

巾事行列からなる共役類の肉包の定義 ideal と

Weyl 群の表現について

東北大学 理学部 谷崎俊之

30. 序

複素数体上の単純 Lie 環に対して、その adjoint 表現での不変多項式環と nilpotent variety の関係を記述する Kostant の古典的結果 [11] は、その後対称空間等に対する拡張がなされて (Kostant-Rallis [12], Vinberg [22])、また特異点理論等へ応用されて、威力を発揮してゐる。(Brieskorn [2], Slodowy [18])

最近 De Concini-Procesi の論文 [3] において、Weyl 群の表現とも関連して、Kostant の結果をある方向で拡張しようとする試みが行なわれ、 A_n 型単純 Lie 環に対してある結果が得られたので、これを解説する。主要結果は 3.4 の定理 1 及び 3.5 の定理 2 であるが、こゝでは De Concini-Procesi の原論文 [3] とは少し違う方法で証明を与える。特に定理 2 の証明は原論文の証明に比べて非常に簡単になつてゐる。

この小文を書くにあたり、Springer 表現の事等々親切に

教えて下さった堀田良之先生に感謝します。

§1. Kostant の結果 [11] の復習

$G \in \mathbb{C}$ 上の reductive 万有結線型代数群, $T \in G$ の極大 Torus とし, Σ を Lie 環 $\mathfrak{g}$ 上の根系とする。また $\mathfrak{g}$ 中の nilpotent element 全体の $\mathfrak{g}$ 上の subvariety N とする。 N の定義 ideal $I(N) := \{f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \mid f|_N = 0\}$ は、次の様に不変多項式環を用いて記述される。すなわち、 G の $\mathfrak{g}$ 上の adjoint 表現 ρ の不変多項式環 $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ とするとき、 $\tilde{\mathfrak{g}}$ は $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ の graded subalgebra であるから、 $\tilde{\mathfrak{g}}^+ = \bigoplus_{k \geq 1} (\tilde{\mathfrak{g}})_k$ とおくとき、

定理 (Kostant)

$$I(N) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \tilde{\mathfrak{g}}^+$$

(従って、adjoint 表現に依り、 N は Mumford [17] の意味での unstable point の全体に等しい。)

また $\tilde{\mathfrak{g}}$ は algebra として、有限個の斉次代数独立な生成系 $f_1, f_2, \dots, f_\ell$ ($\ell = \dim T$) を持つのである。

$$I(N) = (f_1, \dots, f_\ell)$$

と表す。

$\pm \in \mathfrak{g}$ の ρ に依る Weyl 群 W とし、 $\mathcal{J} = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^W$ とおくとき、 $\tilde{\mathfrak{g}}$ と $\mathcal{J}$ の間に次の関係が成立する。

定理 (Chevalley)

射影空間 $\mathbb{P}^n \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}[y]$ とするとき

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x] & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}[y] \\ \uparrow & \curvearrowright & \uparrow \\ \tilde{J} & \xrightarrow{\sim} & J \end{array}$$

である。

(いま J は graded algebra なる $\alpha \in \mathbb{Z}$ 同様に J^+ を定義すると、次の事はよく知られている)。

命題

$$\mathbb{C}[y] / \mathbb{C}[y] J^+ \cong H^*(\mathcal{G}_B, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[W] \quad (\text{CW-加群と}(2))$$

($E \in \mathbb{C}$, B は $T \in \mathbb{C}$ を含む Borel 部分群とする。)

$\mathbb{C}$ algebra $\mathbb{C}[y] / \mathbb{C}[y] J^+$ は、次の様に幾何学的に解釈できる。

$\mathbb{C}[y] = \mathbb{C}[x] / I(y)$ ($I(y)$ は y の定義 ideal) なる $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C}[y] / \mathbb{C}[y] J^+ \cong \mathbb{C}[x] / I(y) + \mathbb{C}[x] J^+ = \mathbb{C}[x] / I(y) + I(N)$$

である。よって $\mathbb{C}[y] / \mathbb{C}[y] J^+$ は y の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ と nilpotent variety N との scheme 論的な意味での intersection $\mathfrak{h} \cap N$ の交代環 $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \cap N]$ になっている。 $\mathfrak{h}$ と N の集合論的な意味での intersection は $\{0\}$ なる $\mathfrak{h}$ である。 $\mathfrak{h} \cap N$ は原点 $\{0\}$ の $\mathbb{C}$ に support を持つ non-reduced な scheme である。

(この節で述べた事の A 型での实例については §3.1 に参照されたい。)

§2. 問題の定式化

nilpotent variety N は G の作用に關して有限個の共役類にわけられるが、このうちで最も次元の高い共役類が唯一つあり、この共役類に含まれる $X \in \mathfrak{g}$ は regular nilpotent element といい。一般の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\overline{O}_X = \overline{\text{Ad}(G) \cdot X}$ と書くとき、 X が regular nilpotent ならば $N = \overline{O}_X$ である。我々の目標は §1 に於ける N 上一般の $X \in N$ に対する $\overline{O}_X \subset N$ で置換えられたとき、§1. の話がどの様に拡張されるかを調べる事である。勝手な $X \in N$ に対して $\mathbb{C}[\mathfrak{g} \cap \overline{O}_X] (= \mathbb{C}[\mathfrak{g}] / I(\mathfrak{g}) \cap I(\overline{O}_X) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}] / I(\overline{O}_X))$ には自然に $\mathbb{W}$ -加群の構造が入る。

問題1. $\mathbb{C}[\mathfrak{g} \cap \overline{O}_X]$ の $\mathbb{W}$ -加群としての構造を求めよ。

