

On meromorphic maps into $P^N(\mathbb{C})$

名大 教養 藤本坦孝

§ 1. 序

複素平面 $\mathbb{C}$ 上の非定数有理型関数について、異なる 5 個の値の逆像が一致する様なものは高々 1 個しかなく、異なる 3 個の値の逆像が重複度もこめて一致するものは高々 2 個であることが知られている ([9]). これらの事実を、 $\mathbb{C}^n$ から N 次元複素射影空間 $P^N(\mathbb{C})$ への有理型写像の場合に拡張することを考える。

f を $\mathbb{C}^n$ から $P^N(\mathbb{C})$ への有理型写像とする。 $f(\mathbb{C}^n)$ が n 個の超平面にも含まれないとき、 f は非退化であるとき、 $f(\mathbb{C}^n)$ が n 個の代数的超曲面にも含まれないとき、代数的非退化であるという。また、 $f(\mathbb{C}^n) \not\subset H$ をみたす超平面 H に対し、因子とみたての H の f によるひきもどしを $\nu(f, H)$ で示す。ここで、因子は、[10] で述べられた意味で理解する。したがって、 $\nu(f, H)$ は、各点 $z \in \mathbb{C}^n$ に対し、 $f(z) \notin H$ のとき $\nu(f, H)(z) = 0$ 、 $f(z)$ が重複度 m で H に含まれるとき

$\nu(f, H)(z) = m$ として定義された $\mathbb{C}^n$ 上の整数值関数を表す.

$P^N(\mathbb{C})$ 内の一般の位置にある超平面 H_i , および $\mathbb{C}^n$ 上の正因子 ν_i ($1 \leq i \leq g$) に対し, $\nu(f, H_i) = \nu_i$ をみたす非退化有理型写像 $f: \mathbb{C}^n \rightarrow P^N(\mathbb{C})$ の全体を $\mathcal{F}(H_1, \dots, H_g; \nu_1, \dots, \nu_g)$ 略して $\mathcal{F}$ で示す.

$g = N+1$ の場合, $\mathcal{F}$ の構造はみやすい. 実際, $H_i = \{w_i = 0\}$ ($1 \leq i \leq N+1$) とある $P^N(\mathbb{C})$ 上の斉次座標 $(w_0, w_1, \dots, w_{N+1})$ を取り, $\nu_{k_i} = \nu_i$ をみたす $\mathbb{C}^n$ 上の整関数 k_i を送れば, $\mathcal{F}$ の元 f は, 整関数 $g_1, \dots, g_{N+1}$ によって

$$f = (k_1 e^{g_1} : k_2 e^{g_2} : \dots : k_{N+1} e^{g_{N+1}}) \quad (1)$$

と書けよ. ここで, ν_{k_i} は, $k_i(z) \neq 0$ ならば $\nu_{k_i}(z) = 0$, z が k_i の m 位の零点ならば $\nu_{k_i}(z) = m$ として定義された因子を表す. 逆に (1) の形で書ける非退化有理型写像 f は $\mathcal{F}$ の元である.

$g \geq N+2$ の場合, 次の諸定理が成り立つ.

定理 I ([8]). (i) $g \geq 3N+2$ ならば $\#\mathcal{F} \leq 1$.

(ii) $g = 3N+1$ ならば, 任意の元 $f, g \in \mathcal{F}$ に対し, $L \cdot f = g$ をみたす射影-一次変換 $L: P^N(\mathbb{C}) \rightarrow P^N(\mathbb{C})$ が存在する.

ここで $\#\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}$ の元の個数を表す.

定理 II ([43], [5]). (i) $g \geq 2N+3$, $f, g \in \mathcal{F}$, f または g が代数的非退化ならば $f = g$.

(ii) $g = 2N+2$, $f, g \in \mathcal{F}$, f または g が代数的非退化ならば, $(f \times g)(\mathbb{C}^n)$ は, $P^N(\mathbb{C}) \times P^N(\mathbb{C})$ 内のいくつかの高々2次の多項式の共通零点として与えられる N 次代数的集合に含まれる.

定理 III ([6]). $g = N+2$ とする. $\mathcal{F}$ が元 $f^1, \dots, f^{N+1}$ を含み, それらが代数的に独立, すなわち, $(f^1 \times \dots \times f^{N+1})(\mathbb{C}^n)$ が $P^N(\mathbb{C}) \times \dots \times P^N(\mathbb{C})$ 内のいくつかの代数的真部分集合にも含まれないとき, $\mathcal{F}$ は $f^1, \dots, f^{N+1}$ 以外の元を含まない.

定理 IV ([7]). $g = N+2$ のときつねに $\#\mathcal{F} < \infty$.

定理 IV から次の結果が得られる.

系 1. $f: \mathbb{C}^n \rightarrow P^N(\mathbb{C})$ を非退化有理型写像, $\gamma: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ を双正則写像とする. $P^N(\mathbb{C})$ 内の一般の位置にある超平面 H_i ($1 \leq i \leq N+2$) に対し, $\nu(f, H_i) \circ \gamma = \nu(f, H_i)$ ならば, $f \circ \gamma^{j_0} = f$ をみたす正整数 j_0 が存在する.

