}, 1)) < \infty$ と同じことであるから, Lemma 5 により, $y = \prod \otimes \sqrt{x_v} \in L^2(\Omega, \mu)$. $\therefore \|y\| = 1$, $y \geq 0$ (a.e.). 故に, $d\bar{\rho}(\omega) = (y(\omega))^2 d\mu(\omega)$ は Ω 上の σ 有限測度. かつ, $\bar{\rho}(\Omega) = 1$. 以上, Ω_N 上の矩形集合 $X_N = \prod_{v=1}^N X_v$

に対しては, $X = X_N \times \Omega_N^*$, $X = X_{N'} \times \Omega_{N'}^*$ ($N \leq N'$) とし,

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(X) &= \int_X (y(\omega))^2 d\mu(\omega) = \lim_{N \leq N' \rightarrow \infty} \int_{X_N} x_{N'}(\omega_{N'}) d\mu_{N'}(\omega_{N'}) = \int_{X_N} x_N(\omega_N) d\mu_N(\omega_N) \\ &= \rho_N(X_N) = \rho(X). \quad \therefore \bar{\rho} = \rho. \quad \therefore \rho < \mu. \quad \text{また,} \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_v} \sqrt{\frac{d\rho_v}{d\mu_v}}(\omega_v) d\mu_v(\omega_v) = \int_{\Omega_v} \sqrt{\frac{d\rho_v}{d\mu_v}}(\omega_v) \frac{d\mu_v}{d\rho_v}(\omega_v) d\rho_v(\omega_v) = \int_{\Omega_v} \sqrt{\frac{d\mu_v}{d\rho_v}}(\omega_v) d\rho_v(\omega_v).$$

故に, μ と ρ の分割は入れかえられる. 故に $\rho \sim \mu$.

[⇒] (6) の級数が発散するとき, ρ, μ が互いに特異であることは明らか. $\forall \varepsilon > 0, \exists N: \int_{\Omega_N} \sqrt{\frac{d\rho_N}{d\mu_N}}(\omega_N) d\mu_N(\omega_N) = \prod_{v=1}^N \int_{\Omega_v} \sqrt{\frac{d\rho_v}{d\mu_v}}(\omega_v) d\mu_v(\omega_v) < \varepsilon$. ($\because$ 仮定により, $\prod_{v=1}^{\infty} \dots = 0$.)

$X_N = \{\omega_N; \frac{d\rho_v}{d\mu_v}(\omega_v) \geq 1\}$ とすれば, $\mu_N(X_N) < \varepsilon$. 一方,

$$p_N(X_N^c) = \int_{X_N^c} dp_N(\omega_N) = \int_{X_N^c} \frac{dp_N(\omega_N)}{d\mu_N(\omega_N)} d\mu_N(\omega_N) \leq \int_{X_N^c} \sqrt{\frac{dp_N(\omega_N)}{d\mu_N(\omega_N)}} d\mu_N(\omega_N)$$

$$< \varepsilon$$
 故に, $X = X_N \times \Omega_N^*$ は, $\mu(X) < \varepsilon$, $p(X^c) < \varepsilon$ ε 任意
 故に, p, μ は互いに特異.

§ 2. I 型の条件.

$\omega = (\omega_{j_v}; v=1, 2, \dots)$ に對して, $\mu(\{\omega\}) = \prod \mu_v(\{\omega_{j_v}\})$
 $= \prod \lambda_{j_v}$. この値が一番大きくなるのは $j_v = 1$ ($v=1, 2, \dots$) のとき.
 したがって, μ が本質的に discrete 正測度であるための条件は,
 $\prod \lambda_{v1} > 0$, かつ $\sum (1 - \lambda_{v1}) < \infty$.

§ 3. II 型の条件.

$[\Rightarrow]$ m_v に関する条件は trivial. p は Ω 上の G 不変な有限測度とする. すべて v について, $m_v < \infty$ であるから,
 Ω_v と G_v と同一視して, 有限アーベル群と見ることもできる.
 そうすれば Ω はコンパクト・アーベル群となり, G はその稠密な部分群. ことから p が Ω のハール測度であることが知られる.
 (例えば, p のフーリエ変換を考へればよい.)
 $p(\Omega) = 1$ としておいてよい. $p_v(\{\omega_{j_v}\}) = 1/m_v$ ($v=1, \dots, m_v$)
 は測度 p_v が Ω_v 上に考へれば, $p = \prod p_v$ である. 故に,
 Lemma 6 により, $\sum_v (1 - \sum_j (\frac{\lambda_{j_v}}{m_v})^{1/2}) = \frac{1}{2} \sum_v ((\frac{1}{m_v})^{1/2} - \lambda_{j_v}^{1/2})^2$
 $< \infty$. ($p \sim \mu$ であるから) かつ, Lemma 2 より, $\sum_v (1 - \frac{m_v}{n_v})$

