

2次元Dirac方程式の経路積分について

北大 理 一瀬 孝

要旨.

時空2次元Dirac方程式の解の経路積分 (path integral) 表示を与える。それは熱方程式に対する Feynman-Kac 公式と類似点を持つが、構成した、経路の空間上の measure は, Wiener measure とは別のものである。

§1 では, Feynman 経路積分及び Feynman-Kac 公式について概説し, §2 では, 時空2次元Dirac方程式の解の経路積分表示を与え, §3 では, §2の結果の証明の概略を述べる。

§1. 序.

Feynman [3, 4] は, potential $V(x)$ の中で運動する質量 m の粒子に対する Schrödinger 方程式 (Planck 定数を1とする)

$$(1.1) \quad \begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = \left[-\frac{1}{2m} \Delta + V(x) \right] \varphi(t, x), & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3 \\ \varphi(0, x) = g(x) \end{cases}$$

の解を物理的直観から次のように書き下した:

$$(1.2) \quad \varphi(t, x) = \int e^{i \int_0^t \left[\frac{m}{2} \dot{X}(\tau)^2 - V(X(\tau)) \right] d\tau} g(X(0)) \mathcal{Q}(X(\cdot))$$

ここに, $\mathcal{Q}(X(\cdot))$ は時刻 0 に $\mathbb{R}^3$ のある点 $X(0)$ を出発し時刻 t に x に至る経路 $X(\tau)$ 達の空間上の一様"測度"であって, 形式的には,

$$\mathcal{Q}(X(\cdot)) = \prod_{0 \leq \tau \leq t} dX(\tau)$$

である. これが "Feynman 経路積分" である. 数学的には, (1.2) の"積分" 及び"測度" $\mathcal{Q}(X(\cdot))$ の意味が曖昧で, 事実このような一様測度は存在しない. しかし, この表示は, 捨て難たき美しさを持ち, 形式的な議論によつてではあるが, 色々なことを直接^(説明)する威力を持, ているので, 今日まで多くの数・物理学者の興味を引いてきた.

Feynman 経路積分の数学的定式化の問題は, $\mathcal{Q}(X(\cdot))$ が経路の空間上の一様測度として存在し得ないので, (1.2) の適当な近似であつて極限に於て表示 (1.2) を回復していると思われるようなものを考えることになる. 例えば, Trotter 積公式を用いる方法 (Nelson [9]), Feynman-Kac 公式からの解析接続による方法 (Nelson [9]), 一般化された複素測度

による方法 (K. Itô [7]) 又は, Fresnel 積分による方法 (Albeverio & Høegh-Krohn [1]), 有限次元振動積分による近似 (Fujiwara [5]) は, このような考え方に基いている. 他方, Brown運動の微分の2次の汎関数を用いる Streit-Hida [10] は, 経路積分としての測度を特に意識したものである.

さて, (1.1), (1.2) に於て, 所謂 Euclid 化と云う手続 $dt \rightarrow (-i)dt$ を施せば, Schrödinger 方程式 (1.1) は, 熱方程式

$$(1.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = \left[\frac{1}{2m} \Delta - V(x) \right] \varphi(t, x) \\ \varphi(0, x) = g(x) \end{cases}$$

に移り, "積分" (1.2) は,

$$(1.4) \quad \varphi(t, x) = \int e^{-\int_0^t \left[\frac{m}{2} \dot{X}(\tau)^2 + V(X(\tau)) \right] d\tau} g(X(0)) \prod_{0 \leq \tau \leq t} dX(\tau)$$

に移る. もし, (1.4) に於て, 連続ではあるが微分不可能な経路 $X(\tau)$ を主に考慮しなければならないとすれば, $e^{-\int_0^t \frac{m}{2} \dot{X}(\tau)^2 d\tau} = 0$ と考えられるので, $\prod_{0 \leq \tau \leq t} dX(\tau)$ の ∞ と合わせたものを考えれば, 経路の空間上の真の測度が構成されるのではないか. 幸甚にこれは可能であって, こうして作られたものが Brown運動の経路の空間上の Wiener measure $\mu_{t,x}$ であり, それを用いると, (1.3) の解は,

$$(1.5) \quad \varphi(t, x) = \int_{C([0, t]; \mathbb{R}^3), X(t)=x} e^{-\int_0^t V(X(\tau)) d\tau} g(X(0)) d\mu_{t,x}(X)$$