実際, $f \circ \gamma^j \in \mathcal{F}(H_1, \dots, H_{N+2}; \nu(f, H_1), \dots, \nu(f, H_{N+2}))$ ($j=1, 2, \dots$) 中へ, $f \circ \gamma^{j_1} = f \circ \gamma^{j_2}$ とある異なる j_1, j_2 があり, $j_0 = j_2 - j_1$ に対し, $f \circ \gamma^{j_0} = f$ が成り立つ.

特に $n = N = 1$ の場合に適用すれば, 次の系を得る.

系 2. $\mathcal{F}$ を $\mathbb{C}$ 上の非定数有理型関数とする. $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ である $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$ および異なる a_1, a_2, a_3 について, $g^{-1}(a_i)$ ($i=1, 2, 3$) が重複度もなくて, $\mathbb{C}$ の変換

$\gamma_{\omega_k}(z) = z + \omega_k$ ($k=1, 2$) で不変ならば, g は楕円関数である。

系 1 で $j_0 = 1$ とできる。たとえば, 写像 $f: \mathbb{C} \rightarrow P^N(\mathbb{C})$ を

$$f(z) = (e^{\sin \frac{z}{N+1}} : e^{\sin \frac{z+2\pi}{N+1}} : \dots : e^{\sin \frac{z+2N\pi}{N+1}})$$

によって定義すれば, f は $\gamma(z) = z + 2\pi$, および超平面

$$H_i = \{ \omega_i = 0 \} \quad (1 \leq i \leq N+1), \quad H_{N+2} = \{ \omega_1 + \dots + \omega_{N+1} = 0 \}$$

に, $\nu(f, H_i) \circ \gamma = \nu(f, H_i)$ はみたすが $f \circ \gamma \neq f$ である。

ここでは, 定理 IV の証明を与え, 若干の関連する事柄を述べる。まず, 証明において基本的な Borel の定理を説明し (§2), いくつかの補助定理を与えたのち (§3), §4 で定理 IV を証明する。また §5 で, Borel の定理の一つの拡張を与える。

§2. Borel の定理

$\mathbb{C}^n$ 上の正則関数 g に対し

$$M(r, g) = \max \{ |g(z_1, \dots, z_n)| : \sum_{i=1}^n |z_i|^2 < r^2 \} \quad (r > 0)$$

とおき, g の位数を

$$\rho(g) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \log^+ \log^+ M(r, g) / \log r$$

と定義する。ここで, $\log^+ x = \max(\log x, 0)$ 。また, $\mathbb{C}^n$ 上の有理型関数 g が, 位数が ρ_0 より小さい n の整関数の比として表せるとき, 位数が ρ_0 より小さいと呼ぶ。特に位数が 1 より小さい $\mathbb{C}^n$ 上の有理型関数の全体を $\mathcal{H}_1$ とおく。このとき容易にわかる様に,

(2.1) Ω は体である.

$\mathbb{C}^n$ 上の零点をもたぬ整関数の全体を H^* で表す. 1変数の場合によく知られた次の事実が多変数でも成り立つ.

(2.2) H^* の元 h が非定数なら, $\delta(h) \geq 1$.

H^* の元 h, h' に対し, $h/h' = \text{定数}$ のとき $h \sim h'$, $h/h' \neq \text{定数}$ のとき $h \not\sim h'$ と書くことにする. Borel の定理 ([1]) の精密化である次の定理が成り立つ.

定理 2.3. $h_i \in H^*$, および $g_i \in \Omega$ ($1 \leq i \leq p$) に対し, 任意の異なる i, j について $h_i \not\sim h_j$ かつ $\sum_{i=1}^p g_i h_i = 0$ ならば, $g_i = 0$ ($1 \leq i \leq p$).

証明. $n=1$ の場合はよく知られた結果である ([8], p. 100). 任意の i に対し $g_i \neq 0$ と仮定する. $\omega \in \mathbb{C}^*$ に対し, $(g_i)_\omega(z) = g_i(z\omega)$, $(h_i)_\omega(z) = h_i(z\omega)$ とおく. 仮定から, 異なる i, j に対し $(h_i)_\omega \not\sim (h_j)_\omega$, かつ $(g_i)_\omega \neq 0$ とする $\omega \in \mathbb{C}^*$ を容易にみつけることができる. とこが $\sum_{i=1}^p (g_i)_\omega (h_i)_\omega = 0$ ゆえ, これは $n=1$ の場合の結果に矛盾する. したがってある g_i は零である. p に関する帰納法で定理 2.3 を得る.

系 2.4. $h_i \in H^*$ ($1 \leq i \leq p$) とし, 任意の $(l_1, \dots, l_p) \in \mathbb{Z}^{p-1} \setminus \{0\}$ に対し $h_1^{l_1} h_2^{l_2} \cdots h_p^{l_p} \neq \text{定数}$ と仮定する. このとき, 有限個の $g_1, \dots, g_p \in \Omega$ に対し

$$\sum_{(l_1, \dots, l_p)} g_{l_1, \dots, l_p} h_1^{l_1} \dots h_p^{l_p} = 0$$

ならば, $g_{l_1, \dots, l_p}$ はすべて零である.

