

共鳴的加振の下での水面波の分岐及び不規則挙動

九大応力研

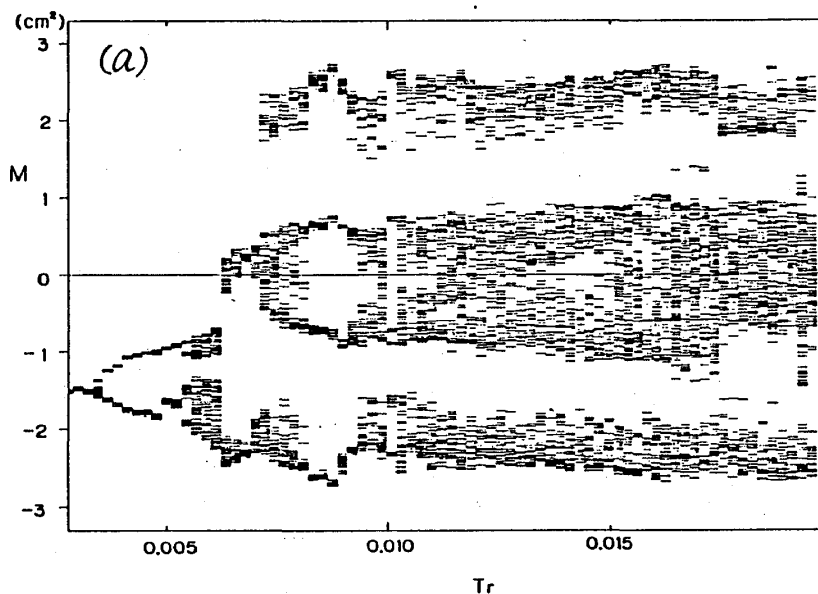
船越満明
井上 進

円筒形容器を、自由表面変位が $\eta = J_1(kr) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix}$ と書ける2つのモードの固有振動数に近い振動数で水平加振したときに、水面波の示す不規則挙動や分岐現象について、実験結果及び理論との比較を述べる [(r, θ) は極座標。 ka は J_1 の最小の正の零点。 $a(=9\text{cm})$ は円筒半径。水深 $d(=14\text{cm})$ 。流体として水またはグリセリン水溶液を用いた。加振変位を $x_0 \cos \omega t$ とし、 $T_r = (T - T_0)/T_0$ [T_0 は固有周期、 $T = 2\pi/\omega$] とすると、ある (T_r, x_0) の領域では、各点の波の振幅が時間とともに周期的あるいは不規則に変化することがわっている¹⁾。そこでこのような場合について、

$$\eta = (p_1 \cos \omega t + q_1 \sin \omega t) J_1(kr) \cos \theta + (p_2 \cos \omega t + q_2 \sin \omega t) J_1(kr) \sin \theta,$$

と書いたときの (p_1, q_1, p_2, q_2) の (ゆっくりとした) 時間変化を求めた。その結果、次のことがわかった。

- (i) 加振振幅 x_0 が大きいほど、あるいは波の減衰率 δ が小さいほど、振幅変化が不規則でストレンジアトラクターが得られる割合が大きく、周期的振幅変化のみで得られる割合が小さい。図1は、 T_r を徐々に上げていったときに、各 T_r で得られる4次元位相空間内のアトラクターに対して、トラジエクトリーが平面 $p_1 = \langle p_1 \rangle$ を通るとききの $M = p_1 q_2 - p_2 q_1$ の値を示したものである。($\langle p_1 \rangle$ は、アトラクターにおける p_1 の値の平均値)。図1(a)と(b)は x_0 が異なっており、 x_0 の大きい(a)の方がより頻繁に力オス状態を示すことがわかる。また、図1(c)は、グリセリン52%水溶液 (δ は水の約2.5倍) での結果であるが、 x_0 が図1(a)よりも大きいにもかかわらず、力オスの現れる率が低いことがわかる。



