

線型正作用素による函数

の近似について

東北大 教養 鈴木義也

§ 1. 序

線型正作用素による函数の近似については近年多くの人々によって研究されてきているが、ここでは話題を実数値連続函数 $f(x)$ を実軸上のある有限区間 $[a, b]$ 上で、ある条件をみたす線型正作用素 $L_n(f; x)$ で近似するときの局所飽和に限定する。ここには、線型作用素 $L_n(f; x)$ が正であるとは『 $f(x) \geq 0$ のとき $L_n(f; x) \geq 0$ 』が成り立つことと定義する。また $g(x) \in C[a, b]$ に対して、 $\|g(x)\|_{(a, b)} \equiv \max_{x \in [a, b]} |g(x)|$ と定義する。このとき局所飽和定理とは、与えられた函数 $f(x)$ に依存してきまるある近似法を $P_n(f; x)$ とし、 A をある条件をみたす連続函数 $f(x)$ の集合； $\varphi(x)$ を $x > 0$ で定義された非増加な正值函数で、 $\varphi(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$) とするとき、

$$\text{『 (i) } \|f(x) - P_n(f; x)\|_{(a, b)} = o(\varphi(n)) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ が 定数, 1 次函数等の} \\ \text{特殊な函数がある。} \end{cases}$$

$$(ii) \|f(x) - P_n(f; x)\|_{(a,b)} = O(\varphi(n)) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) \in A \text{ (}(a,b)\text{の部分区} \\ \text{間 } [c,d] \text{ 上で)} \end{array} \right\} \text{である.}$$

$$(iii) f(x) \in A([a,b] \text{ 上で}) \Rightarrow \|f(x) - P_n(f; x)\|_{(c,d)} = O(\varphi(n)).$$

が成立するという形の定理のことである。このような事実が成立するとき、 $P_n(f; x)$ なる近似法は C -空間で局所的に飽和されていて、そのクラスは A 、その度合は $\varphi(n)$ であるといわれる。しかし、“飽和現象”が生ずるのはある特定の近似法に対してである。

§2. 補助定理

特に次の3つの性質を有する線型正作用素を考える。即ち $x \in [a,b]$ に対して、

$$P_1: f(x) \text{ が 1 次函数であるとき, } L_n(f; x) = f(x).$$

$$P_2: f(x) = Ax^2 \text{ のとき, } [a,b] \text{ で一様に}$$

$$L_n(f; x) - f(x) = \frac{A\psi(x)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

ここに、 $\psi(x)$ は連続な2次の導函数を有し、 (a,b) 上では0とはならない函数とする (L_n の形に依存する)。

$$P_3: 1 \text{ より大なる正整数 } m \text{ が存在して, } [a,b] \text{ で一様に}$$

$$L_n\{(t-x)^{2m}; x\} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

このような $L_n(f; x)$ に対しては、P. P. Korovkin [2] の定理から性質 P_1 と P_2 によって、 $[a,b]$ における $L_n(f; x)$ の $f(x)$ への一様収束性が得られ、収束の度合については性質 P_3 によって、

R. G. Mamedov [4] と F. Schurer [5] の一般的な定理により次の命題が成立する。

補助定理 1. $L_n(f; x)$ を性質 P_1, P_2, P_3 をみたす線型正作用素とするとき, $f(x) \in C^{(2)}[a, b]$ に対して,

$$L_n(f; x) - f(x) = \frac{\psi(x)f''(x)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad x \in [a, b].$$

補助定理 2. 上の補助定理 1 と同じ仮定の下に, $f(x) \in C^{(2)}[a, b]$ に対して, $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ に対して,

$$L_n(f; x) - f(x) = \frac{\psi(x)f''(x)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

§ 3. 基本定理

先ず, $0 \leq a < b \leq R$ なる実数値 a, b, R が与えられたとき $a < a_1 < a_2 < \alpha < \beta < b_2 < b_1 < b$ となるように $a_1, a_2, \alpha, \beta, b_2, b_1$ を任意に定め, 次の函数の族 $\mathcal{U}$ を導入する。

$$\mathcal{U} \equiv \left\{ u(x) = \psi(x)g(x), x \in [0, R] : g(x) \in C^{(2)}[0, R], \text{かつ} \right. \\ \left. (\alpha, \beta) \text{ の外で } g'' \text{ は } 0 \text{ である。} \right\}$$