証明. $h_1^{l_1} \dots h_p^{l_p} \in H^*$ であり, $(l_1, \dots, l_p) \neq (m_1, \dots, m_p)$ のとき $h_1^{l_1} \dots h_p^{l_p} \neq h_1^{m_1} \dots h_p^{m_p}$ だから, 定理 2.3 から容易に導かれる.

系 2.5. $h_i \in H^*$, $g_i \in \mathbb{C}$. ($1 \leq i \leq p$) に対し, $g_i \neq 0$ かつ $\sum_{i=1}^p g_i h_i = 0$ とする. 添字の集合 $I = \{1, 2, \dots, p\}$ の分割 $I = \bigcup_{\alpha=1}^n I_\alpha$ を, $i \in I_\alpha, i' \in I_{\alpha'}$ に対し $\alpha = \alpha'$ ならば $h_i \sim h_{i'}$, $\alpha \neq \alpha'$ ならば $h_i \not\sim h_{i'}$ とする様に定める. このとき任意の α に対し $\sum_{i \in I_\alpha} g_i h_i = 0$.

証明. 各 α に対し, $i_\alpha \in I_\alpha$ を一つずつ選び,

$$\psi_\alpha = \sum_{i \in I_\alpha} g_i h_i / g_{i_\alpha}$$

と置く. $\psi_\alpha \in \mathbb{C}$, $\sum_\alpha \psi_\alpha h_{i_\alpha} = 0$ かつ異なる α, α' に対し $h_{i_\alpha} \not\sim h_{i_{\alpha'}}$ だから, 定理 2.3 により $\psi_\alpha = 0$ を得る.

§ 3. 補助定理.

H^* の元 h_{ij} , および $\mathbb{C}$ の非零元 g_{ij} ($i=1, 2, \dots, p, j=1, 2, \dots$) を取り $f_{ij} = g_{ij} h_{ij}$ と置く. p 個の行, 可算無限個の列をもつ行列

$$M = (f_{ij} : i=1, 2, \dots, p, j=1, 2, \dots)$$

に対し, 先ず次の問題を与える.

補題 3.1. M に対し, (a) $i=1, 2, \dots, p$ の順序を適

当にかえ, (b) $j=1, 2, \dots$ を適当な部分列とおきかえ,

(c) M の各行各列を適当な H^* の共通元で割れば, 次の条件をみたす様になる.

- (i) $1 \leq i \leq r$, $j_1 \neq j_2$ のときつねに $h_{ij_1} \neq h_{ij_2}$.
 (ii) $r+1 \leq i \leq p$ のとき, 任意の j に対し $h_{ij} = \text{定数}$.
 ここで $0 \leq r < p$ とする.

証明. 任意の j に対し $h_{pj} = \text{定数}$ としてよい. 操作 (a) ~ (c) のうち (ii) が成り立つ様相最小の r をとる. $0 < r < p$ としてよい. 各 $i=1, 2, \dots, r$ および j に対し $h_{ij} \sim h_{ij'}$ となる j' は有限個しかない. もしある i_0 ($1 \leq i_0 \leq r$), j_0 に対し $h_{i_0 j_0} \sim h_{i_0 j}$ となる j が無限個あれば, (a) ~ (c) を行い, $h_{rj} = \text{定数}$ ($j=1, 2, \dots$) とできるからである. このとき, $j_{k-1} < j_k$ かつ

$$h_{ij_k} \neq h_{ij_1}, h_{ij_k} \neq h_{ij_2}, \dots, h_{ij_k} \neq h_{ij_{k-1}}$$

をみたす様に $j_1, j_2, \dots$ を順次選ぶことができる. これよりたゞちに補題 3.1 を得る.

補題 3.2. 行列 $(f_{ij} = g_{ij} h_{ij})$ が補題 3.1 の結論をみたし, さらに, 任意の $j_1, \dots, j_p$ に対し,

$$\det(f_{ij}; i=1, 2, \dots, p, j=j_1, \dots, j_p) = 0 \quad (2)$$

とする. もし, 任意の j に対し, $j \leq j_{r+1}^* < \dots < j_p^*$ かつ

$$\det(f_{ij}; i=r+1, \dots, p, j=j_{r+1}^*, \dots, j_p^*) \neq 0 \quad (3)$$

とある $j_{r+1}, \dots, j_p$ が存在すれば, 任意の $j_1, \dots, j_r$ に対し

$$\det(f_{ij}; i=1, 2, \dots, r, j=j_1, \dots, j_r) = 0. \quad (4)$$

証明. $\mathbb{C}^*$ を乗法群 H^* の部分群とみて因子群 $G = H^*/\mathbb{C}^*$ を考える. G はねじれのないうーベル群である.