と exact に表示することができる。これは、(3) つかう Feynman-Kac 公式 ([8]) と呼ばれている公式

$$(1.6) \quad \varphi(t, x) = \int_{C([0, t]; \mathbb{R}^3), X(0)=x} e^{-\int_0^t V(X(\tau)) d\tau} g(X(t)) d\mu_{0,x}(X)$$

とは、少し異なるが、その一種と見なすことができる。

(1.3) の $V(x)$ が t -dependent のとき ($V(t, x)$ のとき), (1.5) は, $\int_0^t V(X(\tau)) d\tau$ を $\int_0^t V(\tau, X(\tau)) d\tau$ とおき換えれば, (1.3) の解を与えるが, (1.6) では, $\int_0^t V(X(\tau)) d\tau$ を $\int_0^t V(t-\tau, X(\tau)) d\tau$ とおき換えなければならぬ。

本講演では, Dirac 方程式に対して, 経路の空間上の countably additive measure を構成するが, それは, (1.5), (1.6) を得たと同じ観点から行われるのである。

§2. Dirac 方程式.

Dirac 方程式は, 4次元時空相対論的量子力学の方程式である。ここでは, 時空2次元 Dirac 方程式を次の形で考える:

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = [-\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} - i A_1(t, x) \right) - i m \beta + i A_0(t, x)] \varphi(t, x), \\ t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

α, β は, 2×2 Hermitian symmetric 行列であって, $\alpha^2 = \beta^2 = 1$, $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$ を満たすものである。 m は粒子の静止質量であり, 光速度 c , Planck 定数 $\hbar$ は 1 とした。 $A_1(t, x)$,

$A_0(t, x)$ は, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の実数値関数である.

(2.1) に於て変数変換 $t \rightarrow x_0, x \rightarrow x_1$ をして, 然る後果めて $x = (x_0, x_1)$ とおくと,

$$(2.2) \quad iH\psi(x) \equiv \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - iA_0(x) \right) + d \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - iA_1(x) \right) + im\beta \right] \psi(x) = 0, \\ x \in \mathbb{R}^2$$

を得る. $A(x) = (A_0(x), A_1(x))$ とおく.

我々の目的は, (2.2) の Green 関数の経路積分表示を与えることである. その為に proper time s を次のように導入し Cauchy 問題

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} \psi(s, x) = iH\psi(s, x), & s \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2 \\ \psi(0, x) = g(x) \end{cases}$$

を考えよう. 連続経路 $X: [0, s] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 全体の Banach 空間を $C([0, s]; \mathbb{R}^2)$ で表わす.

(2.3) の解に対して, 次のような経路積分表示を与えることができる ([6]).

Theorem. $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C^1 とする. $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)^2$ とする. そのとき, 任意の固定した $(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, s > 0$, に対して $C([0, s]; \mathbb{R}^2)$ 上に一意的な countably additive, 2×2 matrix valued measure $\nu_{t, x}$ が存在して,

$$(2.4) \quad \psi(s, x) = (e^{isH} g)(x) = \int_{C([0, s]; \mathbb{R}^2)} d\mathcal{V}_{s, x}(X) e^{i \int_0^s A(X(\tau)) dX(\tau)} g(X(0))$$

が成立する. $\mathcal{V}_{s, x}$ の support は,

$$(2.5) \quad \left\{ X \in C([0, s]; \mathbb{R}^2); \begin{array}{l} X(s) = x, \text{ and } X(b) - X(a) = -(b-a), \\ |X_1(b) - X_1(a)| \leq |b-a| \text{ for } 0 \leq a < b \leq s \end{array} \right\}$$

の上にある. 但し, $X(\tau) = (X_0(\tau), X_1(\tau))$. 特に, $\text{supp } \mathcal{V}_{s, x}$ は, Lipschitz 連続な経路 $X(\tau)$ 達 (Lipschitz 定数 $\sqrt{2}$) の上にある. $m=0$ なるば, (2.5) に於て, $|X_1(b) - X_1(a)| = |b-a|$ となる.

(2.2) の Green 関数に於いては, (2.4) を Laplace 変換することにより, 次の系を得る.