Weyl 群の表現についてはこれまで多くの研究があり、各 nilpotent conjugacy class に対して種々の cohomology を使って幾つかの方法で表現の構成がなされている。

(Cf. Springer [20], [21], Slodowy [19], Kazhdan-Lusztig [9], Lusztig [16])

問題2. $\mathbb{C}[\mathfrak{g} \cap \overline{O}_X]$ と Springer 表現 ([20], [21]) との間に何らかの関係があるか。

上 $\mathbb{C}[\mathfrak{g} \cap \overline{O}_X]$ を調べるためには、 $\overline{O}_X$ の定義 ideal $I(\overline{O}_X)$ を調べる必要がある。

問題3. $I(\overline{O}_X)$ を求めよ。具体的には ideal $I(\overline{O}_X)$ の有限個

ひらける生成系 $f_1, \dots, f_r$ を与える。

§1. ここで述べたことは X が regular nilpotent ならば問題3に対する答えはあるが、一般の $X \in N$ に対しては、解答は知られていない。(A_m 型 のときでも同様。)

以下紹介する De Concini — Procesi の結果は $G = GL_m(\mathbb{C})$ のときに、上の問題1及問題2に対する答えを与えるものである。

§3 以降では $G = GL_m(\mathbb{C})$ のときのみ扱う。

§3. $GL_m(\mathbb{C})$ の nilpotent variety

3.1 $G = GL_m(\mathbb{C})$, $T = \left\{ \begin{bmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_m \end{bmatrix} \mid g_i \in \mathbb{C}^+ \right\}$ とおくと T は Lie 環 $\mathfrak{g} = M_m(\mathbb{C})$, $\mathfrak{t} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_m \end{bmatrix} \mid x_i \in \mathbb{C} \right\}$ となる。 $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\text{Ad}(g) \cdot X = gXg^{-1}$ であり、nilpotent variety N は $N = \{ \text{nilpotent matrices} \} = \{ \text{固有値が全 } 0 \text{ である行列} \}$ と与えられる。 $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}$ に関する Weyl 群を W とするとき、 W は m 次対称群 S_m と同型である。 $\mathfrak{t}$ の W の作用は、

$$w \cdot \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{w^{-1}(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_{w^{-1}(m)} \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \text{なる。}$$

$$\det(tI - X) = t^m - f_1(X)t^{m-1} + f_2(X)t^{m-2} - \dots + (-1)^m f_m(X)$$

$$(f_1(X) = \text{Trace}(X), f_m(X) = \det X)$$

$$\text{と} \quad \mathcal{J} = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_m], \quad \mathcal{J} = \mathbb{C}[\mathfrak{t}]^W = \mathbb{C}[f_1|_t, \dots, f_m|_t]$$

とある。 $f_i \left(\begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_m \end{pmatrix} \right)$ は $x_1, \dots, x_m$ の i 次基本対称式であることに注意して置く。

3.2 nilpotent conjugacy class a parametrization

$X, Y \in \mathfrak{g} = M_n(\mathbb{C})$ が共役であるためには $\exists$ a Jordan 標準形が一致する事が必要十分である。{nilpotent conjugacy class} は n の分割の集合と 1 対 1 に対応する事がわかる。即ち、 n の分割とは、自然数からなる有限列 $\alpha = (b_0 \geq b_1 \geq \dots)$ であって $\sum_i b_i = n$ なるものを α とする。 n の分割 $\alpha = (b_0 \geq b_1 \geq \dots)$ に対して

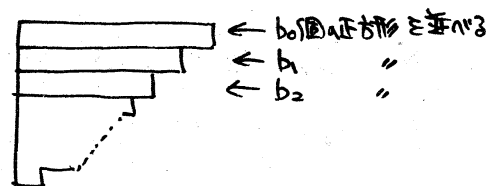
$$X \sim_{GL_n(\mathbb{C})} \begin{array}{|c|} \hline N_{b_0} \\ \hline N_{b_1} \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array}, \quad N_{\alpha} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad 0 \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \text{と} \quad \exists X \in \text{Type } \alpha \text{ の}$$

nilpotent element といふ事にして、Type α の nilpotent element

全体からなる共役類 $\in \mathcal{O}_{\alpha}$ とする。

また $\alpha = (b_0 \geq b_1 \geq \dots)$ を図式的に表わす

すなわち、右図のような文が n の



Young 図形で書く。以上まとめて

$$\{\text{nilpotent conjugacy class}\} \leftrightarrow \{n \text{ の分割}\} \leftrightarrow \{\text{互不相同な Young 図形}\}$$

また、 n の分割 $\alpha = (b_0 \geq b_1 \geq \dots)$ に対して α の双対分割

$$\alpha' = (c_0 \geq c_1 \geq \dots) \in c_i = \#\{j \mid b_j \geq i+1\} \text{ で定義する。}$$

operation $\alpha \mapsto \alpha'$ は Young 図形の転置に対応する。

3.3 closure relation

n の分割全体の集合に次の様な半順序をいれる。

定義 $\alpha = (b_0 \geq b_1 \geq \dots)$, $\tau = (b'_0 \geq b'_1 \geq \dots)$ に対して

$$\alpha \geq \tau \iff \sum_{i=0}^j b_i \geq \sum_{i=0}^j b'_i \quad (\text{右辺} \leq \text{左辺} \text{ が成り立つとき、成り立つ})$$

当に $0 \in \mathcal{O}$ を考える α とする。)