次に, $f(x) \in C[a, b]$ と $L_n(f; x)$ に対して, 汎函数 $A_n(f)$ を次のように定義する。

$$(1) \quad A_n(f) = 2 \sum_{na < k < bn} \frac{L_n(f; \frac{k}{n}) - f(\frac{k}{n})}{\psi(\frac{k}{n})} u(\frac{k}{n}) \\ = 2 \sum_{na_1 < k < b_1 n} [L_n(f; \frac{k}{n}) - f(\frac{k}{n})] g(\frac{k}{n}).$$

定理1. $L_n(f; x)$ は $f(x) \in C[a, b]$ に対して定義される線型正作用素で、性質 P_1, P_2, P_3 を満たすものとする。このとき、

[I]. ある絶対定数 K が存在して、任意の $g(x) \in C[a, b]$ に対して

$$|A_n(g)| \leq K \|g\|_{[a, b]}$$

であり、更に、

$$(2) \quad |L_n(f; x) - f(x)| < \frac{M \psi(x)}{2n}, \quad x \in [a, b], \quad (n=1, 2, \dots).$$

があるとき、 $[a, b]$ 上で $f(x) \in \text{Lip}_M 1$ 。

[II]. [I] の仮定に加えて、 $[a_1, b_1]$ の殆んどすべての点で、

$$L_n(f; x) - f(x) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成立すれば、 $f(x)$ は $[a_1, b_1]$ で 1 次函数である。

[III]. $f(x) \in \text{Lip}_M 1$ が $[a_1, b_1]$ で (1) 之るとすれば、 $[a_2, b_2]$ で一樣に、

$$|L_n(f; x) - f(x)| < \frac{M \psi(x)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成立する。

この事実を簡単に、

$$L. \text{Sat.} [L_n] = [f \in \text{Lip}_M 1, n^{-1}, \text{linear}, \psi(x)]$$

とかくことにする。

3.1. 定理1の [I] の証明

最初に、任意の $g(x) \in C[a, b]$ 及び $u(x) \in \mathcal{U}$ に対して、

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(g) = \int_a^b g(x) u''(x) dx$$

を示す。

そのためにまず, $g(x) \in C^{(2)}[a, b]$ と仮定すると, 性質 P_1, P_2, P_3 及び補助定理 2 により, $[a, b]$ で一様に

$$(4) \quad L_n(g; x) - g(x) = \frac{\psi(x)g''(x)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が任意の $g(x) \in C^{(2)}[a, b]$ に対して成立する。(1), (4) から

$$A_n(g) = \frac{1}{n} \sum_{na \leq k \leq nb} g''\left(\frac{k}{n}\right) u\left(\frac{k}{n}\right) + o(1)$$

$$\rightarrow \int_a^b g''(x) u(x) dx \quad (n \rightarrow \infty)$$

であり, これは (3) と同じである。更に, $C^{(2)}[a, b]$ は $C[a, b]$ で稠密であり, 仮定から定数 K が存在して任意の $g(x) \in C[a, b]$ に対して,

$$|A_n(g)| \leq K \|g\|$$

であるから, (3) はすべての $g(x) \in C[a, b]$ に対して成立する。一方, $A_n(f)$ を次のように変形することが出来る。

$$(5) \quad A_n(f) = \int_a^b u(x) d\lambda_n(x),$$

$$\lambda_n(x) = 2 \sum_k \frac{L_n(f; \frac{k}{n}) - f(\frac{k}{n})}{\psi(\frac{k}{n})},$$

ここに, 総和 $\sum$ の k は $a < \frac{k}{n} < x$ なるすべての k についてとられる。このときもしも $f(x)$ が (2) に $[a, b]$ でみたすならば, $\lambda_n(x)$

の全変分は MR をこえず", $|\lambda_n(x) - \lambda_n(y)|$ は MRn^{-1} に $[x, y]$ の内部にある点 $h \cdot n^{-1}$ の個数を乗じたものをこえな。よって, Helly の定理により, 部分列 $\{\lambda_{n_p}(x)\}$ が存在して, $[a, b]$ で有界変分函数 $\lambda(x)$ に収束し,

$$(6) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} A_{n_p}(f) = \int_a^b u(x) d\lambda(x)$$

