

Volume-preserving diffeomorphisms and mass flow toward ends

矢ヶ崎 達彦 (Tatsuhiko Yagasaki)

京都工芸繊維大学 工芸科学研究科
(Kyoto Institute of Technology)

論文 [10] において、筆者は、非コンパクト多様体上での体積形式に対する Moser の定理のパラメータ版、及び、S. R. Alpern と V. S. Prasad [1] の導入したエンド・チャージ準同型のセクションの存在についての結果を得た。この論説では、これらの結果の概要を解説する。

1. MOSER の定理の 非コンパクト多様体上 への拡張

M を向き付けられた 連結 n 次元 (可分距離化可能) C^∞ 多様体 とし、 ω を M 上の正の体積形式 とする。 $\mathcal{D}(M)$ で M の 微分同相写像全体 のなす群を表し、コンパクト-開位相を導入する。 $\mathcal{D}^+(M)$ は 向きを保つ M の 微分同相写像全体 の成す部分群、 $\mathcal{D}(M; \omega)$ は ω を保つ M の 微分同相写像全体 の成す部分群 をそれぞれ表す。まず、群 $\mathcal{D}^+(M)$ と $\mathcal{D}(M; \omega)$ の間の関係を考察する。

$\mathcal{V}^+(M)$ で M 上の正の体積形式全体の成す空間に コンパクト-開 C^∞ 位相 を入れたものを表す。 $m \in (0, \infty]$ に対して、 $\mathcal{V}^+(M, m) = \{\mu \in \mathcal{V}^+(M) \mid \mu(M) = m\}$ と置く。

群 $\mathcal{D}^+(M)$ は $\mathcal{V}^+(M, m)$ 上 $h \cdot \mu = h_* \mu (= (h^{-1})^* \mu)$ により連続に作用し、 $\omega \in \mathcal{V}^+(M, m)$ に対して、部分群 $\mathcal{D}(M; \omega)$ は、この作用における ω の固定部分群と一致する。

M がコンパクトのとき、体積形式に関する Moser の定理 [7] は、この作用が推移的であることを主張している。Moser の定理 の証明は 自然にパラメータ版に拡張され、これにより、この作用の軌道写像は連続なセクションを持つ事になる。

これらの結果の C^0 -版は、位相多様体上の good な Radon 測度に関して定式化され、von Neumann-Oxtoby-Ulam の定理 [8] 及び A. Fathi の結果 [4] として知られている。

Moser の定理 及び von Neumann-Oxtoby-Ulam の定理 の 非コンパクト多様体への拡張は、R. E. Greene - K. Shiohama [5] 及び R. Berlanga - D. B. A. Epstein [3] によって得られた。さらに、R. Berlanga は [2] において 非コンパクト多様体での von Neumann-Oxtoby-Ulam の定理の パラメータ版 を得た。この結果に触発されて、筆者は [10] において、非コンパクト多様体での Moser の定理の パラメータ版 を得た。定理を正確に述べるには、多様体 M のエンドに関する情報を取り込む必要がある (cf. [1, 2, 5])。

M のエンドの成す空間 E_M は 0 次元のコンパクト距離化可能な空間であり、 M のエンドコンパクト化 $\overline{M}$ は、このエンド空間 E_M を M に適当に付加して得られる。任意の $h \in \mathcal{D}(M)$ は、自然に $\overline{M}$ の 同相写像 $\bar{h}$ に拡張される。 $\mu \in \mathcal{V}^+(M)$ に対して、エンド

$e \in E_M$ が μ -有限 であるとは, $\overline{M}$ における e のある近傍 U があって, $\mu(U \cap M) < \infty$ となることである。 E_M^μ で μ -有限エンド全体の成す E_M の部分空間を表す。