命題 (Gerstenhaber [4], Cf. 草場 [15])

$$\alpha \succ \tau \iff \check{\alpha} \succ \check{\tau} \iff \overline{\mathcal{O}}_\alpha \supset \mathcal{O}_\tau$$

簡単にこの命題の証明を述べよう。以下述べる証明は [4] の証明とは違う。 $\alpha \succ \tau \iff \check{\alpha} \succ \check{\tau}$ は Young 図形の対応と論べればわかるので $\alpha \succ \tau \iff \overline{\mathcal{O}}_\alpha \supset \mathcal{O}_\tau$ を示せばよい。

($\overline{\mathcal{O}}_\alpha \supset \mathcal{O}_\tau \Rightarrow \alpha \succ \tau$ の証明)

一般に $X \in \mathcal{O}$ に対し $d_X^X(t) := ((tI - A) \text{ の } t \text{ 次元小行列式の最大公約式})$

とみるとき, $\alpha = (b_0 \geq b_1 \geq \dots)$ に対して

$$X \in \mathcal{O}_\alpha \text{ ならば } d_X^X(t) = t^{U_\alpha(k)}$$

$$(t \in \mathbb{C} \setminus U_\alpha(k) = b_{m-k} + b_{m-k+1} + \dots)$$



斜線部分の面積が $U_\alpha(k)$

とある事がわかる。 $X \in \mathcal{O}_\alpha, X' \in \mathcal{O}_\tau, \overline{\mathcal{O}}_\alpha \supset \mathcal{O}_\tau$ ならば

$$d_X^X(t) \mid d_{X'}^{X'}(t) \quad (k=1, 2, \dots, m) \text{ ならば } U_\alpha(k) \leq U_\tau(k) \quad (\forall k),$$

よって $\alpha \succ \tau$ である。

($\alpha \succ \tau \Rightarrow \overline{\mathcal{O}}_\alpha \supset \mathcal{O}_\tau$ の証明)

簡単な考察により, $b_k = b'_k (k \neq c, j), b_c = p, b_j = g, b'_c = p-1, b'_j = g+1$

($p \geq g+2$) のとき示せばよい事がわかる。よって $\pm 1 =$

$\alpha = (p \geq g), \tau = (p-1 \geq g+1)$ ($t \in \mathbb{C} \setminus (p \geq g+2)$ のときに示せば

よい)。

$$X_\varepsilon = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} \overbrace{0 \dots 0}^{p-1} \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \overbrace{0 \dots 0}^{g+1} \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline 0 & \varepsilon \end{array}$$

とみるとき $\begin{cases} \varepsilon \neq 0 \Rightarrow X_\varepsilon \in \mathcal{O}_\alpha \\ \varepsilon = 0 \Rightarrow X_\varepsilon \in \mathcal{O}_\tau \end{cases}$

ならば $\overline{\mathcal{O}}_\alpha \supset \mathcal{O}_\tau$

(証明終わり)

上の証明が同様の事がわかる。

$$\underline{\text{系}} \quad X \in \overline{O_\alpha} \iff (\epsilon I - X) \text{ の } \epsilon\text{-次小行列式は全て } \epsilon^{u_\alpha(\epsilon)} \text{ で割り切れる。}$$

$$(\forall \epsilon = 1, 2, \dots, m)$$

いま m の分割 α に対し $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] = \mathbb{C}[X_{\epsilon j} \mid 1 \leq \epsilon, j \leq m]$ の有限部分集合 $\{f_i^\alpha\}$ を

$$\{f_i^\alpha\} = \left\{ \begin{array}{l} (\epsilon I - X_{\epsilon j}) \text{ の } \epsilon\text{-次小行列式の} \\ \epsilon^m \text{ の係数} \end{array} \middle| \begin{array}{l} \epsilon = 1, \dots, m \\ m \leq u_\alpha(\epsilon) - 1 \end{array} \right\}$$

により定義すると

$$\underline{\text{系}} \quad X \in \overline{O_\alpha} \iff f_i^\alpha(X) = 0 \quad (\forall i)$$

De Concini-Procesi の原論文 [3] では、全く別の方法により $X \in \overline{O_\alpha} \iff g_i^\alpha(X) = 0 \quad (\forall i)$ となる $\{g_i^\alpha\}$ を構成して §2 の命題 3 にあてはめる予想を述べている。

$$\underline{\text{予想 (De Concini-Procesi)}} \quad I(\overline{O_\alpha}) = (g_i^\alpha)$$

== では、次の予想を記しておく。

$$\underline{\text{予想 (谷崎)}} \quad I(\overline{O_\alpha}) = (f_i^\alpha)$$

§4. $\mathbb{C}[\mathfrak{d} \cap \overline{O_\alpha}]$ の $\mathcal{W}$ -加群としての構造

$$\underline{4.1} \quad \text{簡単のため } \mathbb{C}[\mathfrak{d} \cap \overline{O_\alpha}] = \mathbb{C}[X_{\epsilon j}] / I(\mathfrak{d}) + I(\overline{O_\alpha}) \text{ と}$$

A_α と記す事にする。

$$\underline{\text{定理 1}} \quad A_\alpha \cong \text{Ind}_{H_\alpha}^{S_m}(1_{H_\alpha}) \quad (\mathcal{W}\text{-加群として})$$

$$(\text{== 即ち } \alpha = (0_0 \geq c_1 \geq \dots) \text{ に対して } H_\alpha = S_{c_0} \times S_{c_1} \times \dots \subset S_m)$$

$$\underline{\text{系}} \quad \dim A_\alpha = \binom{m}{\alpha} := \frac{m!}{c_0! c_1! \cdots}$$