そこで, H^* の高々可算無限個の元 $\eta_1, \dots, \eta_2, \dots$ を,

(i) $\eta_1, \dots, \eta_2, \dots$ を G の元とみるとき $\mathbb{Z}$ 上 一次独立,

(ii) 各 f_{ij} が適当な $c_{ij} \in \mathbb{C}^*$, $l_{ij}^z \in \mathbb{Z}$ によって

$$f_{ij} = c_{ij} \eta_1^{l_{ij}^1} \eta_2^{l_{ij}^2} \dots \eta_z^{l_{ij}^z} \dots \quad (5)$$

と表される様にとる. ここで各 (i, j) に対し $l_{ij}^z \neq 0$ と
なる z は有限個とする.

$$l_{ij} = (l_{ij}^1, l_{ij}^2, \dots, l_{ij}^z, \dots)$$

とあれば, 仮定から, $1 \leq i \leq r, j_1 \neq j_2$ のとき $l_{ij_1} \neq l_{ij_2}$,
 $r+1 \leq i \leq p$ のとき $l_{ij} = 0$.

結論を肯定して, ある $j_1, \dots, j_r$ に対し (4) が成り立
たぬいとする. このとき, 次の事実が成り立つ.

(3.3) 任意の $s = r+1, \dots, p$ に対し次の条件をみたす
添字 $j_{r+1}, \dots, j_p$ ($j_r < j_{r+1} < \dots < j_p$) が存在する.

$$(A) \quad \text{rank}(f_{ij}; i=r+1, \dots, s, j=j_{r+1}, \dots, j_s) = s - r$$

(B) $1 \leq i \leq r, 1 \leq \sigma_1, \dots, \sigma_{s-1}, \tau_1, \dots, \tau_{s-1} \leq p$ のときつねに

$$l_{ij_s} \neq l_{i,j_1} + \dots + l_{i,j_{s-1}} - (l_{\tau_1, j_1} + \dots + l_{\tau_{s-1}, j_{s-1}}).$$

(3.3) の証明. まず $j_{r+1} (> j_r)$ を任意にとる. (A),

(B) をみたす $j_{r+1}, \dots, j_{s-1}$ がすでに選ばれたとして j_s を選ぼう。 $\mathbb{C}^n$ 上の有理型関数の全体を $\mathcal{M}$ とし, $f_j = {}^*(f_{1j}, \dots, f_{pj}) \in \mathcal{M}^{p-r}$ とおく。 $f_{j_{r+1}}, \dots, f_{j_{s-1}}$ は $\mathcal{M}$ 上 1 次独立である。

$$\text{rank}(f_{j_{r+1}}, \dots, f_{j_{s-1}}, g) \leq s-r-1$$

をみたす $g \in \mathcal{M}^{p-r}$ のうち 1 次独立なものは $\leq s-r-1$ 個である。ここで仮定 (3) に注意すれば、条件 (A) をみたす j_s が無限個存在することがわかる。次に条件 (B) をみよう。

$\{l_{\sigma_1 j_1} + \dots + l_{\sigma_{s-1} j_{s-1}} - (l_{\tau_1 j_1} + \dots + l_{\tau_{s-1} j_{s-1}}); 1 \leq \sigma_1, \dots, \sigma_{s-1}, \tau_1, \dots, \tau_{s-1} \leq p\}$ は有限集合である。 l_{ij} の性値から、各 $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_{s-1}, \tau_1, \dots, \tau_{s-1} \in \{1, 2, \dots, p\}$ に対し、

$$l_{ij_s} = l_{\sigma_1 j_1} + \dots + l_{\sigma_{s-1} j_{s-1}} - (l_{\tau_1 j_1} + \dots + l_{\tau_{s-1} j_{s-1}})$$

をみたす j_s は有限個しかない。これらのことから、(A), (B) をみたす j_{s+1} は無限個あることがわかる。これを繰返せば、(A), (B) をみたす $j_{r+1}, \dots, j_p$ の存在がわかる。

補題 3.2 の証明にもどる。 (3.3) の条件 (A), (B) をみたす $j_{r+1}, \dots, j_p$ を取る。 $1, \dots, p$ の置換全体の集合 S_p に対し、

$$S_p^{(1)} = \{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in S_p; 1 \leq \sigma_1, \dots, \sigma_r \leq r\}$$

かつ $S_p^{(2)} = S_p - S_p^{(1)}$ とおく。各 $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ に対し

$$\psi_\sigma := \text{sgn}(\sigma) g_{\sigma_1 j_1} g_{\sigma_2 j_2} \dots g_{\sigma_p j_p} \in \mathbb{C}.$$

$$h_\sigma := h_{\sigma, j_1} h_{\sigma, j_2} \cdots h_{\sigma, j_p} \in H^*$$

とかけば、仮定 (2) により

$$\sum_{\sigma \in S_p^{(1)}} \gamma_\sigma h_\sigma + \sum_{\sigma \in S_p^{(2)}} \gamma_\sigma h_\sigma = \sum_{\sigma \in S_p} \gamma_\sigma h_\sigma = 0.$$

ある $\sigma \in S_p^{(1)}$, $\tau \in S_p^{(2)}$ に対し $h_\sigma \sim h_\tau$ とする。この両辺に (5) を代入すれば、両辺の各 h_τ の指数は一致するゆえ、

$$x_{\sigma, j_1} + \cdots + x_{\sigma, j_p} = x_{\tau, j_1} + \cdots + x_{\tau, j_p}$$

が成り立つ。 $\tau_s \notin \{r+1, \dots, p\}$, $\tau_1, \dots, \tau_p \in \{r+1, \dots, p\}$