さて, E_M の開集合 F に対して, $\mathcal{D}^+(M)$ の部分群

$$\mathcal{D}^+(M; F) = \{h \in \mathcal{D}^+(M) \mid \bar{h}(F) = F\}$$

を考える。さらに, $\mathcal{V}^+(M)$ の次の部分集合を考える。

$$\mathcal{V}^+(M; F)_{ew} = \{\mu \in \mathcal{V}^+(M) \mid E_M^\mu = F\}, \quad \mathcal{V}^+(M; m, F)_{ew} = \mathcal{V}^+(M; F) \cap \mathcal{V}^+(M; m),$$

R. Berlanga [2] に基づいて, これらの部分集合には, 次で定義される 有限エンド 弱 C^∞ -位相 ew を入れる。この位相は, 次の条件を満たす $\mathcal{V}^+(M; F)$ 上の最も弱い位相として定義される:

- (i) 恒等写像 $id: \mathcal{V}^+(M; F) \rightarrow \mathcal{V}^+(M; F)_w$ は連続,
- (ii) コンパクト台を持つ 任意の連続関数 $f: M \cup F \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 次の関数は連続:

$$\Phi_f: \mathcal{V}^+(M; F) \rightarrow \mathbb{R}: \Phi_f(\mu) = \int_M f \mu.$$

この位相は, F に於ける体積要素の振る舞いを制約するので, $C \in \mathcal{B}_c(M)$ かつ $E_C \subset F$ ならば, 関数

$$\Phi_C: \mathcal{V}^+(M; F)_{ew} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_C(\mu) = \mu(C)$$

は連続になる。

群 $\mathcal{D}^+(M; F)$ は $\mathcal{V}^+(M; m, F)_{ew}$ 上 $h \cdot \mu = h_* \mu$ によって連続に作用する。 $\omega \in \mathcal{V}^+(M; m, F)_{ew}$ に対して 部分群 $\mathcal{D}(M; \omega)$ が ω の固定部分群となることは, 以前と同様である。

R. E. Greene - K. Shiohama [5] では, この作用の推移性が示されている。我々の結果は, このパラメータ版であり, 最も一般的に次の形で述べられる。 $\mathcal{D}_\partial(M) = \{h \in \mathcal{D}(M) \mid h = id \text{ on } \partial M\}$ とし, $\mathcal{D}_\partial(M)_1$ は, $\mathcal{D}_\partial(M)$ の id_M の 弧状連結成分 を表す。

定理 1. P を任意の位相空間とし, $\mu, \nu: P \rightarrow \mathcal{V}^+(M; F)_{ew}$ は連続写像で $\mu_p(M) = \nu_p(M)$ ($p \in P$) を満たすとする。このとき, 連続写像 $h: P \rightarrow \mathcal{D}_\partial(M)_1$ が存在して, 各 $p \in P$ に対して 次が成り立つ:

- (1) $h_{p*} \mu_p = \nu_p$, (2) $\mu_p = \nu_p$ ならば $h_p = id_M$.

系 1. $\omega \in \mathcal{V}^+(M)$ とし, $m = \omega(M)$, $F = E_M^\omega$ と置く。

- (1) 軌道写像 $\pi_\omega: \mathcal{D}^+(M; F) \rightarrow \mathcal{V}^+(M; m, F)_{ew}$, $\pi_\omega(h) = h_* \omega$ は 連続なセクション $\sigma: \mathcal{V}^+(M; m, F)_{ew} \rightarrow \mathcal{D}_\partial(M)_1$ で $\sigma(\omega) = id_M$ となるものをもつ。
- (2) (i) $\mathcal{D}^+(M; F) \cong \mathcal{V}^+(M; m, F)_{ew} \times \mathcal{D}(M; \omega)$.
(ii) $\mathcal{D}(M; \omega)$ は $\mathcal{D}^+(M; F)$ の 強変形レトラクト になる。