$$\begin{aligned}
&< \infty. \quad \therefore \left(\sum_{\nu} \sum_{j=1}^{n_{\nu}} \left(\left(\frac{1}{n_{\nu}} \right)^{1/2} - \lambda_{\nu j}^{1/2} \right)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{\nu} \sum_{j=1}^{m_{\nu}} \left(\left(\frac{1}{m_{\nu}} \right)^{1/2} - \lambda_{\nu j}^{1/2} \right)^2 \right)^{1/2} \\
&+ \left(\sum_{\nu} \sum_{j=1}^{n_{\nu}} \left(\left(\frac{1}{n_{\nu}} \right)^{1/2} - \left(\frac{1}{m_{\nu}} \right)^{1/2} \right)^2 + \sum_{\nu} \frac{n_{\nu} - m_{\nu}}{n_{\nu}} \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{\nu} \sum_{j=1}^{m_{\nu}} \left(\left(\frac{1}{m_{\nu}} \right)^{1/2} - \lambda_{\nu j}^{1/2} \right)^2 \right)^{1/2} + \left(3 \sum_{\nu} \left(1 - \frac{m_{\nu}}{n_{\nu}} \right) \right)^{1/2} < \infty.
\end{aligned}$$

[$\Leftarrow$] Lemma 6 に $\delta = 2$, μ は上 2 区間の p と同等. $\delta = 2$, $\infty > \sum_{\nu} \sum_{j=1}^{n_{\nu}} \left(\left(\frac{1}{n_{\nu}} \right)^{1/2} - \lambda_{\nu j} \right) \geq \sum_{\nu} \left(1 - \frac{m_{\nu}}{n_{\nu}} \right)$. $\therefore \frac{m_{\nu}}{n_{\nu}} \rightarrow 1$.
 故に, 無限に多 $< n_{\nu} > 1$. $\therefore p$ は non-discrete.
 $\delta = 2$, $p(\Omega) = 1$.

§ 4. III 型の条件. [$\Leftarrow$]

M が半有限であるとする. すなわち, Ω 上に μ と同等の G 不変測度 ρ が存在し $\delta = 2$,

$$(8) \quad \sum_{\nu, j, k} \lambda_{\nu j} \lambda_{\nu k} \min \left\{ \left| \frac{\lambda_{\nu j}}{\lambda_{\nu k}} - 1 \right|^2, c \right\} < \infty$$

を示す.

Lemma 4 を繰返して用いることにし, $\rho = \prod_{\nu=1}^N \rho_{\nu} \times \rho_N^*$ と書くことにする. ρ_{ν} は Ω_{ν} 上の各点に mass 1 と与える測度, ρ_N^* は Ω_N^* 上の G_N^* 不変測度である. $\therefore$ ρ_{ν} は ρ_{ν}^* と同等の測度とある, $\chi(\omega) = \frac{d\rho}{d\mu}(\omega)$, $\chi_{\nu}(\omega_{\nu}) = \frac{d\rho_{\nu}}{d\mu_{\nu}}(\omega_{\nu})$, $\chi_N^*(\omega_N^*) = \frac{d\rho_N^*}{d\mu_N^*}(\omega_N^*)$ とある. $\therefore$ 任意の実数 t に対し, 関数 $\chi^t(\omega)$, $\chi_{\nu}^t(\omega_{\nu})$, $\chi_N^{*t}(\omega_N^*)$ は, $\exp(2\pi i t(\cdot))$ の $(\cdot)$ にそれぞれ $\chi(\omega)$, $\chi_{\nu}(\omega_{\nu})$, $\chi_N^*(\omega_N^*)$ を代入したものに t を定義する. $\therefore$ すれば, $\chi^t(\omega) = \prod_{\nu=1}^N \chi_{\nu}^t(\omega_{\nu}) \cdot \chi_N^{*t}(\omega_N^*)$.

これらの関数は, $\chi \in L^2(\Omega, \mu)$ に属する単位ベクトルと見
作ることができる.