定理1の証明は、次の2段階に分けられる。

① $A_\alpha \hookrightarrow \text{Ind}_{H_\alpha}^{S_m}(1_{H_\alpha})$ を示す。

② §3.3 で与えた $\{f_i^\alpha\} \subset I(\bar{O}_\alpha)$ に対し

$$\bar{A}_\alpha = \mathbb{C}[X_{ij}] / (f_i^\alpha + I(4)) \quad \text{と置くとき} \quad \dim \bar{A}_\alpha \leq \binom{m}{\alpha}$$

A_α は $\bar{A}_\alpha$ の quotient になる。①, ② から定理1が従う事は明らかである。①は Kraft [13] に証明してある。②は、今ある preprint だけに、まだ証明していない。しかし、Borho-Kraft [1] の結果を用いる。[1] では、共役類の閉包が normal variety である事を示している。種々の事を証明しているが、Kraft-Procesi [14] で A_m 型 α とする任意の $\bar{O}_\alpha$ が normal になる事が示されている。[1] の結果がそのまま使える。(ただし、一般の単純 Lie 環の nilpotent conjugacy class の場合は、その閉包が normal variety になるとは限らない。反例については Kraft-Procesi [14] を見よ。)

4.2 以下②を示す。De Concini-Procesi [3] では、 B_l の $\{g_i^\alpha\} \subset I(\bar{O}_\alpha)$ を用いて議論しているが、ここでは §3.3 で与えた $\{f_i^\alpha\}$ でも同様に示す事を示す。

記号 $\cdot A^{(m)} = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_m] = \mathbb{C}[t]$

$\cdot \alpha = (c_0 \geq c_1 \geq \dots)$ に対して

$$K_\alpha = \left(\begin{array}{l} (t - X_{c_1}) \cdots (t - X_{c_k}) \in A^{(m)}[t] \\ \text{の } t^m \text{ の係数} \end{array} \middle| \begin{array}{l} k=1, 2, \dots, m \\ 1 \leq c_1 < \dots < c_k \leq m \\ m \leq u_n(k) - 1 \end{array} \right)$$

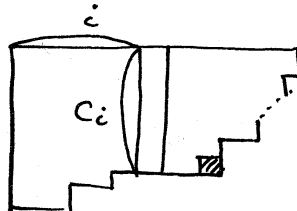
$= \alpha$ とし $\overline{A}_\alpha = \overline{A}_\alpha^{(m)} = A^{(m)} / K_\alpha$ であるが、我々の示したものは次の事であった。

主張 $\dim_{\mathbb{C}} \overline{A}_\alpha \leq \binom{m}{\alpha}$

証明は m に関する帰納法による。 $m=1$ のときは明らかで、以下 $m \geq 2$ とし $(m-1)$ まで主張が正しいとする。

定義 m の分割 $\alpha = (c_0 \geq c_1 \geq \dots)$ があるとき、 $c_i \neq 0$ なる i に対して $(m-1)$ の分割 α^i を次の様に定義する。

α に対応する Young 図形が右図で、
たとえば $\alpha = (3, 2, 1)$ の
box を除いて得られる Young 図形
に対応する $(m-1)$ の分割 α^i とする。



定義 algebra homomorphism $A^{(m)} \xrightarrow{\Phi} A^{(m-1)}$ を

$X_j \mapsto X_j \ (j \neq m), \ X_m \mapsto 0$ により定義する。

以下の方針は次のとおり。

(I) Φ は $\overline{A}_\alpha^{(m)} \xrightarrow{\Phi_c} \overline{A}_{\alpha^i}^{(m-1)}$ なる全射準同型を引き起こす。

(II) $\overline{A}_\alpha^{(m)}$ の ideal J_i を $J_i = \overline{A}_\alpha^{(m)} \cdot X_m^i$ により定義するとき J_i / J_{i+1} は $\overline{A}_{\alpha^i}^{(m-1)}$ -加群だが、さらに $\overline{A}_{\alpha^i}^{(m-1)}$ -加群の構

が成り立つ。(i.e. $(\text{Ker } \Phi_i) \cdot X_m^i \subset (X_m^{i+1})$)

(III) $c_i = 0$ かつ $J_i = 0$ (i.e. $X_m^i = 0$ in $\overline{A}_\alpha^{(m)}$)

(I), (II), (III) から主張が示される事を見たい。 J_i/J_{i+1} は $\overline{A}_\alpha^{(m-1)}$ -module として single generator を持つのである。

$$\dim(J_i/J_{i+1}) \leq \dim \overline{A}_\alpha^{(m-1)} \leq \binom{m-1}{\alpha_i} \quad (\odot \text{ 帰納法 の 仮定 })$$

$$\text{よって } \dim \overline{A}_\alpha^{(m)} = \sum_{\substack{i \geq 0 \\ c_i \neq 0}} \dim(J_i/J_{i+1}) \leq \sum_i \binom{m-1}{\alpha_i} = \binom{m}{\alpha} \text{ と なる。}$$

(III) の証明は (II) の証明の一部分に含まれるのである。(I) (II) を示せばよい。

α_i の定義から、次の補題は示される。

補題 $1 \leq p \leq m$, $u_p \geq 1$ $1 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_p \leq m$ として、

$(t - X_{c_1}) \dots (t - X_{c_p})$ の t^m の係数は D_m とする。

$c_p = m$ のとき

$$\Phi(D_m) \in [K_{\alpha_i} \text{ の generator system}] \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq u_p & (p \leq m - c_i) \\ m \leq u_{\alpha(p-1)} & (p > m - c_i) \end{cases}$$