2. エンド・チャージ 準同型 のセクションの存在について

次に、群 $\mathcal{D}(M; \omega)$ の内部構造に目を向けよう。引き続き、 M を 向き付け可能な 連結 非コンパクト n 次元 C^∞ 多様体 とし、 ω を M 上の 体積形式 とする。

S. R. Alpern and V. S. Prasad [1] は、「体積保存 微分同相写像 による エンドに向かう体積移動」を測る ため、エンド・チャージ 準同型

$$c^\omega : \mathcal{D}_{E_M}(M; \omega) \rightarrow \mathcal{S}(M; \omega)$$

を定義した。ここで、 $\mathcal{D}_{E_M}(M; \omega) = \{h \in \mathcal{D}(M; \omega) \mid \bar{h} = id \text{ on } E_M\}$ であり、 $\mathcal{S}(M; \omega)$ は、次で定義される M の エンド・チャージ の成す線形位相空間である。 E_M の 閉かつ開部分集合 全体の成す集合体を $\mathcal{Q}(E_M)$ で表す。 M の エンド・チャージ とは、 $\mathcal{Q}(E_M)$ 上の有限加法的な符号付き測度、すなわち、関数 $c : \mathcal{Q}(E_M) \rightarrow \mathbb{R}$ で 次の条件を満たすものである：

$$c(F \cup G) = c(F) + c(G) \text{ for } F, G \in \mathcal{Q}(E_M) \text{ with } F \cap G = \emptyset.$$

M の エンド・チャージ 全体 $\mathcal{S}(M)$ は、弱位相 により実線形位相空間 になる。この弱位相 (or 積位相) は、次の条件を満たす最も弱い位相である：各 $F \in \mathcal{Q}(E_M)$ に対して、関数

$$\mathcal{S}(M) \rightarrow \mathbb{R} : c \mapsto c(F)$$

は連続。 $\mathcal{S}(M; \omega)$ は、次で定義される $\mathcal{S}(M)$ の部分線形位相空間である：

$$\mathcal{S}(M; \omega) = \{c \in \mathcal{S}(M) \mid (i) c(E_M) = 0, (ii) c(F) = 0 \text{ } (F \in \mathcal{Q}(E_M), F \subset E_M^\omega)\}.$$

各 $h \in \mathcal{D}_{E_M}(M; \omega)$ に対して、エンド・チャージ $c_h^\omega \in \mathcal{S}(M; \omega)$ は 次式で定義される： $F \in \mathcal{Q}(E_M)$ に対して、 M の閉集合 C で $\text{Fr}_M C$ がコンパクトかつ C のエンド E_C が F と一致するものが存在する。

$$c_h^\omega(F) = \omega(C - h(C)) - \omega(h(C) - C),$$

と定義すると、この値は、 C の選び方に依らず、 F のみで定まる。この量は、 h によって C の内部へ、最終的に F に流れ込む (符号付きの) 体積の総量を表している。

エンド・チャージ 準同型 は、もちろん、測度保存同相群に対しても定義される。筆者は、[9] において、測度保存同相群 上の エンド・チャージ 準同型 が 連続なセクション を持つことを示している。次の定理は、その C^∞ 版である。

定理 2. P を 任意の位相空間 とし、 $\mu : P \rightarrow \mathcal{V}^+(M)$ と $a : P \rightarrow \mathcal{S}(M)$ は連続写像で、各 $p \in P$ に対して、 $a_p \in \mathcal{S}(M; \mu_p)$ が成り立つとする。このとき、連続写像 $h : P \rightarrow \mathcal{D}_\partial(M)_1$ が存在して、各 $p \in P$ に対して 次が成り立つ：

$$(1) h_p \in \mathcal{D}_\partial(M; \mu_p)_1, \quad (2) c_{h_p}^{\mu_p} = a_p, \quad (3) a_p = 0 \text{ ならば } h_p = id_M.$$