Corollary. 次の両辺のうちの一方が存在すれば他方も存在して

$$(2.6) \quad i(H^{-1}g)(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon s} ds \int_{C([0, s]; \mathbb{R}^2)} d\mathcal{V}_{s, x}(X) e^{i \int_0^s A(X(\tau)) dX(\tau)} g(X(0))$$

が成立する.

Remarks 1. 証明がやや複雑になるが, (2.2), (2.3) の H の中の係数 A は, s -dependent であってもよい. 従って, (2.1) に対する Cauchy 問題 ($\varphi(0, x) = g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^2$) の解も次のような経路積分表示ができる:

任意の固定した $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $t > 0$, に対して, $C([0, t]; \mathbb{R})$ 上に一意的な countably additive, 2×2 matrix valued measure $\nu_{t,x}$ が存在して,

$$(2.7) \quad \varphi(t, x) = \int_{C([0, t]; \mathbb{R})} d\nu_{t,x}(X) e^{i \left[\int_0^t A_1(\tau, X(\tau)) dX(\tau) + \int_0^t A_0(\tau, X(\tau)) d\tau \right]} g(X(0))$$

が成立する. $\nu_{t,x}$ の support は,

$$(2.8) \quad \left\{ X \in C([0, t]; \mathbb{R}); \quad X(t) = x, \text{ and } |X(b) - X(a)| \leq |b - a| \right. \\ \left. \text{for } 0 \leq a < b \leq t \right\}$$

の上にある. $m > 0$ なる, $\text{supp } \nu_{t,x}$ は, その傾きが光速度 1 以下の Lipschitz 連続な経路 $X(\tau)$ 達の上であり, $m = 0$ なる, その傾きが丁度光速度 1 に等しい Lipschitz 連続な経路 $X(\tau)$ 達の上にある. これは, 電子の Zitterbewegung の一つの解釈を示唆しているようにも思われる.

2. phase space path integral 7 は Hamiltonian path integral の考え方から出発する heuristic argument によつて, Dirac 方程式の経路積分が (2.4), (2.7) の形になることを示すことができる.

3. Daletskii [2] では, 似た問題を扱っている. quasi-measure は考えられているが, countably additive measure は構成されていない.

4. Klein-Gordon 方程式, 移動方程式を system 化 ($P = t$

のに対しても同様な考察ができる。

§3. 証明の概略.

3.1. 経路の空間上の measure の構成.

方法は, Nelson [9] が Wiener measure の構成に用いた方法に従う.

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ を $\mathbb{R}^2$ の一点 compact 化とする. $X_s = \prod_{[0,s]} \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の非可算無限直積とする. X_s は, $[0,s]$ 上の $\mathbb{R}^2$ 値関数全体であり, 従って不連続経路, 無限を通る経路も含む. 積位相を与えれば, Tychonoff の定理により, X_s は, compact Hausdorff 空間になる. $C(X_s)$ を X_s 上の複素数値連続関数全体のなす Banach 空間とし, $C_{fin}(X_s)$ を $C(X_s)$ の元重であって, 区間 $[0,s]$ のある有限分割 $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = s$ と, $(\mathbb{R}^2)^{n+1}$ 上のある有界連続関数 $F(x^0, x^1, \dots, x^n)$ に対して,

$$\Phi(X) = F(X(s_0), X(s_1), \dots, X(s_n))$$

と表わされるものの全体とする. $C_{fin}(X_s)$ は, Stone-Weierstrass の定理により, $C(X_s)$ で稠密である.

$K(s, x)$ を free Dirac equation の Cauchy 問題

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} \psi_0(s, x) = \left[\frac{\partial}{\partial x_0} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + i m \beta \right] \psi_0(s, x) \\ \psi_0(s, x) = g(x) \end{cases}$$

の基本解とする: $\psi_0(s, x) = \int_{\mathbb{R}^2} K(s, x-y) g(y) dy,$

$$K(s, x) = \frac{1}{2} \delta(x_0 + s) \left[\frac{\partial}{\partial s} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + i \operatorname{Im} \beta \right] (J_0(m(s^2 - x_1^2)^{\frac{1}{2}}) \Theta(s - |x_1|)), \quad s > 0.$$

$J_0(t)$ は, order zero の Bessel 関数であり, $\Theta(t)$ は, Heaviside 関数である ($\Theta(t) = 0, t < 0; = 1, t > 0$).