(ii) $c_p < m$ のとき

$$\Phi(D_m) \in [K_{\alpha_i} \text{ の generator system}] \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq u_p(p+1) - 1 & (p < m - c_i) \\ m \leq u_{\alpha(p+1)-2} & (p \geq m - c_i) \end{cases}$$

よって (I) の正しい事がわかる。また $\overline{A}_\alpha^{(m)}$ の ideal $\text{Ker } \Phi_i$ は次の様に生成系を持つ事がわかる。

補題 $\text{Ker } \Phi_c = (X_m)$

$$+ \left((t-X_{c_1}) \cdots (t-X_{c_r}) \text{ の } t^m \text{ の係数} \right) \left| \begin{array}{l} c_r < m \\ m \leq U_a(r+1)-1 \quad (r \leq m-c_c-1) \\ m \leq U_a(r+1)-2 \quad (r \geq m-c_c) \end{array} \right.$$

$$+ \left((t-X_{c_1}) \cdots (t-X_{c_r}) \text{ の } t^{U_a(r)} \text{ の係数} \right) \left| \begin{array}{l} c_r = m \\ r \leq m-c_c \end{array} \right.$$

(II) を示すには、 $(\text{Ker } \Phi_c) X_m^c \subset (X_m^{c+1}) \text{ (in } \overline{A}_a^{(m)})$ を示せば
 よい。すなわち、次の事を示せばよい。

補題

i) $X_m^c (t-X_{c_1}) \cdots (t-X_{c_r})$ の t^m の係数 $\in (X_m^{c+1}) \text{ (in } \overline{A}_a^{(m)})$

ただし $c_r < m$, $m \leq U_a(r+1)-1 \quad (r \leq m-c_c-1)$
 $m \leq U_a(r+1)-2 \quad (r \geq m-c_c)$

ii) $X_m^c (t-X_{c_1}) \cdots (t-X_{c_r})$ の $t^{U_a(r)}$ の係数 $\in (X_m^{c+1}) \text{ (in } \overline{A}_a^{(m)})$

ただし $c_r = m$, $r \leq m-c_c$

(証明) 以下の議論は全て $\overline{A}_a^{(m)}[t]$ を考える事とする。

まず(i)を示す。 $(t-X_{c_1}) \cdots (t-X_{c_r}) = t^r + a_{r-1}t^{r-1} + \cdots + a_1t + a_0$

とおく。 $\overline{A}_a^{(m)}[t]$ 中で考えようとする。

$$(t-X_m)(t-X_{c_1}) \cdots (t-X_{c_r}) = (t-X_m)(t^r + a_{r-1}t^{r-1} + \cdots + a_0)$$

の t^m の係数は全て 0 である。(ただし $m \leq U_a(r+1)-1$)

より展開すると

$$-a_0 X_m = 0$$

$$a_0 - a_1 X_m = 0$$

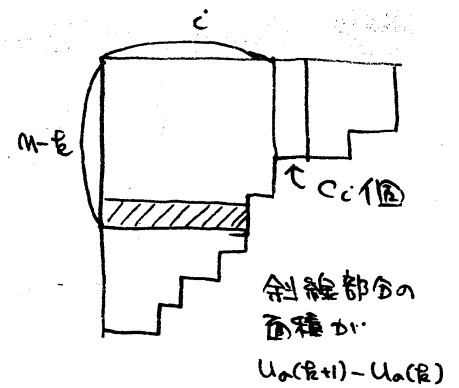
$$a_1 - a_2 X_m = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{u(k+1)-2} - a_{u(k+1)-1} X_m = 0$$

$$a_m X_m^c = a_{m+1} X_m^{c+1} \in (X_m^{c+1})$$

$(m \leq u(k+1)-2)$



$\bar{\tau} a \geq k \leq m - c_i - 1, m = u_a(k+1) - 1$ としよ。このとき $u_a(k+1) - u_a(k) \leq c$ である。(I図参照)

$$\begin{aligned}
 \bar{\tau} a \geq u_a(k+1) - 1 \quad X_m^c &= a_{u_a(k+1)-2} X_m^{c-1} \\
 &\vdots \\
 &= a_{u_a(k)-1} X_m^{c - (u_a(k+1) - u_a(k))}
 \end{aligned}$$

$a_{u_a(k)-1} = 0$ in $\bar{A}_\sigma^{(n)}$. $\bar{\tau} a \geq c_i$ だと示す。

次に (ii) を示す。 $(t - X_{c_1}) \cdots (t - X_{c_{k-1}}) = t^{k-1} + b_{k-2} t^{k-2} + \cdots + b_0$ とおく。 $(t - X_{c_1}) \cdots (t - X_{c_k}) = (t - X_m) (t^{k-1} + b_{k-2} t^{k-2} + \cdots + b_0)$

$\bar{\tau} a \geq$

$$((t - X_{c_1}) \cdots (t - X_{c_k}) \text{ の } t^{u_a(k)} \text{ の係数}) \cdot X_m^c$$

$$= b_{u_a(k)-1} X_m^c - b_{u_a(k)} X_m^{c+1}$$

と示す。 $k-1 \leq m - c_i - 1$ $\bar{\tau} a \geq c_i$ により $b_{u_a(k)-1} X_m^c \in (X_m^{c+1})$

$\bar{\tau} a \geq c_i$ を示す。

(証明おわり)

注意 定理1の証明から $A_\sigma = \bigoplus_i X_m^i A_{\sigma_i}^{(m-i)}$ と書ける事がわかる。これから帰納的に A_σ の base が与えられる。特に graded algebra A_σ の最高次部分の基底は、Type σ の