系 2. $\omega \in \mathcal{V}^+(M)$ とする。

- (1) エンド・チャージ 準同型 $c^\omega : \mathcal{D}_{E_M}(M; \omega) \rightarrow \mathcal{S}(M; \omega)$ は、連続なセクション $s : \mathcal{S}(M; \omega) \rightarrow \mathcal{D}_\partial(M; \omega)_1$ で $s(0) = id_M$ となるものを持つ。
- (2) (i) $\mathcal{D}_{E_M}(M; \omega) \cong \ker c^\omega \times \mathcal{S}(M; \omega)$.
(ii) $\ker c^\omega$ は $\mathcal{D}_{E_M}(M; \omega)$ の 強変形レトラクト になる。

群 $\ker c^\omega$ は、部分群として $\mathcal{D}^c(M; \omega) = \{h \in \mathcal{D}(M; \omega) \mid h \text{ は コンパクト台を持つ}\}$ を含んでいる。

問題 1. 群 $\ker c^\omega$ と 部分群 $\mathcal{D}^c(M; \omega)$ の間の位相的な関係を明らかにせよ。

筆者は [11] において, $n = 2$ の場合を考察している。

3. コンパクト多様体に対する MOSER の定理

定理 3 の証明の最終ステップでは, M がコンパクト多様体に分割された状況で, 各コンパクトブロックに対して Moser の定理が用いられる。 M が境界を持つとき, このコンパクトブロックは余次元 2 のコーナー $[0, \infty)^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ を持つことになる。そこで, ここでは, 次の形の Moser の定理 を 補題 1 と共に適応する。

M を 向き付けられた n 次元 C^∞ 多様体 とし, 余次元 2 のコーナーを持っても良いとする。カラー $E = S \times [a, b]$ に関して次の記号を用いる: $A \subset S$ 及び 関数 $\delta, \varepsilon : S \rightarrow [a, b]$ に対して

$$E_A = \{(x, t) \in E \mid x \in A\}$$

$$E_A^+ = \{(x, t) \in E_A \mid t \geq 0\}, \quad E_A^- = \{(x, t) \in E_A \mid t \leq 0\}$$

$$E_A[\delta, \varepsilon] = \{(x, t) \in E_A \mid t \in [\delta(x), \varepsilon(x)]\}.$$

定理 3. M は 向き付けられた コンパクト連結 n 次元 C^∞ 多様体で, コーナーを持っても良いとする。 $E = \partial M \times [0, 1]$ を ∂M のカラー近傍とする。さらに, $\mu, \nu : P \rightarrow \mathcal{V}^+(M)$ 及び $\varepsilon : P \rightarrow (0, 1/2)$ は連続写像で 各 $p \in P$ に対して次の条件を満たすとする:

$$(i) \mu_p(M) = \nu_p(M) \quad \text{and} \quad (ii) \mu_p = \nu_p \text{ on } E[0, 2\varepsilon_p].$$

このとき, 連続写像 $\varphi : P \rightarrow \mathcal{D}_\partial(M)_1$ が存在して, 各 $p \in P$ に対して次が成り立つ:

$$(1) \varphi_{p*} \mu_p = \nu_p, \quad (2) \varphi_p = id_M \text{ on } E[0, \varepsilon_p], \quad (3) \mu_p = \nu_p \text{ ならば } \varphi_p = id_M.$$

次の補題は [6, Lemma A2] の パラメータ版であり, 定理 4 を適応する前に, 前もって定理 4 の条件 (ii) を達成するために用いられる。

補題 1. M を 向き付けられた n 次元 C^∞ 多様体とし, 境界を持っても良いとする。

(1) (S, E) は 次のいずれかとする:

- (a) S は M の $(n-1)$ 次元 proper 部分多様体 で, $E = S \times [-1, 1]$ は S の M における 両側カラー近傍

(b) $S = \partial M$, $E = \partial M \times [0, 1]$ (∂M の M における カラー近傍)