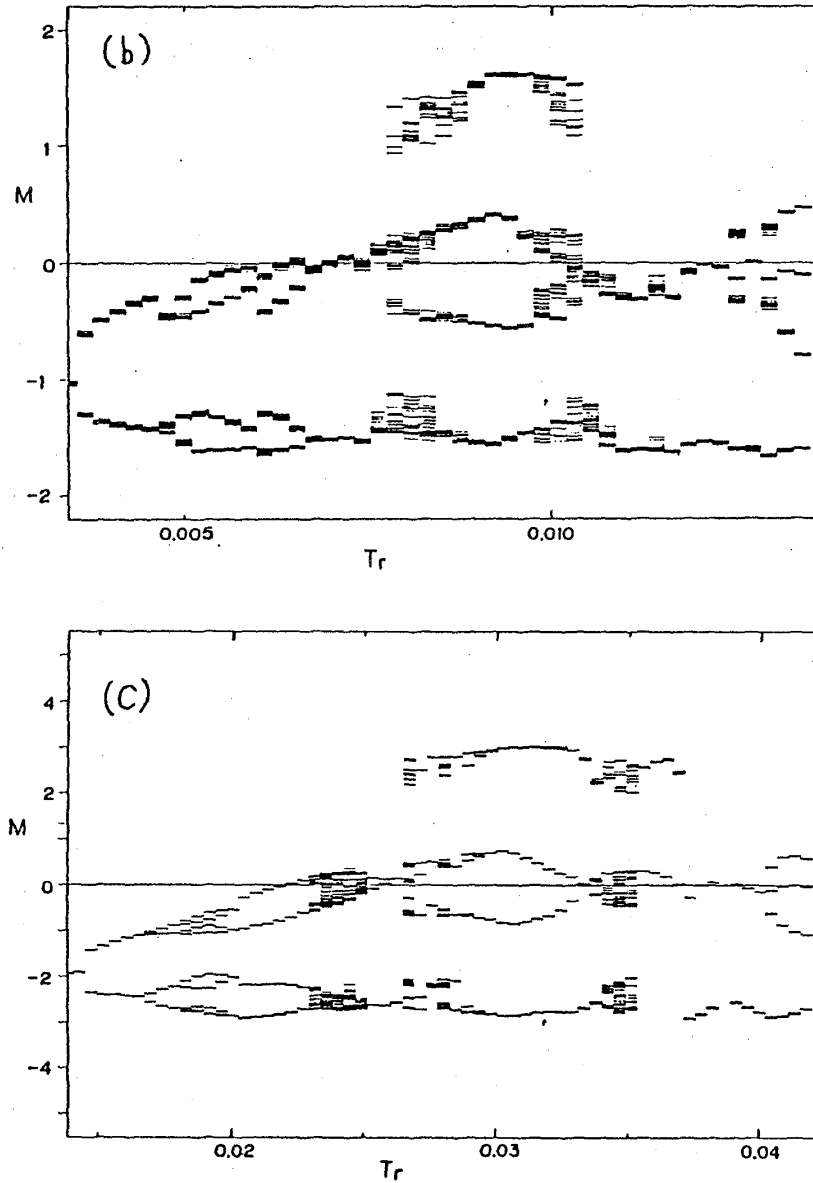
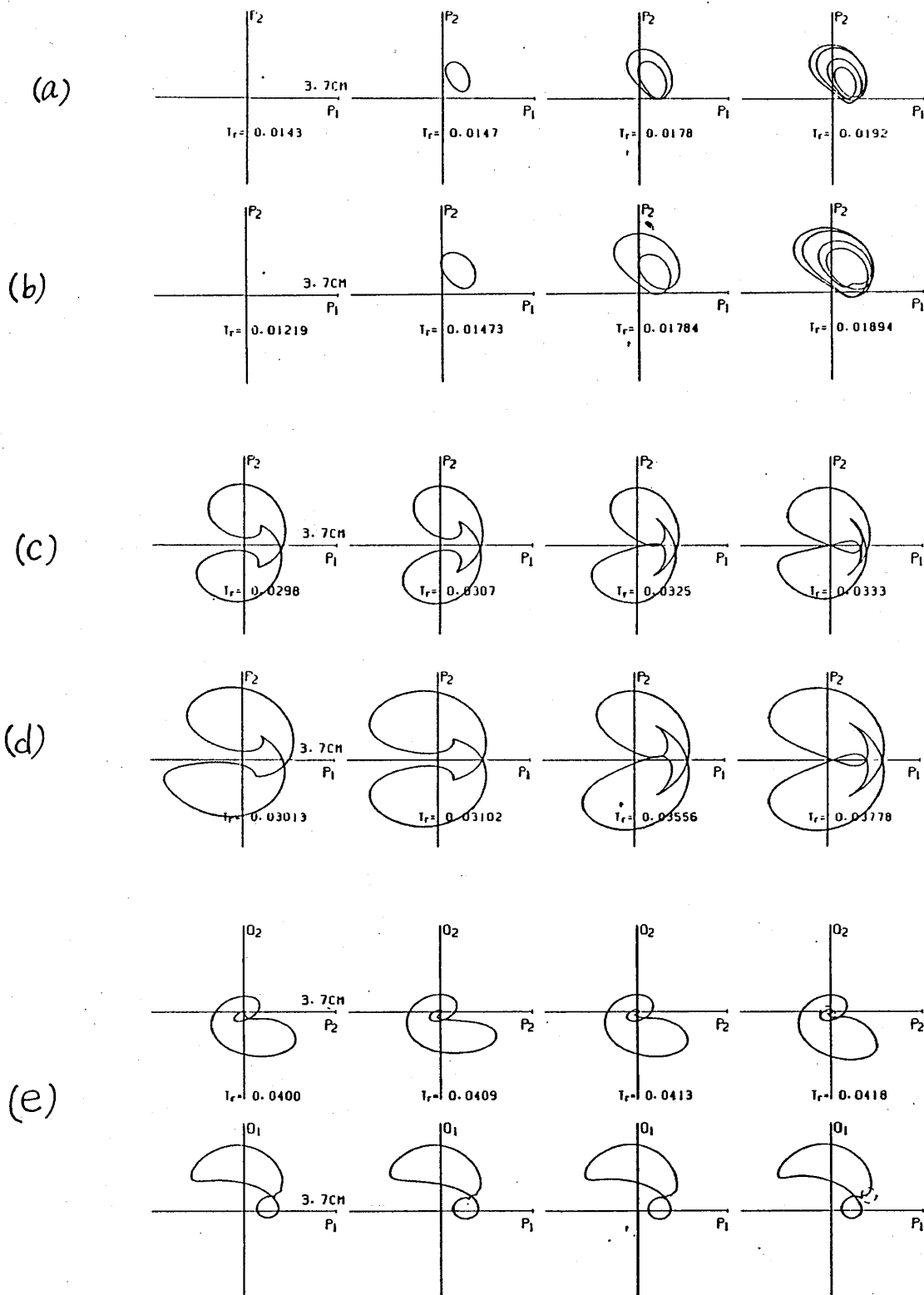