Young 図形上の standard tableaux と 1 対 1 に自然に対応し
 て与えられる。§5 の定理 2 からわかるが、 A_n の最高
 次の部分群は W -加群として λ に対応する既約表現 (cf.
 岩城 [7], 彌永-杉浦 [8]) になる。また standard
 tableaux により与えられる base は、いわゆる Young の標準
 基底 (cf. 彌永-杉浦 [8]) になる様である。

§5. Springer 表現との関係

5.1 代数多様体 B と $\mathbb{C}$ の cohomology 環 $H^*(B)$ について。

$G = GL_n(\mathbb{C}) = GL(V)$ ($V = \mathbb{C}^n$) とし V の complete flag の
 全体を B と書く。また

$$B = \{ (0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = V) \mid \dim V_i = i \text{ (} \forall i \text{)} \}$$

いま、 $B = \{ (g_{ij}) \in GL_n(\mathbb{C}) \mid g_{ij} = 0 \text{ (} i > j \text{)} \}$ とおくと

B は G の Borel 部分群であるが、次の様に 1 対 1 の対応があ
 る。

$$\begin{array}{ccccc} \{G \text{ の Borel 部分群} \} & \longleftrightarrow & G/B & \longleftrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ gBg^{-1} & \longleftrightarrow & gB & \longleftrightarrow & \{ (V_i) \mid V_i = \sum_{j=1}^i \mathbb{C} g e_j \} \end{array}$$

($E \in U, \mathbb{C}^n$ の standard base $e_1, \dots, e_n$ とする。)

すなわち G/B は非特異射影代数多様体なので、 B にも非特異射影
 代数多様体の構造が入る。また B の cohomology 環 $H^*(B) =$
 $H^*(B, \mathbb{C})$ は次の様に記述できる。 B 上の trivial vector bundle

$B \times V$ の k 次元の subbundle $\pi^{-1}(V_i) \in B$ の fibre $\pi^{-1}(V_i)$ には $\pi^{-1}(V_i) \cong V_i$ である。記号を乱用してまた V_i と書く事にし、line bundle V_i/V_{i-1} の Chern 類 $\in \overline{X}_i \in H^2(B)$ とする。

命題 (cf. Kleiman [10])

i) cohomology 環 $H^*(B)$ は $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_m$ で生成される。

ii) 多項式環 $\mathbb{C}[Y] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]$ から $H^*(B)$ への準同型

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_m] \xrightarrow{\pi} H^*(B) \quad (\pi(X_i) = \overline{X}_i)$$

の kernel は ideal $\pi^{-1}(0) = (X_1, \dots, X_m)$ の基本対称式 $f_1, \dots, f_m$ により生成される。

従って同型

$$\mathbb{C}[Y \cap N] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_m] / (f_1, \dots, f_m) \xrightarrow{\pi} H^*(B)$$

が得られた。

5.2 Springer 表現

B には次の様に W の Weyl 群 $W = S_m$ の右からの作用が定義できる。 $(V_i) \in B$ であるとする。ある $g \in GL_m(\mathbb{C})$ に対して

$V_i = \bigoplus_{j=1}^i \mathbb{C} g e_j$ とかける。 $w \in W = S_m$ に対して

$$(V_i) \cdot w = (V_i') \quad \text{即ち} \quad V_i' = \bigoplus_{j=1}^i \mathbb{C} g(e_{w^{-1}(j)})$$

よって W は $H^*(B)$ における作用がある。 π を同型写像

$$\mathbb{C}[Y \cap N] \xrightarrow{\pi} H^*(B)$$

と見れば、

いま m の分割 μ に対して Type μ の nilpotent element $X_0 \in$

固定して、 B の部分多様体 B_m を

$$B_m = \{ (V_i) \in B \mid X_0(V_i) \subset V_{i-1} \ (i=1, 2, \dots, m) \}$$

により定義する。 $B \in \{\text{Borel 部分群}\}$ と同一視すると

$$B_m = \{ B' : \text{Borel 部分群} \mid B' \text{ の Lie 環が } X_0 \text{ を含む} \} \text{ と書ける。}$$

さて、Springer [20] [21] は B_m の cohomology 環 $H^+(B_m)$ にも奇妙な方法で W -加群の構造を定義して、

$\eta_0 = (1 \geq 1 \geq \dots)$ に対しては $B_{\eta_0} = B$ となり、Springer の与えた $H^+(B)$ の W -加群の構造は、はじめに与えた自然なものと一致する。(ただし一般の η に対しては、 $H^+(B_\eta)$ の W -加群の構造は B_m の何らかの W の作用から導かれるものとはならない。) 二つの Springer 表現について次の事が知られている。

命題 $B_m \subset B$ により導かれる環準同型を

$$H^+(B) \xrightarrow{S_\eta} H^+(B_m) \text{ とする。}$$

(i) S_η は W -加群としての準同型である。

(ii) S_η は全射である。

$$(iii) \ H^+(B_m) \cong \text{Ind}_{H_\eta}^{S_\eta} (1_{H_\eta}) \quad (W\text{-加群として})$$

(i) は Hotta-Springer [6] に証明されているが自明な事ではなない。

また (ii) も同じく [6] に証明があるが、 A_m 型以外の群については

対応する事実は一般には成立しない。(iii) は Macdonald の結果

(未発表) であるが、Hotta-Shimomura [5] に2種類の証明

が書かれている。

5.3 主定理

定理 1 及び命題 5.2 により $A_{\mathcal{N}} = \mathbb{C}[\mathcal{F} \cap \overline{O_{\mathcal{N}}}]$ と $H^*(B_{\mathcal{N}})$ は $\mathcal{W}$ -加群として同型であるが、この 5 の間に次の様な自然な同型写像がある事を主張するのが、次の定理 2 である。