(2) K を S の閉部分集合, U を S における K の近傍とする。

このとき, 任意の連続写像 $\mu, \nu : P \rightarrow \mathcal{V}^+(M)$ に対して, 連続写像 $\varphi : P \rightarrow \mathcal{D}_{S \cup (M-E_U)}(M)_1$ と $\varepsilon : P \rightarrow C^\infty(S, (0, 1))$ が存在して, 各 $p \in P$ に対して 次が成り立つ:

- (i) $\varphi_{p*}\mu_p = \nu_p$ on $E_K[-\varepsilon_p, \varepsilon_p]$.
- (ii) 各 $x \in S$ に対して (a) $\varphi_p(E_x^\pm) = E_x^\pm$ and (b) $\mu_p = \nu_p$ on $E_x^\pm$ ならば $\varphi_p = id$ on $E_x^\pm$. 特に, $\mu_p = \nu_p$ on $E^\pm$ ならば $\varphi_p = id$ on $E^\pm$ となる。ただし, (1)(b) の場合に, (i) では $E_K[0, \varepsilon_p]$ に置き換え, (ii) では $\pm$ を省く。

4. イソトピー による 体積移動

この節では, 多様体上で与えられた体積移動データを 微分同相写像で実現するための基本補題を得る。

M を 向き付けられた 連結な n 次元 C^∞ 多様体とし, コーナーを持っても良いとする。 d を M の エンドコンパクト化 $\overline{M}$ 上の任意の距離関数とする。一般に, 位相空間 Y に対して, $\mathcal{K}(Y)$ は Y の コンパクト部分集合 全体の集合 を表し, $\mathcal{C}(Y)$ は Y の 連結成分全体の集合 を表す。

まず, M が 次の分割 $M = L \cup_S N$ を持つ場合を考える:

- (i) L と N は, M の連結な n 次元 C^∞ 部分多様体,
- (ii) $S = L \cap N = \text{Fr}_M L = \text{Fr}_M N$ で, S は M のコンパクトな $(n-1)$ 次元の proper C^∞ 部分多様体

補題 2. 連続写像 $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathcal{D}_0^s(M)_1^*$ で, 次の条件を満たすものが存在する:

- (1) $f_0 = id$, $f_s(L) \subsetneq f_t(L)$ ($s < t$),
- (2) M の (ある C^∞ 級 三角形分割 に関する) 部分多面体 F で, 次の条件を満たすものが存在する:
 - (i) $\dim F = n-1$ かつ $\partial M \subset F$,
 - (ii) 写像 f は, $M-F$ に 局所共通 コンパクト台を持つ (すなわち, 任意の $T > 0$ に対して ある $K \in \mathcal{K}(M-F)$ が存在して, $\text{supp } f_t \subset K$ ($t \in [-T, T]$)),
 - (iii) 任意の $K \in \mathcal{K}(M-F)$ に対して, ある $-\infty < s < t < \infty$ が存在して $K \subset f_t(L) - f_s(L)$,
- (3) $\{f_t\}_{-\infty < t < \infty}$ は $d|_M$ に関して 同等連続。

この補題のイソトピー f_t は, L, N を部分多面体として含む M の C^∞ 級 三角形分割 τ をとり, τ の 双対 1-骨格 の適当な 極大樹 T を選んで, この 樹 T に沿って $t \geq 0$ では L で $N-F$ の部分を, $t \leq 0$ では, N で $L-F$ の部分を 各々 engulfing することで得られる。

Engulfing isotopy $h_t = f_t^{-1}$ を用いて, M の体積移動イソトピー H が構成される。

$$\mathcal{W}^+(M) = \{(\mu, a) \in \mathcal{V}^+(M) \times \mathbb{R} \mid a \in (-\mu(L), \mu(N))\}$$

と置く。これは $\mathcal{V}^+(M) \times \mathbb{R}$ の開集合である。

補題 3. 連続写像 $H : \mathcal{W}^+(M) \rightarrow \mathcal{D}_\partial^\circ(M)_1^*$ で, 次の性質を持つものが存在する。

- (i) H は $\text{Int } M$ に 局所共通 コンパクト台 を持つ。
- (ii) $\{H_{(\mu,a)}^{-1}\}_{(\mu,a)}$ は, $d|_M$ に関して 同等連続。
- (iii) $J^\mu(H_{(\mu,a)}^{-1}(L), L) = a$. (iv) $H_{(\mu,a)} = id_M$ iff $a = 0$.