図 1. (a) 水, $x_0 = 0.025\text{cm}$, (b) 水, $x_0 = 0.016\text{cm}$, (c) グリセリン 52% 水溶液, $x_0 = 0.078\text{cm}$.

(ii) ホップ分岐、周期倍分岐、(不完全な) symmetry-breaking 分岐、ホモクリニック分岐がみられた。図 2(a) はホップ分岐に続く 2 回の周期倍分岐を示す。図 2(c) は、非対称性の弱い状態と強い状態の間に移り変りを表わし、不完全な symmetry-breaking 分岐を示す。図 2(e) は、 T_r の増大とともに周期が増大していくホモクリニック分岐を表わしている。一方、Miles²⁾ は平均化ラグランジアン法を用いて、次の方程式を導出した

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -\alpha p_1 - (\beta + AE) q_1 + Bmp_2, \\ \frac{dq_1}{dt} = -\alpha q_1 + (\beta + AE) p_1 + Bmq_2 + x_0, \\ \frac{dp_2}{dt} = -\alpha p_2 - (\beta + AE) q_2 - Bmp_1, \\ \frac{dq_2}{dt} = -\alpha q_2 + (\beta + AE) p_2 - Bmq_1, \end{cases}$$

ここで $E = (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)/2$ 、 $M = p_1 q_2 - p_2 q_1$ であり、 A 、 B は a/d のみによって決る定数、 α は減衰率、 β は T_r の関数で定数である。実験における



(f)

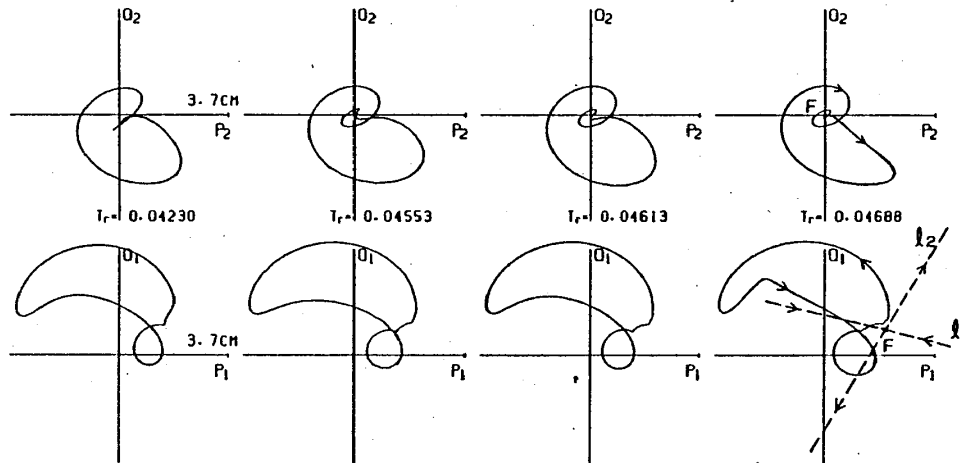


図2. グリセリン52%水溶液、 $x_0 = 0.078\text{cm}$ での実験、及び対応する数値計算の結果。(a),(c),(e)実験結果。(b),(d),(f)数値計算。各アトラクターは、 (p_1, p_2) 平面あるいは (p_2, q_2) 、 (p_1, q_1) 平面へ射影して表現してある。

波の減衰率から計算した α を使って上の方程式を解き、実験結果と比べると、先の(i)(ii)の結果がよく再現されることがわかった。とくに分岐現象については、図2の(b),(d),(f)で示したように、出現するアトラクターの形もよく似ている。ただし、ホモクリニック分岐については、図2(f)のようなアトラクターを示す T_r の領域の間に、他のアトラクターを与える T_r の領域がはさまっていて実験と異なる。

参考文献

- 1) Funakoshi & Inoue : J.Fluid Mech. 192 (1988) 219.
- 2) Miles : J.Fluid Mech. 149 (1984) 15.