X_s 上の measure の構成. 先ず X_s 上に measure を構成する. 任意の固定した $(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, s > 0$, に対して, 次のような $C_{fin}(X_s)^2$ 上の $\mathbb{C}^2$ 値線型汎関数 $L_{s,x}$ を考えよう:

$$(3.2) \quad L_{s,x}(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \overbrace{K(s_n - s_{n-1}, x^n - x^{n-1}) \cdots K(s_2 - s_1, x^2 - x^1)}^n \cdot K(s_1 - s_0, x^1 - x^0) F(x^0, x^1, \dots, x^n) dx^0 dx^1 \cdots dx^{n-1}$$

ここに $x_n = x, s_n = s, s_0 = 0$ である.

次の補題が決定的な役割を果たす.

Lemma 1. (i) $L_{s,x}(\Phi)$ は, Φ に対応する F の選び方に依らない. (ii) ある, s に無関係な定数 C が存在して

$$(3.3) \quad |L_{s,x}(\Phi)| \leq C e^{ms} \|\Phi\|_\infty$$

が成立する.

Lemma 1 の証明について, (i) は e^{isH} の semigroup property から従う. (ii) の証明の爲には, free Dirac equation の Cauchy 問題 (3.1) が L^∞ well-posed であること, 即ち, 次の事実に注意せよ:

任意の $g \in C^1(\mathbb{R}^2)^2$ に対して, (3.1) の一意解 $\psi_0 \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)^2$ が存在して,

$$|N\psi_0(s, x)| \leq e^{ms} \|Ng\|_{L^\infty(R_0^{(s, x)})}$$

が成立する. ここに, N は 2×2 行列で, $N \times N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を満たすものとする. $R_0^{(s, x)}$ は $\Gamma(s-r, x-y)$ の変数 (r, y) に関する support

$$\Gamma^{(s, x)} = \left\{ (r, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2; 0 \leq r \leq s, \text{ and for } \forall w \in \mathbb{R}^2, |w|=1, \right. \\ \left. C_-(w)(s-r) \leq (x-y) \cdot w \leq C_+(w)(s-r) \right\}$$

where

$$C_+(w) = \max(-w_1 - w_2, -w_1 + w_2), \quad w = (w_1, w_2)$$

$$C_-(w) = \min(-w_1 - w_2, -w_1 + w_2)$$

の $t=0$ に於ける切片: $R_0^{(s, x)} = \Gamma^{(s, x)} \cap \{t=0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ である.

Lemma 1 を認めると, $C_{fin}(X_s)$ が $C(X_s)$ で稠密であることから, $L_{s, x}$ は $C(X_s)^2$ 上の $\mathbb{C}^2$ 値連続線型汎関数に拡張できる. 従って Riesz の表現定理により, X_s 上に一意的に regular, 2×2 matrix valued Borel measure $\nu_{s, x}$ が存在して,

$$L_{s, x}(\Phi) = \int_{X_s} d\nu_{s, x}(X) \Phi(X), \quad \Phi \in C(X_s)^2$$

が成立する.

measure $\nu_{s, x}$ の support. $\nu_{s, x}$ の support を決定しよう.

Theorem の集合 (2.6) は, 集合

$$G(s) = \left\{ X \in X_s; \begin{array}{l} X(s) = x, \text{ and for } 0 \leq t_a < t_b \leq s \text{ and } \forall \omega \in \mathbb{R}^2, |\omega| = 1, \\ C_-(\omega)(b-a) \leq (X(b) - X(a)) \cdot \omega \leq C_+(\omega)(b-a) \end{array} \right\}$$

に一致することに注意せよ。従って $\text{supp } L_{s,x}^2 \subseteq G(s)$ を証明すればよい。 $G(s)$ の補集合は、

$$G(s)^c = \bigcup_{0 \leq t_a < t_b \leq s} \bigcup_{|\omega|=1} (E(s, x) \cup E(a, b; \omega))$$