ただし, 量 J^μ は 次で定義される: $A, B \in \mathcal{B}(M)$, $\mu((A - B) \cup (B - A)) < \infty$ のとき

$$J^\mu(A, B) = \mu(A - B) - \mu(B - A) \in \mathbb{R}.$$

補題 3 は, 体積移動に関する 次の基本補題に拡張される: N を M の連結 n 次元 C^∞ 部分多様体 とし, $\text{Fr}_M N$ はコンパクトとする。 $N^c = cl(M - N)$ と置き, $\mathcal{C}(N^c) = \{A_1, \dots, A_m\}$ とする。

補題 4. $\mu : P \rightarrow \mathcal{V}^+(M)$ は連続写像, $a(i) : P \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, m$) は 連続関数で, 次の条件を満たすとする。

$$(a) \sum_{i=0}^m a(i) = 0 \quad \text{and} \quad (b) a(0) > -\mu(N), a(i) > -\mu(A_i) \quad (i = 1, \dots, m).$$

このとき, 連続写像 $\varphi : P \rightarrow \mathcal{D}_\partial^\circ(M)_1^*$ で 次の条件を満たすものが存在する:

- (1) (i) φ は $\text{Int } M$ に 局所共通 コンパクト台 を持つ。
- (ii) 族 $\{\varphi_p^{-1}\}_p$ は $d|_M$ に関して 同等連続。
- (2) (i) $J^\mu(\varphi^{-1}(N), N) = a(0)$ and (ii) $J^\mu(\varphi^{-1}(A_i), A_i) = a(i)$ ($i = 1, \dots, m$),
- (3) $p \in P$ かつ $a_p(i) = 0$ ($i \in \{1, \dots, m\}$) ならば $\varphi_p = id_M$.

この基本補題は, 定理 1, 2 の証明において, エンドに向かう体積移動データを逐次実現していくために用いられる。

5. エンドに向かう体積移動データ と その微分同相写像による実現

この節を通して, M を 向き付けられた 連結 非コンパクト な n 次元 C^∞ 多様体とし, 境界を持っても良いとする。 $\overline{M}$ 上の 任意の距離関数 d を固定する。

$\mu, \nu : P \rightarrow \mathcal{V}^+(M)$ を与えられた連続写像とする。 $C^0(P)$ は 連続関数 $\alpha : P \rightarrow \mathbb{R}$ 全体の集合を表し, $\mathcal{D}$ は 連続写像 $f : P \rightarrow \mathcal{D}_\partial(M)_1$ 全体の族を表す。

$\mathcal{F}(M)$ を M の n 次元 連結 C^∞ 部分多様体 N で $\text{Fr}_M N$ がコンパクトであるようなものの全体の族とし, $\mathcal{F}_c(M) = \{N \in \mathcal{F}(M) \mid N : \text{compact}\}$ と置く。

さらに, 族 $\mathcal{N}(M)$ と $\mathcal{N}^{(2)}(M)$ を 次で定める。

- $\mathcal{N}(M)$: M のコンパクト連結 n 次元 C^∞ 部分多様体 N で 各 $C \in \mathcal{C}(N^c)$ は 非コンパクト となるものの全体

$$\circ \mathcal{N}^{(2)}(M) = \left\{ (K, L) \in \mathcal{N}(M)^2 \mid \begin{array}{l} \text{(i)} \quad K \subset \text{Int}_M L \\ \text{(ii)} \quad \text{各 } A \in \mathcal{C}(K^c) \text{ に対して } L \cap A \text{ は 連結} \end{array} \right\}.$$

5.1. エンドに向かう体積移動データ.