となる $s \in \{r+1, \dots, p\}$ を取る。 $r+1 \leq i \leq p$ のとき $x_{ij} = 0$ に注意すれば、これは (3.3) の条件 (B) に矛盾する。

ゆえに、任意の $\sigma \in S_p^{(1)}$, $\tau \in S_p^{(2)}$ に対し $h_\sigma \sim h_\tau$ である。

ここで等式 $\sum_{\sigma \in S_p} \gamma_\sigma h_\sigma = 0$ に系 2.5 を適用すれば、

$$\sum_{\sigma \in S_p^{(1)}} \gamma_\sigma h_\sigma = 0$$

が結論される。他方、容易に計算される様に

$$\sum_{\sigma \in S_p^{(1)}} \gamma_\sigma h_\sigma = \det(f_{ij}; \substack{i=1,2,\dots,r \\ j=j_1, j_2, \dots, j_r}) \det(f_{ij}; \substack{i=r+1, \dots, p \\ j=j_{r+1}, \dots, j_p})$$

であり、 $j_1, \dots, j_p$ の並び方からこの右辺は零である。これは矛盾である。よって結論 (4) を得る。

補助定理 3.4. 行列 $M = (f_{ij} = g_j h_{ij})$ が、補題 3.2 の条件 (2) を満たすとする。このとき、補題 3.1 の操作 (a) ~ (c) を適当に行えば、任意の $j_1, \dots, j_m$ に対し

$$\det(f_{ij}; i=1, 2, \dots, m, j=j_1, \dots, j_m) = 0$$

かつ, $1 \leq i \leq m$ のときつねに $f_{ij} = 0$ とする. ここで $0 < m \leq p$.

証明. $p=2$ から自明である. $\leq p-1$ の場合を仮定して p の場合をみる. M は補題 3.1 の条件 (i), (ii) をみたすとしてよい. 補題 3.2 の仮定がみたされれば, 帰納法の仮定から求める結論を得る. もしそうでなければ, ある j_0 に対し, $j_{r+1}, \dots, j_p > j_0$ のときつねに

$$\det(f_{ij}; i=r+1, \dots, p, j=j_{r+1}, \dots, j_p) = 0.$$

この場合にも同じ結論を得る.

§4. 定理 IV の証明.

$P^N(\mathbb{C})$ 内に一般の位置にある超平面 $H_1, \dots, H_{N+2}$ を取る. これらを平等に扱う為に, $P^N(\mathbb{C})$ を $P^{N+1}(\mathbb{C})$ 内の超平面

$$\{w_1 + w_2 + \dots + w_{N+2} = 0\}$$

と同一視する. 齊次座標 $(w_1 : w_2 : \dots : w_{N+2})$ をうまく選べば

$$H_i = \{w_i = 0\} \cap P^N(\mathbb{C}) \quad (1 \leq i \leq N+2)$$

としてよい.

$\mathbb{C}^n$ 上に因子 $v_1, \dots, v_{N+2}$ を取り, $v(f, H_i) = v_i$ ($1 \leq i \leq N+2$) をみたす非退化有理型写像 $f: \mathbb{C}^n \rightarrow P^N(\mathbb{C})$ の全体 $\mathcal{F}$ が有限であることを示すのが本節の目標である. これを否定して, $\mathcal{F}$ が無限個の元 $f^1, f^2, \dots, f^j, \dots$ を含んだとする. 各 f^j は, 整関数 f_{ij}^j を適当に選べば,

$$f^j = (f_1^j, f_2^j, \dots, f_{N+2}^j)$$

と表示される。そこで $\text{codim} \{ f_1^j = \dots = f_{N+2}^j = 0 \} \geq 2$ を満たす様にとる。 $\nu_{k_i} = \nu_i$ とある整数 k_i を取れば、

$$h_{ij} := f_i^j / k_i \in H^*$$

$$\sum_{i=1}^{N+2} f_i^j = \sum_{i=1}^{N+2} h_{ij} k_i = 0 \quad (6)$$

が成り立つ。

補題 4.1. $h_{ij} \in H^*$ ($1 \leq i \leq p$, $j=1, 2, \dots$) が非零整数 k_i に対し (6) を満たすとする。さらに, $\{1, 2, \dots, p\}$ の任意の部分集合 I に対し

$$\sum_{i \in I} h_{ij} k_i \neq 0 \quad (j=1, 2, \dots) \quad (7)$$

と仮定する。このとき, $j_1, j_2, \dots$ ($j_{k-1} < j_k$) を適当に選べ, 行列 (h_{ij}) の各行各列を適当な H^* の共通元で割れば, 任意の $i=1, 2, \dots, p$, $j=j_1, j_2, \dots$ に対し $h_{ij} = \text{定数}$ となる。

証明. $p=2$ のときはみやすい。 $\leq p-1$ の場合を仮定して p の場合をみる。 (6) によって補助定理 3.4 の仮定が成り立つ。ただしここでは $q_j = 1$ とする。補題 3.1 の操作 (a) ~ (c) を行えば, ある m ($0 < m \leq p$) に対し, 補助定理 3.4 の結論が成り立つ。補題 3.1 の証明からわかる様に異なる j_1, j_2 に対し $h_{pj_1} \neq h_{pj_2}$ といえる。 (h_{ij}) の各行, 各列を H^* の元で割ることは, それぞれ k_i お