$P_N \in L^2(\Omega)$ の $L^2(\Omega_N)$ 上への射影作用素とすれば,

$$P_N(\chi^t) = \left(\prod_{v=1}^N \chi_v^t \right) \cdot (\chi_N^{*t}, 1). \quad \text{よって, } \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(\chi^t) = \chi^t \quad (32).$$

$$\therefore \lim_{N \rightarrow \infty} \|P_N \chi^t\| = \lim_{N \rightarrow \infty} |(\chi_N^{*t}, 1)| = 1. \quad \text{よって, } N \text{ が大きければ}$$

$$\text{は, } (\chi_v^t, 1) \neq 0 \quad \text{となり, } \alpha_v^t (\chi_v^t, 1) > 0 \quad \text{として } \alpha_v^t = \exp(2\pi i t \beta_v^t)$$

$$\text{と定めることができる. } \gamma_N^t = \left(\prod_{v=1}^N \alpha_v^t \right)^{-1} (\chi_N^{*t}, 1) \quad \text{とすれば,}$$

$$N \text{ が大きければ, } \gamma_N^t \text{ は一定の偏角をもち, } \gamma_N^t = \delta^t$$

$$= \overline{\gamma_N^t} / |\gamma_N^t| \quad \text{とおけば, } \prod_{v=1}^N \alpha_v^t \chi_v^t = |\gamma_N^t|^{-1} P_N(\delta^t \chi^t) \rightarrow \delta^t \chi^t.$$

$$\text{故に, Lemma 5 より, } \sum_v \|1 - \alpha_v^t \chi_v^t\|^2 < \infty. \quad \text{よって, } \chi_v(\omega_j)$$

$$= 1/\lambda_{vj} \quad \text{ならば } \text{これを用いると,}$$

$$\sum_v \sum_j \lambda_{vj} |\exp(2\pi i t (\beta_v^t - \log \lambda_{vj})) - 1|^2 < \infty \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が得られることは明らかである.

$$\therefore \sum_{j,k} \lambda_{vj} \lambda_{vk} |\exp(2\pi i t (\log \lambda_{vj} - \log \lambda_{vk})) - 1|^2$$

$$\leq 2 \sum_{j,k} \lambda_{vj} \lambda_{vk} (|\exp(2\pi i t (\beta_v^t - \log \lambda_{vj})) - 1|^2 + |\exp(2\pi i t (\beta_v^t - \log \lambda_{vk})) - 1|^2)$$

$$4 \sum_{j,k} \lambda_{vj} |\exp(2\pi i t (\beta_v^t - \log \lambda_{vj})) - 1|^2 < \infty$$

$$\text{よって, } 2 \sum_v \xi_v (1 - \cos t \eta_v) = \sum_v \xi_v |\exp i t \eta_v - 1|^2 \quad (\xi_v > 0) \quad \text{が}$$

$$\lambda^2 \text{ の実数 } t \text{ について 4 収束するならば, } \sum_v \xi_v \min\{|\eta_v|^2, c\}$$

$$\text{が } c > 0 \text{ について 2 収束するならば } c > 0 \text{ について 4 収束}$$

$$\text{する, } \sum_{j,k} \lambda_{vj} \lambda_{vk} \min\{|\log \lambda_{vj} - \log \lambda_{vk}|^2, c\} \quad \text{は } c > 0 \text{ について 4 収束}$$

$$\text{する, よって, (8) と同値である.}$$

詳しくは, Moore [5], 以下 [9].

§5. III 型の条件, $[\Rightarrow]$

(8) が成立しているとき, M が半有限であることを示す.

まず,

$$(9) \quad \exists \varepsilon > 0 : \frac{\lambda_{vj}}{\lambda_{vk}} \geq \varepsilon \quad (v=1, 2, \dots; j, k \in I(v))$$

が成立している場合を考へる. このときは, (8) において

c の $\min$ をとる必要がなく,

$$\sum_{v,j,k} \lambda_{vj} \lambda_{vk} \left| \frac{\lambda_{vj}}{\lambda_{vk}} - 1 \right|^2 < \infty$$

が主張されることになる. いま, 2 乗平均偏差に因りて, 平均値のまわりのずれが最小であることを利用すれば,

$$\begin{aligned} \infty &> \sum_{v,j,k} \lambda_{vj} \lambda_{vk} \left| \frac{\lambda_{vj}}{\lambda_{vk}} - 1 \right|^2 = \sum_{vj} \lambda_{vj} \sum_{k=1}^{m_v} \lambda_{vk} \left| \frac{\lambda_{vj}}{\lambda_{vk}} - 1 \right|^2 \\ &\geq \sum_{vj} \lambda_{vj} \sum_k \lambda_{vk} \left| \frac{\lambda_{vj}}{\lambda_{vk}} - m_v \lambda_{vj} \right|^2 = \sum_{vj} \lambda_{vj} \sum_k \lambda_{vj} \frac{\lambda_{vj}}{\lambda_{vk}} |m_v \lambda_{vk} - 1|^2 \\ &\geq \varepsilon^2 \sum_{vj} \lambda_{vj} \sum_k \frac{1}{m_v} |(m_v \lambda_{vk})^{1/2} - 1|^2 \\ &= \varepsilon^2 \sum_{vj} \lambda_{vj} \left| \left(\frac{1}{m_v} \right)^{1/2} - \lambda_{vj}^{1/2} \right|^2. \end{aligned}$$

($\because$ (9) より, $\lambda_{vj} \geq \varepsilon/m_v$ が得られることを用いた.)

