

Applications of the Schwarz Lemma in $\mathbb{C}^n$

東京電機大学 鶴見和之 (Kazuyuki Tsurumi)

1.

単位円内の正則関数の値域の決定は、複素力学系、単葉関数論等において、重要である。その決定において重要な役割を演ずるのが Schwarz Lemma である。

本講では、 $\mathbb{C}^n$ の Schwarz Lemma による、 $\mathbb{C}^n$ の単位球 B から $\mathbb{C}^n$ への正則写像の値域の決定を与える。これは単葉写像の考察の一助となるものである。併せて、他の Schwarz Lemma の応用をも考察する。

2.

$\mathbb{C}^n$ の実を列ベクトル $z := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ で表し、 $z' := (z_1, \dots, z_n)$

(転置), $z^* := (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ (転置共役) と表す。

$z, w \in \mathbb{C}^n$ に対して、 $\langle z, w \rangle := w^* z = \sum \bar{w}_j z_j$,

$\|z\| := \sqrt{z^* z} := \sum |z_j|^2$ とおく。また、 $B_1 :=$

$= \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$ ($1 > 0$), $B := B_1$ とおく。

$a \in B$ に対して

$$P(z) := P_a(z) := \frac{a^* z}{\|a\|^2} a \quad (a \neq 0), \quad P_0(z) := 0$$

$$\rho_a := \sqrt{1 - \|a\|^2}, \quad Q_a(z) := (I - P)(z) \quad (I: \text{identity})$$

$$g_a(z) := \frac{a - P_a(z) - \rho_a Q_a(z)}{1 - a^* z}$$

とおく。これはまた、次の様にも書ける:

$$g_a(z) = \sqrt{1 - \|a\|^2} (I - a a^*)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{z - a}{1 - a^* z},$$

このとき、次の定理が成り立つ:

定理 A. ([2], p. 26, Theorem 2.2.2).

次の事が成り立つ:

$$(i) \quad g_a(0) = a, \quad g_a(a) = 0$$

$$(ii) \quad g'_a(0) = -\rho_a^2 P - \rho_a Q, \quad g'_a(a) = -\frac{P}{\rho_a^2} - \frac{Q}{\rho_a}$$

$$(iii) \quad 1 - \langle g_a(z), g_a(w) \rangle = \frac{(1 - \|a\|^2)(1 - \langle z, w \rangle)}{(1 - \langle z, a \rangle)(1 - \langle a, w \rangle)} \\ (z, w \in B)$$

(iv) 特に,

$$1 - \|g_a(z)\|^2 = \frac{(1 - \|a\|^2)(1 - \|z\|^2)}{|1 - \langle z, a \rangle|^2}$$

(v) $g_a(z)$ は involution である。

(vi) $g_a(z)$ は B の automorphism であり, $\bar{B}$ から $\bar{B}$ への同相写像である。

定理 B. ([2], p. 161, Theorem 8.1.2). Ω_1 を $\mathbb{C}^n$ の balanced な領域とし, Ω_2 を $\mathbb{C}^m$ の balanced, 凸, 有界な領域とする。 $F: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ を正則写像とする。

このとき,

(i) $F'(0)$ は Ω_1 を Ω_2 に写す。

(ii) $F(0) = 0$ ならば, $F(\gamma \Omega_1) \subset \gamma \Omega_2$ ($0 < \gamma \leq 1$)

である。

定理 C. ([2], p. 162, Theorem 8.1.3). B を $\mathbb{C}^n$ の単位球, $\tilde{B}$ を $\mathbb{C}^m$ の単位球とし, $F: B \rightarrow \tilde{B}$ を正則写像で, $F'(0)$ が $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^m$ への正則写像ならば,

$$F(z) = F'(0)z \quad (z \in B)$$

が成り立つ。

定理 D. ([2], p. 163, Theorem 8.1.4). $f: B \rightarrow B$, $a \in B$ とおくと,

$$\|g_{f(a)}(f(z))\| \leq \|g_a(z)\|$$

これは次の様に書ける;

$$\frac{|1 - \langle f(z), f(a) \rangle|^2}{(1 - \|f(z)\|^2)(1 - \|f(a)\|^2)} \leq \frac{|1 - \langle z, a \rangle|^2}{(1 - \|z\|^2)(1 - \|a\|^2)}.$$

3.

$\mathcal{H}(B)$ を B から $\mathbb{C}^n$ への正則写像の全体.