がある。(3), (6) により, 任意の $u(x) \in \mathcal{U}$ に対して,

$$\int_a^b f(x) u''(x) dx = \int_a^b \Lambda(x) u''(x) dx$$

ここは, $\Lambda(x)$ とは $\lambda(x)$ の不定積分である。よって, g, h はある定数とあるとき, $f(x) = \Lambda(x) + g \cdot x + h$ が $x \in [a, b]$ に対して成立する。したがって, $\lambda(x)$ の定義から, $\lambda(x) \in L_{p, M}^1$ は明らかであるから, $\square$ をうる。

3.2. 定理1のⅣの証明

仮定から, $t, x \in [a_2, b_2]$ に対して,

$$|f(t) - f(x) - (t-x)f'(x)| = \left| \int_x^t [f(y) - f(x)] dy \right| \leq \frac{1}{2} M(t-x)^2$$

更に, x に関し 2-様は

$$L_n\{(t-x)^2; x\} = L_n(t^2; x) - x^2 = \frac{\psi(x)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

であるから

$$|L_n(f; x) - f(x)| = |L_n\{f(t) - f(x) - (t-x)f'(x); x\}|$$

$$\begin{aligned} &\leq L_n \{ |f(t) - f(x) - (t-x)f'(x)|; x \} \\ &\leq \frac{M}{2} L_n \{ (t-x)^2; x \} = \frac{M}{2} \cdot \frac{\psi(x)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

が $x \in [a_2, b_2]$ に對して一様に成立する。従つて、[IV] である。

3.3. 定理1の[IV]の証明

(2) の(1) であるが、[I]の結果により、 $f'(x)$ は絶対連続、即ち $f''(x)$ は $[a_1, b_1]$ の殆んどすべての点で存在する。補助定理1により、

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \{ L_n(f; x) - f(x) \} = \frac{\psi(x)f''(x)}{2}, \quad \text{a.e. } x \in [a_1, b_1]$$

性質 P_3 と (7) から、

$$\frac{1}{2} \psi(x) f''(x) = 0 \quad \text{a.e. } x \in [a_1, b_1]$$

ところが、 $[a_1, b_1]$ 上では $\psi(x) \neq 0$ であるから、

$$f''(x) = 0 \quad \text{a.e. } x \in [a_1, b_1]$$

従つて、 $f'(x)$ の連続性により $f(x)$ は $[a_1, b_1]$ 上 1 次函数である。

§ 4. 応用例

4.1. 一般化された Baskakov の作用素 M_n の定義

補助函数として次の性質を有する函数列 $\{\varphi_n(y)\}$ を定義する。

- 1). $[0, \infty)$ 上 Taylor 展開可能である,
- 2). $\varphi_n(0) = 1$,
- 3). $(-1)^k \varphi_n^{(k)}(x) \geq 0$ ($k=0, 1, 2, \dots$), $x \in [0, \infty)$,
- 4). $-\varphi_n^{(k)}(x) = n \varphi_{n-k}^{(k-1)}(x)$ ($k=1, 2, \dots$), $x \in [0, \infty)$,

ここに, c はある整数とする。

このとき, $x \in [0, \infty)$ に対して, $M_n(f; x)$ を

$$(8) \quad M_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{k!} x^k f\left(\frac{k}{n}\right), \quad (n=1, 2, \dots)$$

と定義すると, これは $f(x) \in C[0, R]$ (R は任意に固定された正数) で, $c \in (R, \infty)$ で 0 であるすべての函数に対して意味をもつ。

注意 1. (8) で $\varphi_n(y) = (1-y)^n$, $c = -1$ とおくと, Bernstein 多項式

$$(9) \quad B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

となり, $\varphi_n(y) = e^{-ny}$, $c = 0$ とおくと, Szász の作用素

$$(10) \quad S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{k!} (nx)^k$$

をうる。更に, $\varphi_n(y) = (1+y)^{-n}$, $c = 1$ のときは Baskakov 作用素

$$(11) \quad V_n(f; x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n+1) \cdots (n+k-1)}{k!} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$$

に存する。

4.2. $M_n(f; x)$ による漸近公式

定理 2. $f(x) \in C^{(2)}[a, b]$ ($0 \leq a < b \leq R$) に対して,

$$M_n(f; x) = f(x) + \frac{f''(x)}{2} \cdot \frac{x(1+cx)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad x \in [a, b]$$