定理 2 次の diagram に可換になる様な同型 $j_{\mathcal{N}}$ (環同型でかつ $\mathcal{W}$ -加群としての同型) は唯一である。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}[\mathcal{F} \cap N] & \xrightarrow{\pi} & H^*(B) \\
 \pi_{\mathcal{N}} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \rho_{\mathcal{N}} \\
 A_{\mathcal{N}} & \xrightarrow{j_{\mathcal{N}}} & H^*(B_{\mathcal{N}})
 \end{array}
 \quad \left(\begin{array}{l} \text{ただし } \pi_{\mathcal{N}} \text{ は自然な} \\ \text{全射準同型} \end{array} \right)$$

$\pi_{\mathcal{N}}$ 及び $\rho_{\mathcal{N}}$ は全射準同型であり $\dim A_{\mathcal{N}} = \dim H^*(B_{\mathcal{N}})$ なるので $\text{Ker } \pi_{\mathcal{N}}$ の生成系 (5.4 で与えられている) の $\rho_{\mathcal{N}} \circ \pi$ による像が $H^*(B_{\mathcal{N}})$ 中で消える事を示せば定理 2 は証明される。De Concini-Procesi の原論文では別の方法で $\text{Ker } \pi_{\mathcal{N}}$ の生成系を定義し、それをを用いて上記の事を示しているが、5.4 で与えた様な生成系を用いると以下の様により簡単に証明できる。

5.4 Grassman 多様体と Schubert 多様体

$1 \leq l \leq n$ に対し、 $V = \mathbb{C}^n$ の l 次元部分空間全体の $\subset \subset$ Grassman 多様体 $\Sigma \text{Gr}_l(V)$ と書く。 V の flag $(\cdots \subset X_{l-1}(V) \subset X_l(V) \subset V)$ を細分して、 V の complete flag

$(0 = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_m = V)$ をとて固定する。

$0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_l \leq m-l$ なる整数の列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ に対し、次のように $\subset$ を定義する $Gr_l(V)$ の subvariety Y_λ を λ に対応する Schubert 多様体としよう。

$$Y_\lambda = \{W \in Gr_l(V) \mid \dim(W \cap U_{\lambda_i + i}) \geq i \quad (\forall i=1, \dots, l)\}$$

命題 (i) $Y_\lambda \supset Y_\mu \iff \lambda_i \geq \mu_i \quad (\forall i=1, \dots, l)$

(C.5.102)

($\iff$ のとき $\lambda \geq \mu$ と書く事にする。)

(ii) $\overset{\circ}{Y}_\lambda = Y_\lambda - \bigcup_{\mu \neq \lambda} Y_\mu$ とおくと

$$Gr_l(V) = \bigsqcup_{\lambda} \overset{\circ}{Y}_\lambda \quad \text{であり、} \quad \text{これは } Gr_l(V) \text{ の cell 分割}$$

を与える。

命題 自然な projection $B \xrightarrow{p} Gr_l(V) \quad (p(CV_i) = U_i)$

$$\text{に } p(B_m) \subset Y_{\lambda_0}.$$

$$\text{ここで } \lambda_0 = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{u_m(l) \text{ 個}}, \underbrace{m-l, m-l, \dots, m-l}_{(l-u_m(l)) \text{ 個}})$$

(証明) B_m の定義式により、 $(V_i) \in B_m$ ならば $V_l \supset X_0^{m-l}(V)$ 。

$$\dim X_0^{m-l}(V) = \text{rank } X_0^{m-l} = u_m(l) \quad \text{だから } (V_i) \text{ の定義から}$$

$$X_0^{m-l}(V) = \bigcup_{u_m(l)} \quad \text{と表す。従って } i \leq u_m(l) \text{ のとき}$$

$$\dim(V_l \cap V_i) = \dim V_i = i. \quad \text{また } i > u_m(l) \text{ のとき}$$

$$\dim(V_l \cap V_{m-l+i}) \geq i. \quad \text{よって証明終わり。}$$

S.5 Grassman 多様体の cohomology 環

定義 $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_l$ なる自然数の列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ に対し

$$z \quad [\lambda_1, \dots, \lambda_l] = \begin{vmatrix} X_1^{\lambda_1} & X_2^{\lambda_1} & \dots & X_l^{\lambda_1} \\ X_1^{\lambda_1+1} & X_2^{\lambda_1+1} & \dots & X_l^{\lambda_1+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_1^{\lambda_l+l} & X_2^{\lambda_l+l} & \dots & X_l^{\lambda_l+l} \end{vmatrix} \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_l]$$

とき

$$S_\lambda(X_1, \dots, X_l) = \frac{[\lambda_1, \dots, \lambda_l]}{[0, \dots, 0]}$$

により定義される l 変数の対称多項式 $S_\lambda(X_1, \dots, X_l)$ を

Schur 関数と呼ぶ。

注意 l 変数 $X_1, \dots, X_l$ の j 次基本対称式を $h_{l,j}$ と書く。

$$(i.e. \quad (t-X_1) \cdots (t-X_l) = t^l - h_{l,1} t^{l-1} + h_{l,2} t^{l-2} - \dots + (-1)^l h_{l,l})$$

$$= a \text{ とき } h_{l,j} = S_{\underbrace{(0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{j \text{ 個}})}_{l \text{ 個}}}$$