まず, 定理 1, 2 を証明する際に現れる エンドに向かう体積移動データ の性質を抽象化する.

定義 1. 次のような組 $(\mathcal{F}, a)$ を「エンドに向かう体積移動データ」と呼ぶことにする:

- $\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}(M)$ の 部分族
- $a : \mathcal{D}^2 \times \mathcal{F} \rightarrow C^0(P)$ は 写像

これらは, 次の条件を満たす:

- (*)₀ $\mathcal{F}_c(M) \subset \mathcal{F}$ かつ $\mu(A) = \nu(A) = \infty$ ($A \in \mathcal{F}(M) - \mathcal{F}$).
- (*)₁ $a(f, g; C) \in (-\mu(f^{-1}(C)), \nu(g^{-1}(C)))$ ($f, g \in \mathcal{D}, C \in \mathcal{F}$).
- (*)₂ $a(f_2, g; C) = a(f_1, g; C) + J^\mu(f_1^{-1}(C), f_2^{-1}(C))$
 $a(f, g_2; C) = a(f, g_1; C) - J^\nu(g_1^{-1}(C), g_2^{-1}(C))$ ($f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in \mathcal{D}, C \in \mathcal{F}$).
- (*)₃ もし $(K, L) \in \mathcal{N}^{(2)}(M)$, $A \in \mathcal{C}(K^c)$ かつ $\mathcal{C}(A \cap L^c) \subset \mathcal{F}$ ならば,
 $A \in \mathcal{F}$ かつ $a(f, g; A \cap L) + \sum_{B \in \mathcal{C}(A \cap L^c)} a(f, g; B) = a(f, g; A)$ ($f, g \in \mathcal{D}$).
- (*)₄ $M \in \mathcal{F}$ のとき $a(\text{id}_M, \text{id}_M; M) = 0$.

例 1. 定理 1, 2 を証明する際に実現すべき「エンドに向かう体積移動データ」は, (定理 1, 2 の記号の下で) 次で与えられる.

定理 1: $(\mathcal{F}, \tilde{a})$:

- (i) $\mathcal{F} = \{C \in \mathcal{F}(M) \mid E_C \subset F\}$,
- (ii) $\tilde{a} : \mathcal{D}^2 \times \mathcal{F} \rightarrow C^0(P) : \tilde{a}(f, g; C) = \nu(g^{-1}(C)) - \mu(f^{-1}(C)) = (g_*\nu)(C) - (f_*\mu)(C)$.

定理 2: $(\mathcal{F}, \tilde{a})$

- (i) $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M)$,
- (ii) $\tilde{a} : \mathcal{D}^2 \times \mathcal{F} \rightarrow C^0(P) : \tilde{a}(f, g; C) = a(E_C) - J^\mu(f^{-1}(C), g^{-1}(C))$.

5.2. データの微分同相写像による実現.

補題 5. エンドに向かう体積移動データ $(\mathcal{F}, a)$ に対して, 次の条件を満たす 列 (K_k, L_k, f^k, g^k) ($k = 1, 2, \dots$) が存在する: (ただし, $L_0 = \emptyset, f^0 = g^0 \equiv \text{id}_M$ と置く.)

- (1)_k $K_k, L_k \in \mathcal{N}(M)$ and $(L_{k-1}, K_k), (K_k, L_k) \in \mathcal{N}^{(2)}(M)$.
- (2)_k (i) $f^k, g^k : P \rightarrow \mathcal{D}_\partial^c(M)_1^*$ は連続写像.
(ii) $f^k = \varphi^k f^{k-1}, g^k = \psi^k g^{k-1}$ と表される. ただし, $\varphi^k : P \rightarrow \mathcal{D}_{\partial \cup L_{k-1}}^c(M)_1^*$,
 $\psi^k : P \rightarrow \mathcal{D}_{\partial \cup K_k}^c(M)_1^*$ は ある連続写像.
- (3)_k (i) f^k, g^k は $\text{Int } M$ に 局所共通 コンパクト台 を持つ.