よび f_j^j の表示を取りかえることに当る。初めから

$$h_{ij} = \text{定数} \quad (i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots)$$

と仮定してよい。

$$\text{rank}(h_{ij}; 1 \leq i \leq m, j=1, 2, \dots) < m$$

即ち, $\sum_{i=1}^m \lambda_i h_{ij} = 0 \quad (j=1, 2, \dots)$ をみたす $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) (\neq (0, \dots, 0))$ が取れる。 $a_{il} = \lambda_i$ である m 次正則行列 $(a_{il}; 1 \leq i, l \leq m)$ を取り、関係式

$$k_i = \sum_{l=1}^m a_{il} k_l^* \quad (1 \leq i \leq m)$$

によって k_l^* を定義し, $k_i^* = k_i, h_{ij}^* = h_{ij} \quad (m+1 \leq i \leq p)$,

$$h_{lj}^* = \sum_{i=1}^m a_{il} h_{ij} \quad (l \in I) \text{ とおく。このとき}$$

$$\sum_{i=2}^p h_{ij}^* k_i^* = 0 \quad (j=1, 2, \dots).$$

必要なら添字 j を取りかえて, $p \in I$ かつ $\sum_{i \in I} h_{ij}^* k_i^* = 0$ ($j=1, 2, \dots$) であり, さらに I の任意の真部分集合 I' に対し $\sum_{i \in I'} h_{ij}^* k_i^* \neq 0$ ($j=1, 2, \dots$) とする様に, $\{2, \dots, p\}$ の部分集合 I を取る。 $\#I \leq p-1$ ゆえ, 帰納法の仮定から

$$h_{ij}^* = \text{定数}, \quad (i \in I, j=1, 2, \dots)$$

これは矛盾である。なぜなら, 仮定 (7) により, $I \cap \{1, \dots, m\}$ の元 i_0 が存在し, $h_{i_0 j} = \text{定数} \quad (j=1, 2, \dots)$ 。他方, 異なる j_1, j_2 に対し $h_{p j_1}^* \neq h_{p j_2}^*$ が成り立つからである。これより $m=p$, したがって補題 4.1 を得る。

定理 IV の証明にもどらう。仮定から (6) および (7) が成

り立つ。補題 4.1 の結果として f^j の表示, 整数 k_j を適当に取り添字を変えれば, $h_{ij} = \text{定数}$, とくに $h_{i1} = 1$ ($1 \leq i \leq N+2, j=1, 2, \dots$) としてよい。このとき,

$$f^j = (h_{1j} f_1^j : h_{2j} f_2^j : \dots : h_{N+2,j} f_{N+2}^j)$$

が非退化であるという仮定から

$$h_{1j} = h_{2j} = \dots = h_{N+2,j} \quad (j=1, 2, \dots)$$

が得られる。このより $f^1 = f^2 = \dots$ となり, f^j が互いに異なるという仮定に反す。よって 定理 IV を得る。

§5. Borel の定理の拡張.

γ を $\mathbb{C}^*$ から $\mathbb{C}^n$ の上への双正則写像とする。 $\mathbb{C}^n$ 上の有理関数の族 $\mathfrak{A}$ が, 条件

- (i) $\mathbb{C} \subset \mathfrak{A}$, かつ $\mathfrak{A}$ は体である,
- (ii) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_0 := \{ \text{次数} < 1 \text{ の } \mathbb{C}^n \text{ 上の有理型関数全体} \}$
- (iii) 任意の $\mathfrak{A}$ の元 g に対し $g \circ \gamma \in \mathfrak{A}$,
- (iv) 定数 $c \in \mathbb{C}^*$, 正整数 j に対し $g \circ \gamma^j = c g$ をみたす様な $g \in \mathfrak{A}$ は定数に限る。

をみたすとき, γ -admissible と呼ぶことにする。

例. 1°. $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$ は任意の双正則写像 $\gamma: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ に対して γ -admissible である。

2°. $n=1$ とし, $w \in \mathbb{C}^*$ に対し写像 $\gamma_w(z) = z + w$ を考へる。 $\mathfrak{A}_0$ に対し, 明らかに (i) ~ (iii) が成り立つ。(iv)

の条件をみたす $g \in \mathfrak{H}$, かつ非定数 ω のとき, (2.2) により,
 g または $1/g$ が極 z_0 を持つ. 同時に $z_0 + k_j \omega (k \in \mathbb{Z})$
 も極である. これより $\rho(g) \geq 1$ となってしもう. (したがっ
 て $\mathfrak{H}$ は γ_ω -admissible である ([11], [12], 参照).

$\mathbb{C}^n$ 上の非零有理型関数 g_1, g_2 に対し $(g_1/g_2) \circ \gamma^{j_0} =$
 g_1/g_2 をみたす正整数 j_0 が存在することを $g_1 \sim g_2$ で
 示し, これが成り立たないことを $g_1 \not\sim g_2$ で示す.