命題 (cf. Kleiman [10])

(i) $B \xrightarrow{P} \text{Gr}_l(V)$ から引きおこされる準同型

$$H^*(\text{Gr}_l(V)) \xrightarrow{P^*} H^*(B) \quad \text{は単射であり、その像は最初}$$

の l 個の Chern 類 $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_l$ の対称多項式全体である。

(ところで以下 $H^*(\text{Gr}_l(V))$ は $H^*(B)$ の部分環とみなす。)

(ii) Schur 関数 $S_\lambda(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_l)$ が non-zero であるとは

l は $\lambda_l \leq m-l$ であることが必要十分である。

(iii) non-zero な Schur 関数 $S_\lambda(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_l)$ の全体は、

cell 分割 $\text{Gr}_e(V) = \coprod_{\lambda} \dot{Y}_{\lambda}$ からできる Homology 群

$H^*(B)$ の base の dual base に $\bar{x}_i$ とする。

$$\langle \dot{S}_{\lambda}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_0), \dot{Y}_{\mu} \rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

5.6 定理2の証明

定理1の証明からわかる様に、我々の示すべき事は次の事である。

主張 $1 \leq l \leq m$ に対して $\dot{P}_m(\dot{r}_{l,j}(\bar{x}_{c_1}, \dots, \bar{x}_{c_l})) = 0$ in $H^*(B_m)$

ただし $1 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_l \leq m$, $j \geq l - (U_m(l) - 1)$

$\dot{P}_m$ は W -加群として同型 $\bar{x}$ である (命題 5.2 (b))

$c_1=1, c_2=2, \dots, c_l=l$ としてよい。よって 5.5 の注意から

以下に次の事を示せばよい。

主張' $1 \leq l \leq m$ に対して $\dot{P}_m(\dot{S}_{(0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_j)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_0)) = 0$

ただし $j \geq l+1 - U_m(l)$

§ 5.5 から $P(B_m) \subset Y_{\lambda_0}$ である。次の可換図式が成立する。

$$\begin{array}{ccc} H^*(B) & \xleftarrow{P^+} & H^*(\text{Gr}_e(V)) \\ \dot{P}_m \downarrow & G & \downarrow \dot{c}^+ \\ H^*(B_m) & \xleftarrow{P^+} & H^*(Y_{\lambda_0}) \end{array}$$

$j \geq l+1 - U_m(l)$ のとき $\lambda_0 \neq (0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_j)$

従って $\dot{c}^+(\dot{S}_{(0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_j)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_0)) = 0$

ゆえに

$$\dot{P}_m(\dot{S}_{(0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_j)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_0)) = \dot{P}_m^+ \dot{c}^+(\dot{S}_{(0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_j)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_0)) = 0$$

よ、この定理2が示した。

文献表

- [1] Borho W., Kraft H. : Über Bahnen und deren
Deformationen bei linearen Aktionen reductiver Gruppen.
Comment. Math. Helvetici 54 (1979) 61-104
- [2] Brieskorn E. : Singular elements of semisimple
algebraic groups
Actes, Congrès intern. Math. (1970) Tome 2, 219-284
- [3] De Concini C., Procesi C. : Symmetric functions, conjugacy
classes and the flag variety
preprint (1980)
- [4] Gerstenhaber M. : On dominance and varieties of
commuting matrices
Ann. of Math. 13 (1961) 324-348
- [5] Hotta R., Shimomura N. : The fixed point subvarieties
of unipotent transformations on generalized flag varieties

and the Green functions.

Math. Ann. 241 (1979) 193-208

- [6] Hotta R., Springer T. A. : A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of unitary groups.

Inventures math. 41 (1977) 113-127

- [7] 岩堀長麿 : 对新群と一般線型群の表現論

岩波講座基礎数学 (1978)

- [8] 彌永昌吉, 杉本光夫 : 应用数学者のための代数学

岩波 (1960)

- [9] Kazhdan D., Lusztig G. : A Topological approach To Springer's representations.

Advances in Math. 38 (1980) 222-228

- [10] Kleiman S.L. : Rigorous foundations of Schubert's enumerative calculus.

Proc. of Symp. in Pure Math. Vol XXVIII (1976)

- [11] Kostant B. : Lie groups representations on polynomial rings.

Amer. J. Math. 85 (1963) 327-409

- [12] Kostant B., Rallis S. : Orbits and representations associated with symmetric spaces.

Amer. J. Math. 93 (1971) 753-809

[13] Kraft, H. : preprint

to appear in Proc. Torino Conference - Asterisque

[14] Kraft H., Procesi C. : Closures of conjugacy classes of matrices are normal.

Inventiones math. 53 (1979) 221-247

[15] 草場公邦 : 行列特論

悠華房 (1979)

[16] Lusztig G. : Green polynomials and singularities of unipotent classes. preprint (1980)

[17] Mumford D. : Geometric invariant theory

Springer-Verlag (1965)

[18] Slodowy P. : Simple singularities and simple algebraic groups

Springer Lecture Notes in Math 815 (1980)

[19] ——— : Four lectures on simple groups and singularities

Communications of the Mathematical Institute,

Rijksuniversiteit Utrecht Vol 11 (1980)

[20] Springer T.A. : Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups.

Inventiones Math. 36 (1976) 173-207

[21] — : A construction of representations of
Weyl groups.

Inventiones math. 44 (1978) 279-293

[22] Vinberg E.B. : The Weyl group of a graded
Lie algebras.

Math. USSR Izvestija 10 (1976) No. 3.