

*Rudra*群について

北大 理

吉田 知行

奥山 哲郎

Rudra によって発見された、位数 $2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$ の単純群 (以下、*Rd.* と記す) について、*involution* の中核化群の構造からの特徴付けが、*Parrott* (*central* の場合)、*Dempwolff* (*non-central* の場合) によってなされています。

ここでは、2-Sylow 群の構造からの特徴付けについて考えてみます。

定理 A. *Rd.* の 2-Sylow 群と同型な 2 群を Sylow 群としてもつ有限単純群は、*Rd.* に限る。

定理 A は、*Asa* によって既に得られているようですが、より一般的に、次の定理が証明されます。

定理 B. G を $O^2(G) = G$ なる有限群とし、その 2-Sylow 群 T が、次の条件を満足するとする。

(a) $|T| \geq 2^{14}$

(b) $|Z_4(T)| = 2^4$

(c) $W = C_T(Z_3(T))$ とおくと $\Phi(W) \subseteq Z_3(T)$

(d) A を $|W:A| \leq 2^4$ なる W の部分群とすると $A \supseteq \Phi(W)$

このとき、次のいずれかが成立する。

(1) $G/O(G) \cong R_d$ あるいは、

(2) $G \triangleright O(G)W$, $G/O(G)W \cong GL(3, 2)$

証明の概略を以下に記す。 G, T, W を定理の仮定をみたす群とする。

1. Transfer 及び $N_G(W')$ の構造.

補題 1.1.

(1) $Z(W) \supseteq W' = \Phi(W) = Z_3(T) \cong Z_2^3$

(2) $T/W \cong D_8$, $W/W' \cong Z_2^8$, $T/W' \cong Z_2 \wr D_8$, $|T| = 2^{14}$

(3) $G \ni g$ に対し、 $|W:W \cap T^g| \leq 2$ なら $g \in N_G(W')$

(4) W : weakly closed in T w.r.to G .

補題 1.2.

(1) $T \leq X \leq G$ なる部分群 X に対し、 $T \cap X' = T \cap N_X(W')$

(2) $N_G(W')/C_G(W') \cong GL(3, 2)$

(1) は、1.1 (3) 及び、Yoshida の Transfer の適用による。(2) は、(1), $W' \cong Z_2^3$ なることより得られる。

補題 1.3. $N_G(W') = N_G(W) O(N_G(W'))$

1.1.(2) より, $\text{Aut } T$ が 2-群なること, 及び, $N_G(W)/C_G(W)W$ が $GL(8, 2)$ の部分群であることを用いて証明される。

2. $N_G(W)$ 及び, W の構造.

$N = N_G(W)$, $\bar{N} = N_G(W)/O(N_G(W))$ とおくと, 補題 1.2. 1.3 より, $\bar{N}/W \cong GL(3, 2)$ は, $W/W' \cong \mathbb{Z}_2^8$, $W' \cong \mathbb{Z}_2^3$ に, faithful に作用している。

補題 2.1. $\bar{N}/W$ は, W/W' , W' 上に既約に作用している。

W' 上は, 明らかで, W/W' のときは, $GL(3, 2)$ の 2-modular 表現の理論を用いることができる ($GL(3, 2)$ の既約な, 2-modular 表現は, 4個で次数が, 1, 3, 3, 8, すべて $\mathbb{Z}_2$ 上で書ける)。

補題 2.2. W の構造は, 一意的に決定される。

W/W' , W' を, $GF(2)[GL(3, 2)]$ -加群と考える。このとき, $W/W' \otimes W/W' \ni x \otimes y \mapsto [x, y] \in W'$ なる $GL(3, 2)$ -準同型を考えると, $W/W' \otimes W/W'$ の既約 factor module を調べる: ことより, $[x, y]$ が一意的に定まる。さらに, $W/W' \ni x \mapsto x^2 \in W'$ なる写像を考えると, x^2 が一意的に定まることが示され。

W の構造が決定される。

補題 2.2 の証明に使われる条件は, $Rd.$ の 2-Sylow 群の W に相当する部分群についてもみたされよう. 以下において Dempwolff のいくつかの補題の結果を利用することができる.

補題 2.3. $\text{rank } W = 5$, W は, 367 個の involutions をもつ

補題 2.4. N での involutions の共役類は, 4 個で, 次のようにとれる.

$$t \in T - W, \quad e, u \in W - W', \quad z \in W'$$

$$|C_N(t)| = 2^8, \quad |C_N(u)| = 2'', \quad |C_N(e)| = 2^8 \cdot 7, \quad |C_N(z)| = 2^{11}$$

$$C_T(e) \cong \mathbb{Z}_2^2 \times \text{Suz}(8)_2 \text{ は } C_G(e) \text{ の 2-Sylow 群.}$$

これは, Dempwolff の結果などから容易に得られる。

3. involutions の fusion 及び 中心化群の構造

W' が strongly closed in T w.r. to G のときは,

Goldschmidt により, G が決定され, 定理の (2) が成立する,

以下, W は strongly closed でないとする。

補題 3.1. t, u, e, z について.

$t \sim u \sim z \times e$ in G が成立する。

$N/W \cong GL(3, 2)$ の order 3 の元の W の中心化群を Q とおくと, $Q \cong Q_8$, $C_W(Q) = Y$ は Z_2^5 と同型となる。

このとき, 決が成立する。

補題 3.2. $N_G(Y)/O_{2,2}(N_G(Y)) \cong S_5$

$$C_G(Y)' = \langle z \rangle O_{2,2}'(N_G(Y)) \triangleleft N_G(Y)$$

これより, $C_G(z)/O_{2,2}(C_G(z)) \cong S_5$ が導かれる。

補題 3.3. $C_G(e)$: solvable または, $C_G(e)/O(C_G(e))$

は $Z_2^2 \times Su_3(8)$ に同型

補題 3.2, 3.3, 及び Gorenstein-Walter より

$O(C_G(z)) = 1 = O(C_G(e))$ となり, Parrott, Dempwolff

の結果から, G が決定できる。