更に、これは任意に固定された部分区間 $[a_1, b_1]$ ($a < a_1 < b_1 < b$) 上で一様に成り立つ。

証明. 直接の計算により, $M_n(1; x) = 1$, $M_n(t; x) = x$, $M_n(t^2; x) = x^2 + x(1-x) \cdot n^{-1}$ であり, かつ $[a, b]$ 上で一様に, $M_n\{(t-x)^4; x\} = o(\frac{1}{n})$

であるから, 補助定理 1 と 2 により, 定理 2 成り立つ。

系 1. (E.V. Voronovskaja) $f(x) \in C^{(2)}[a, b]$ ($0 \leq a, b \leq 1$) のとき

$$B_n(f; x) = f(x) + \frac{f''(x)}{2} \cdot \frac{x(1-x)}{n} + o(\frac{1}{n}), \quad x \in [a, b]$$

系 2. (O. Szász) $f(x) \in C^{(2)}[a, b]$ ($0 \leq a < b \leq R$) に対して

$$S_n(f; x) = f(x) + \frac{f''(x)}{2} \cdot \frac{x}{n} + o(\frac{1}{n}), \quad x \in [a, b]$$

系 3. (V.A. Baskakov [1]) $f(x) \in C^{(2)}[a, b]$ ($0 \leq a < b \leq R$) のとき

$$V_n(f; x) = f(x) + \frac{f''(x)}{2} \cdot \frac{x(1+x)}{n} + o(\frac{1}{n}), \quad x \in [a, b]$$

4.3. $M_n(f; x)$ による局所飽和

この節では, 簡単のため $C[a, b]$ ($0 \leq a < b \leq R$, $R \geq 1$) を考え, 更に $M_n(f; x)$ が以下の条件 (12), (13), (14) を満たすときのみを扱う。

$$(12) \quad \frac{n P_{n+c, l}}{P_{n, l}} = \frac{l c + n}{c x + 1},$$

$$(13) \quad \int_0^{E(c)} p_{n,l}(x) dx = \frac{1}{n-c}, \quad \int_0^{E(c)} x p_{n,l}(x) dx = \frac{l+1}{(n-c)(n-2c)},$$

$$(14) \quad \sum_{n\alpha \leq l \leq n\beta} \int_R^{E(c)} x^i p_{n,l}(x) dx = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (i=0, 1),$$

$$c = n, \quad \begin{cases} p_{n,l}(x) = (1)^l \frac{\varphi_n^{(l)}(x)}{l!} x^l, & E(1) = E(0) = \infty, \\ E(c) = \frac{5c^2 - c - 2}{2c(c-1)} & (c \neq 0, 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

定理3. $[a, b]$ で定義された, (12), (13), (14) の性質をもつ $M_n(f; x)$ に対し,

$$L. Sat. [M_n] = [f'(x) \in Lip_M 1, n^+, \text{linear}, x(1+cx)].$$

系4. (G. G. Lorentz [3]) (9) の作用素に対し,

$$L. Sat. [B_n] = [f'(x) \in Lip_M 1, n^+, \text{linear}, x(1-x)].$$

系5. (10) の作用素に対し,

$$L. Sat. [S_n] = [f'(x) \in Lip_M 1, n^+, \text{linear}, x].$$

系6. (11) の作用素に対し,

$$L. Sat. [T_n] = [f'(x) \in Lip_M 1, n^+, \text{linear}, x(1+x)].$$

注意2. 定理1と定理3の証明に應用する際に, 任意の $f(x) \in [a, b]$ に対し, $|A_n(g)| \leq K \|g\|$ となる定数 K の存在を示す

必要があるが、そのためには極めて煩雑な計算を要するので、省略する。(詳細については文献[6],[7]を参照のこと。)

文献

- [1] V. A. Baskakov, *Doklady Akad. Nauk*, 113 (1957), 249-251.
- [2] P. P. Korovkin, *Linear operators and approximation theory*, Delhi, 1960.
- [3] G. G. Lorentz, *Proc. of the Conference at Oberwolfach*, 1963, 200-207.
- [4] R. G. Mamedov, *Doklady Akad. Nauk*, 128 (1959), 471-474.
- [5] F. Schurer, *Indagationes Math.*, 25 (1963), 313-327.
- [6] Y. Suzuki, *Tôhoku Math. Journ.*, 19 (1967), 429-453.
- [7] Y. Suzuki and K. Ikemoto, *Tôhoku Math. Journ.*, 20 (1968), 214-233.