故に, II₁ 型条件から, Lemma 2 の $(M)_E$, したがって M が半有限 $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}$ - であることが知られた.

よって, 一般の場合に, (9) が成立するように問題を變形できればよい.

まず, §4 の最後の数行から, (8) と,

$$\sum_{j,k} \lambda_{vj} \lambda_{vk} \left| \exp(2\pi i t (\log \lambda_{vj} - \log \lambda_{vk})) - 1 \right|^2 < \infty \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が同値であることは知られる。そこで、

$$\varphi_v^t = |\varphi_v^t| \exp(-2\pi i t \log \lambda_{vk}) = \sum_k \lambda_{vk} \exp(-2\pi i t \log \lambda_{vk})$$

とあるから、これは、

$$(10) \quad \sum_j \lambda_{vj} \left| \exp(2\pi i t (\beta_v^t - \log \lambda_{vj})) - 1 \right|^2 < \infty \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が導かれる。

ここで、 $t = 1/3$ とし、この t に対し、

$$I'(v) = \{j; \left| \exp(2\pi i t (\beta_v^t - \log \lambda_{vj})) - 1 \right| \geq \frac{1}{2}\}$$

を定めれば、(10) から、

$$\sum_v \sum_{j \in I'(v)} \lambda_{vj} < \infty.$$

したがって、Lemma 3 を用いて、 $I'(v)$ に属するものは除いて

し、

$$\left| \exp(2\pi i t (\beta_v^t - \log \lambda_{vj})) - 1 \right| < \frac{1}{2} \quad (v=1, 2, \dots; j \in I(v))$$

が成立する。また、 $t = 1/3$ とし、 $t = 1/3$ とする。このとき、

$$\left| \exp(2\pi i t (\log \lambda_{vj} - \log \lambda_{vk})) - 1 \right| < 1$$

であるから、適当な整数 n_{jk} に対し、

$$\left| 2\pi t (\log \lambda_{vj} - \log \lambda_{vk}) - 2n_{jk}\pi \right| < \frac{\pi}{3}$$

が成立する。ここで $t = 1/3$ とし、 $t = 1/3$ とする。したがって、

$$\left| (\log \lambda_{vj} - \log \lambda_{vk}) - 3n_{jk} \right| < \frac{1}{2}.$$

これは、 $\{\lambda_{vj}; j \in I(v)\}$ は " v の組 $\{\lambda_{vj}; j \in I(v, p)\}$

($p=1, \dots, l_v$) に類別され、

(11), 同じ組の中では $|\log \lambda_{vj} - \log \lambda_{vk}| < 1$,

違う組の間では $|\log \lambda_{vj} - \log \lambda_{vk}| > 1$

が成立することに注意。この組の中で、有限個の v を除いては、

$$\sum_{j \in I(v, p_v)} \lambda_{vj} \geq \frac{1}{3}$$

を満たす p_v が存在することから (8) を用いて知られる。この

$I(v, p_v)$ を考えれば、やはり (8) を用いて、

$$\sum_v \sum_{j \in I(v, p_v)} \lambda_{vj} < \infty.$$

したがって、Lemma 3 によつて、 $\{\lambda_{vj} : j \in I(v, p_v)\}$ を考え

ればよいことに注意が、このときは、(11) によつて (9) が成

立っていることに注意から、既に示したことによつて、

M は半有限である。

詳細は、竹之内 [9]。

References

- [1] H. Araki: A lattice of von Neumann algebras associated with the quantum theory of a free Bose field, Journal of Math. and Phys., Vol. 4 (1963), pp. 1343-1362.
- [2] H. Araki and E. J. Woods: A classification of factors, To appear.
- [3] D. J. C Bures: Certain factors constructed as infinite tensor products, Comp. Math., Vol. 15 (1963), pp. 169-191.

- [4] S. Kakutani: On equivalence of infinite product measures,
Ann. Math., Vol. 49 (1948), pp. 214-224.
- [5] C. C. Moore: Invariant measures on product spaces, Proc.
of the Fifth Berkeley Symposium, 1967. Vol. II,
Part 2, pp. 447-459.
- [6] L. Pukánsky: Some examples of factors, Publ. Math.
Debrecen, Vol. 4 (1956), pp. 135-156.
- [7] J. von Neumann: On infinite direct products, Collected
Papers, Vol. 3, pp. 323-399.
- [8] J. von Neumann: On rings of operators III, Collected
Papers, Vol. 3, pp. 161-228.
- [9] O. Takenouchi: On type classification of factors constructed
as infinite direct products, To appear.