双正則写像 $\gamma: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ および γ -admissible な族
 $\mathfrak{H}$ に対し, 次の定理が成り立つ.

定理 5.1. $g_i \in \mathfrak{H}$, かつ ω 非定数整関数 $g_i (1 \leq i \leq p)$
 に対し, $\nu_{g_i} \circ \gamma = \nu_{g_i}$, 任意の異なる i, j について $g_i \not\sim g_j$
 かつ $\sum_{i=1}^p g_i g_i = 0$ ならば $g_i = 0 (1 \leq i \leq p)$.

これは, $n=1$ のとき定理 2.3 の拡張である. 実際,
 $g_i \in H^*$ かつ異なる i, j に対し $g_i \not\sim g_j$ のとき, $\nu_{g_i} \circ \gamma$
 $= \nu_{g_i} = 0$ であり, 適当に $\gamma_\omega(z) = z + \omega (\omega \in \mathbb{C}^*)$ を取
 り, $g_i \not\sim_{\gamma_\omega} g_j (i \neq j)$ が成り立つ. これから定理 2.3
 の結論が得られる.

証明のためにまず補題を与える.

補題 5.2. $g_i \in \mathfrak{H}$, かつ ω 非定数整関数 $g_i (1 \leq i \leq p)$
 に対し, $g_i \circ \gamma = c_i g_i$ なる定数 c_i が存在し

$$\det((g_i \circ \gamma^{j-1})(g_i \circ \gamma^{j-1}); 1 \leq i, j \leq p) = 0$$

と仮定する。このとき、ある $i_1, \dots, i_m$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq p$) に
 対し $c_{i_1} = \dots = c_{i_m}$ かつ $g_{i_1}, \dots, g_{i_m}$ が $\mathbb{C}$ 上一次従属である。

証明。 $p=2$ のとき、 $\frac{g_1 \circ \gamma}{g_2 \circ \gamma} = \frac{c_1}{c_2} \frac{g_1}{g_2} \in \mathbb{R}$ から、 $c_1 = c_2$
 $g_1/g_2 = \text{定数}$ が得られ補題 5.2 が成り立つ。 $\leq p-1$ の場
 合を仮定する。 $f_{ij} = (g_i \circ \gamma^{j-1})(g_j \circ \gamma^{j-1})$ とおくと、容易に

$$\det(f_{pj} f_{ij+1} - f_{pj+1} f_{ij}; 1 \leq i, j \leq p-1) = 0$$

が得られる。 $\tilde{g}_i := c_i g_p (g_i \circ \gamma) - c_p g_i (g_p \circ \gamma)$, $\tilde{g}_i := g_i g_p$ ($1 \leq$
 $i \leq p-1$) とおくと、 $\tilde{g}_i \in \mathbb{R}$, $\tilde{g}_i \circ \gamma = c_i c_p \tilde{g}_i$ であり、

$$\det((\tilde{g}_i \circ \gamma^{j-1})(\tilde{g}_j \circ \gamma^{j-1}); 1 \leq i, j \leq p-1) = 0.$$

$\tilde{g}_i = 0$ ならば $c_i = c_p$, $g_i/g_p = \text{定数}$ とやはり補題 5.2
 が成り立つから、 $\tilde{g}_i \neq 0$ ($1 \leq i \leq p-1$) としてよい。帰納
 法の仮定が適用する。適当に $i_1, \dots, i_{m-1}$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_{m-1} \leq$
 $p-1$) を述べれば、 $c_{i_1} = c_{i_2} = \dots = c_{i_{m-1}}$ かつ

$$\sum_{\ell} a_{\ell} \tilde{g}_{i_{\ell}} = g_p (\sum_{\ell} a_{\ell} c_{i_{\ell}} (g_{i_{\ell}} \circ \gamma)) - c_p (g_p \circ \gamma) (\sum_{\ell} a_{\ell} g_{i_{\ell}}) = 0$$

とある $(a_1, \dots, a_{m-1}) \in \mathbb{C}^{m-1} - \{0\}$ が存在する。したがって

$\psi = \sum_{\ell} a_{\ell} g_{i_{\ell}} / g_p \in \mathbb{R}$ にして、 $\psi \circ \gamma = (c_p / c_{i_1}) \psi$. $\mathbb{R}$ に
 対する条件 (iv) により、 $\psi = \text{定数}$, $c_p = c_{i_1}$ が得
 る。このより容易に求める結論を得る。

補題 5.3. $g_i \in \mathbb{R}$, および非零整関数 g_i ($1 \leq i \leq p$)

に対し、 $\psi_{g_i} \circ \gamma = \psi_{g_i}$ かつ任意の $j_1, \dots, j_p$ について

$$\det((g_i \circ \gamma^{j-1})(g_j \circ \gamma^{j-1}); i=1, \dots, p, j=j_1, \dots, j_p) = 0 \quad (8)$$

とする。このとき、ある $i_1, \dots, i_m$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq p$) に対し、 $g_{i_1} \sim \dots \sim g_{i_m}$ かつ $g_{i_1}, \dots, g_{i_m}$ が $\mathbb{C}$ 上一次従属である。