定理 1. $f(z) \in \mathcal{H}(B)$, $\|f(z)\| < 1$, $0 < r < 1$ ならば, $z \in B$, ($\|z\| = r$) に対して, 次の式が成り立つ:

$$\frac{\|f(0)\| - r}{1 - \|f(0)\|r} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\|f(0)\| + r}{1 + \|f(0)\|r}$$

(証明) 定理 D において, $a = 0$ とおくと

$$\frac{|1 - \langle f(z), f(0) \rangle|^2}{(1 - \|f(z)\|^2)(1 - \|f(0)\|^2)} \leq \frac{1}{(1 - \|z\|^2)}$$

ここで, $\|z\| = r$ より

$$(1) \quad \begin{aligned} & |1 - \langle f(z), f(0) \rangle|^2 (1 - r^2) \\ & \leq (1 - \|f(z)\|^2)(1 - \|f(0)\|^2) \end{aligned}$$

また, $|\langle f(z), f(0) \rangle| \leq \|f(z)\| \|f(0)\|$ より

$$(2) \quad (1 - \|f(z)\| \|f(0)\|)^2 \leq |1 - \langle f(z), f(0) \rangle|^2$$

(1), (2) より, 次の式を得る:

$$(1 - \|f(z)\| \cdot \|f(0)\|)^2 (1 - \gamma^2)$$

$$\leq (1 - \|f(z)\|^2)(1 - \|f(0)\|^2)$$

$$\therefore (1 - \|f(z)\| \|f(0)\|)^2 - (1 - \|f(z)\|^2)(1 - \|f(0)\|^2)$$

$$= \|f(z)\|^2 - 2\|f(z)\| \cdot \|f(0)\| + \|f(0)\|^2$$

$$= (\|f(z)\| - \|f(0)\|)^2$$

$$\leq \gamma^2 (1 - \|f(z)\| \cdot \|f(0)\|)^2$$

$$\therefore -\gamma (1 - \|f(z)\| \|f(0)\|) \leq \|f(z)\| - \|f(0)\|$$

$$\leq \gamma (1 - \|f(z)\| \|f(0)\|)$$

よより

$$\|f(z)\| (1 + \gamma \|f(0)\|) \leq \gamma + \|f(0)\|$$

$$\|f(z)\| (1 - \gamma \|f(0)\|) \geq \gamma - \|f(0)\|$$

$$\therefore \frac{\gamma - \|f(0)\|}{1 - \gamma \|f(0)\|} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\gamma + \|f(0)\|}{1 + \gamma \|f(0)\|} \quad \square$$

定理 2. $f(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$, $\|f(z)\| < M$, $0 < \gamma < 1$
 ならば, $z \in \mathcal{B}$ ($\|z\| = \gamma$) に対して, 次の式が成り立
 つ:

$$(3) \quad \frac{M(\|f(0)\| - M\gamma)}{M - \|f(0)\|\gamma} \leq \|f(z)\| \leq \frac{M(\|f(0)\| + M\gamma)}{M + \|f(0)\|\gamma}$$

(証明) $g(z) = \frac{f(z)}{M}$ とおくと, 定理 1 より,

$$\frac{\|g(0)\| - \gamma}{1 - \|g(0)\| \gamma} \leq \|g(z)\| \leq \frac{\|g(0)\| + \gamma}{1 + \|g(0)\| \gamma}$$

$$\therefore \frac{\frac{\|f(0)\|}{M} - \gamma}{1 - \frac{\|f(0)\|}{M} \gamma} \leq \frac{\|f(z)\|}{M} \leq \frac{\frac{\|f(0)\|}{M} + \gamma}{1 + \frac{\|f(0)\|}{M} \gamma}$$

これより, (3)式が得られる。 $\square$

また, $f(z) \in \mathcal{H}(B)$ の零点, 不動点に関して, 次の定理が成り立つ:

定理 3 ([6], p.40, Theorem 1) $f(z) \in \mathcal{H}(B)$,
 $f: B \rightarrow B$, $f(0) \neq 0$ ならば, $f(z)$ は $B_{\|f(0)\|}$ に零点を持つ。もし, f が automorphism ならば, $f(z)$ は $B_{\|f(0)\|}$ の境界上に零点を持つ。

定理 4. ([6], p.41, Theorem 3), $f(z) \in \mathcal{H}(B)$,
 $f: B \rightarrow B$, $f(0) \neq 0$ ならば, $f(z)$ は B_γ 内に不動点を持つ。ここで

$$\gamma := \frac{1 - \sqrt{1 - \|f(0)\|^2}}{\|f(0)\|} \quad \left(= \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \|f(0)\|^2}} \right).$$

文 献

- [1] P. L. Duren : Univalent Functions, Springer Verlag (1983)
- [2] W. Rudin : Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag (1980)
- [3] H. S. Shapiro : The Schwarz Function and its Generalization to Higher Dimensions, John-Wiley & Sons, (1992).
- [4] M. Tsuji : Potential Theory in Modern Function Theory, Maruzen Co. LTD, (1959)
- [5] 辻正次 : 複素函数論, 槇書店 (1971).
- [6] K. Tsurumi and H. M. Srivastava : The Fixed-Points and Zeros of Holomorphic Self-Maps of the Unit Ball in $\mathbb{C}^n$, Res. Reports of Tokyo Denki University (1995) 39 — 45.