となる。ここで、

$$E(s, x) = \{ X \in X_s; X(s) \neq x \},$$

$$E(a, b; \omega) = \left\{ X \in X_s; \begin{array}{l} \text{either [both } X(b) \text{ and } X(a) \text{ are finite, and} \\ C_-(\omega)(b-a) > (X(b) - X(a)) \cdot \omega \text{ or } (X(b) - X(a)) \cdot \omega > C_+(\omega)(b-a)] \\ \text{or } [X(b) = \infty \text{ or } X(a) = \infty] \end{array} \right\}$$

は、共に X_s の開集合である。従って、measure の localization principle により、 $L_{s,x}^2$ が $G(s)^c$ 上で vanish することを示すには、各 $E(s, x)$, $E(a, b; \omega)$ 上で vanish することを示せばよい。後者は、基本解 $K(s, x)$ の support の性質と関係 (3.2) を用いて証明することができ、

3.2. 経路積分表示.

Cauchy 問題 (2.3) の解の表示は、3.1. で構成した measure $L_{s,x}$ を用いて次の手順で行なわれる。

まず、 $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)^2$ に対して 作用素

$$(T(r)g)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} K(r, x-y) e^{iA(y)(x-y)} g(y) dy$$

を導入する.

$$\text{Lemma 2. } \frac{\partial T(r)g}{\partial r} \xrightarrow{(r \downarrow 0)} iHg \quad \text{in } L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}^2).$$

Lemma 2 を用いると, 次の補題を証明することが出来る.

$$\text{Lemma 3. } T\left(\frac{s}{n}\right)^n g \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} e^{isH} g \quad \text{in } L^{\infty}(\mathbb{R}^2).$$

経路積分表示 (2.4) の証明を完結しよう. $T(r)$ の定義と $\nu_{s,x}$ の構成法から, $x^n = x$, $s_j = js/n$ として,

$$\begin{aligned} (T\left(\frac{s}{n}\right)^n g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \overbrace{K\left(\frac{s}{n}, x^n - x^{n-1}\right) \cdots K\left(\frac{s}{n}, x^1 - x^0\right)}^n \\ &\quad \cdot e^{i \sum_{j=1}^n A(x^{j-1})(x^j - x^{j-1})} g(x^0) dx^0 dx^1 \cdots dx^{n-1} \\ &= \int d\nu_{s,x}(X) e^{i \sum_{j=1}^n A(X(s_{j-1}))(X(s_j) - X(s_{j-1}))} g(X(0)) \end{aligned}$$

が成立する. $n \rightarrow \infty$ とすると, Lemma 3 より, 左辺は $L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ で $e^{isH}g$ に収束し, 右辺は, Lebesgue の有界収束定理から,
 $\int d\nu_{s,x}(X) e^{i \int_0^s A(X(\tau)) dX(\tau)} g(X(0))$ に収束する.

REFERENCES

- [1] Albeverio, S.A., and Høegh-Krohn, R.J., Mathematical Theory of Feynman Path Integrals, Lecture Notes in Math. No. 523, Springer 1976.
- [2] Daletskii, Yu.L., Continual integrals and the characteristics connected with a group of operators, Soviet Math. Dokl. 2, 1634-1637(1961); Functional integrals connected with operator evolution equations, Russ. Math. Surveys 17, 1-107(1962).
- [3] Feynman, R.P., Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, Rev. Mod. Phys. 20, 367-387(1948).
- [4] ----- and Hibbs, A.P., Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill 1965.
- [5] Fujiwara, D., A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation, J. Analyse Math. 35, 41-96(1979); Remarks on convergence of the Feynman path integrals, Duke Math. J. 47, 559-600 (1980).
- [6] Ichinose, T., Path integral for the Dirac equation in two space-time dimensions, to appear in Proc. Japan Acad.
- [7] Itô, K., Generalized uniform complex measure in Hilbert metric spaces and their applications to the Feynman path integrals, Proc. 5th Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, Vol. 2, Part 1, 145-161, Univ. of California Press 1967.
- [8] Kac, M., On some connections between probability theory and differential and integral equations, Proc. Second Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, 189-214(1951).
- [9] Nelson, E., Feynman integrals and the Schrödinger equation, J. Math. Phys. 5, 332-343(1964).
- [10] Streit, L., and Hida, T., Generalized Brownian functionals and the Feynman integral, to appear in Stochastic Processes and their Applications.