証明。 $p=2$ のとき、仮定から

$$\frac{g_1}{g_2} \frac{g_2 \circ \gamma}{g_1 \circ \gamma} = \frac{g_1 \circ \gamma}{g_1} \frac{g_2}{g_2 \circ \gamma} \in H^1 \cap \mathbb{C} = \mathbb{C}.$$

重に対する条件 (IV) から、容易に補題 5.8 を得る。 $\leq p-1$ のとき成り立つと仮定する。添字をかえて

(α) $r+1 \leq i_1 < i_2 \leq p$ のとき、 $\frac{g_{i_1} \circ \gamma^j}{g_{i_2} \circ \gamma^j} = \frac{g_{i_1}}{g_{i_2}}$ をみたす正整数 j 、定数 c が存在する。

(β) $1 \leq i_1 \leq r$, $r+1 \leq i_2 \leq p$ のとき上の性質がいえないう。といふ。さらに必要なら γ^j を $\gamma \times 1$, (α) で $j=1$ としよ。また、 g_i/g_p を g_i で置きかえ、 $g_p = 1$, (α) によって $g_i \circ \gamma / g_i = \text{定数}$ ($r+1 \leq i \leq p$) としよ。

$$h_{ij} = g_i \gamma^{j-1} / g_i \quad (i=1, \dots, p, j=1, 2, \dots)$$

となく、 $r+1 \leq i \leq p$ の $h_{ij} = \text{定数}$, $1 \leq i \leq r$, $j_1 < j_2$ のとき $h_{ij_1} \neq h_{ij_2}$ である。(8) の i 行を g_i で割れば、

$$\det((g_i \gamma^{j-1}) h_{ij}; i=1, \dots, p, j=j_1, \dots, j_p) = 0$$

が成り立つ。

補題 5.3 の結論を否定する。(α) によって

$$g_{i_1} \sim g_{i_2} \sim \dots \sim g_{i_m} \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq p)$$

のときはつねに $g_{i_1}, \dots, g_{i_m}$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立とする。任意の正整数 j に対し、 $g_i \circ \gamma^j$, $g_i \circ \gamma^j$ ($r+1 \leq i \leq p$)

に補題 5.2 を適用すると

$$\det((g_i \circ \gamma^{kj})(g_i \circ \gamma^{kj}); i=r+1, \dots, p, k=1, \dots, p-r) = 0$$

ではあり得ない。ゆえに, $f_{ij} = (g_i \circ \gamma^{j-1})h_{ij}$, $j_{r+1}^* = j$, $j_{r+2}^* = 2j$,
 $\dots$, $j_r^* = (p-r)j$ に対し補題 3.2 の (3) が成り立つ。これ
 で補題 3.2 の仮定がすべてみたされるから結論 (4) が得
 る。これは矛盾である。ゆえに, 仮定により補題 5.2 の
 結論は起り得ないからである。よって補題 5.3 が成り立つ。

定理 5.1 の証明. p に関する帰納法による. $p=2$ の
 ときは自明である. 任意の i に対し $g_i \neq 0$ として矛盾
 を導けばよい. 仮定によって $\sum_{i=1}^p (g_i \circ \gamma^{j-1})(g_i \circ \gamma^{j-1}) = 0$ ($j=$
 $1, 2, \dots$). (したがって補題 5.3 の仮定がみたされる.
 とは 3 が, 定理 5.1 の仮定は, 補題 5.3 の結論に矛
 盾する. (したがって定理 5.1 が成り立つ.

References

- [1] E. Borel, Sur les zéros des fonctions entières, Acta Math., 20(1897), 357-396.
- [2] H. Fujimoto, On families of meromorphic maps into the complex projective space, Nagoya Math. J., 54(1974), 21-51.
- [3] H. Fujimoto, The uniqueness theorem of meromorphic maps into the complex projective space, Nagoya Math. J., 58(1975), 1-23.
- [4] H. Fujimoto, A uniqueness theorem of algebraically non-degenerate meromorphic maps into $P^N(\mathbb{C})$, Nagoya Math. J., 64(1976), 117-147.

- [5] H. Fujimoto, Remarks to the uniqueness problem of meromorphic maps into $P^N(\mathbb{C})$, I, II, Nagoya Math. J., 71 (1978), 13-41.
- [6] H. Fujimoto, Remarks to the uniqueness problem of meromorphic maps into $P^N(\mathbb{C})$, III, Nagoya Math. J., 75 (1979), 71-85.
- [7] H. Fujimoto, Remarks to the uniqueness problem of meromorphic maps into $P^N(\mathbb{C})$, IV, Nagoya Math. J..
- [8] M.L. Green, Holomorphic maps into the complex projective space omitting hyperplanes, Trans. AMS., 169(1972), 89-103.
- [9] R. Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris (1929).
- [10] W. Stoll, Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegebenen Nullstellenflächen, Math. Z., 57(1953), 211-237.
- [11] H. Urabe and C. Yang, On the zeros of an entire function which is periodic mod a non-constant entire function of order less than one, Proc. Japan Acad. Ser. A., 54(1978), 142-144.
- [12] H. Urabe and C. Yang, On a characteristic property of periodic entire functions, preprint.