- (ii) $\{(f_p^k)^{-1}\}_p, \{(g_p^k)^{-1}\}_p$ は $d|_M$ に関して 同等連続.
- (4)_k (i) $\text{diam } A \leq 2^{-k}, \text{diam } (g^{k-1})^{-1}(A) \leq 2^{-k} \quad (A \in \mathcal{C}(K_k^c)).$
(ii) $\text{diam } B \leq 2^{-k}, \text{diam } (f^k)^{-1}(B) \leq 2^{-k} \quad (B \in \mathcal{C}(L_k^c)).$
- (5)_k (i) $a(f^k, g^{k-1}; C) = 0 \quad (C \in \mathcal{C}(cl(K_k - L_{k-1})) \cup (\mathcal{C}(K_k^c) \cap \mathcal{F}))$
(ii) $a(f^k, g^k; C) = 0 \quad (C \in \mathcal{C}(cl(L_k - K_k)) \cup (\mathcal{C}(L_k^c) \cap \mathcal{F}))$
- (6)_k $p \in P$ かつ $a_p(id_M, id_M; C) = 0 \quad (C \in \mathcal{F})$ ならば $f_p^k = g_p^k = id_M$.

補題 6. 補題 の列 $(f^k)_k, (g^k)_k$ は, それぞれ, $d|_M$ 一様にある連続写像 $f, g : P \rightarrow \mathcal{D}_\partial(M)_1$ に収束する. 写像 f, g は 次の条件を満たす:

- (1) $f^{-1}|_{L_k} = (f^k)^{-1}|_{L_k}, g^{-1}|_{K_k} = (g^{k-1})^{-1}|_{K_k} \quad (k \geq 1).$
(2) $a(f, g; C) = 0$ が, 次の条件を満たす 任意の $C \in \mathcal{F}$ に対して成り立つ:
ある $k \geq 1$ に対して, $C \in \mathcal{C}(K_k^c) \cup \mathcal{C}(L_k^c) \cup \mathcal{C}(cl(K_k - L_{k-1})) \cup \mathcal{C}(cl(L_k - K_k))$
(3) $p \in P$ かつ $a_p(id_M, id_M; C) = 0 \quad (C \in \mathcal{F})$ ならば, $f_p = g_p = id_M$.

5.3. 定理 1, 2 の証明.

例 1 において与えられた エンドに向かう体積移動データ $(\mathcal{F}, \tilde{a})$ に対して, 補題 により 列 $(K_k, L_k, f^k, g^k)_{k \geq 1}$ とその極限写像 $f, g : P \rightarrow \mathcal{D}_\partial(M)_1$ が得られる. 特に,

$$(f_*\mu)(C) = (g_*\nu)(C) \quad (C \in \mathcal{C}(cl(K_k - L_{k-1})) \cup \mathcal{C}(cl(L_k - K_k)), k \geq 1)$$

が成り立つので, 定理 3 + 補題 1 により, 連続写像 $\chi : P \rightarrow \mathcal{D}_\partial(M)_1$ で 次の条件を満たすものが得られる:

- (i) $\chi_*(f_*\mu) = g_*\nu$ and (ii) $p \in P$ で $(f_p)_*\mu_p = (g_p)_*\nu_p$ ならば $\chi_p = id_M$.

最後に, 望む写像 h は 次式で定義される:

$$h : P \rightarrow \mathcal{D}_\partial(M)_1, \quad h_p = g_p^{-1}\chi_p f_p \quad (p \in P)$$

REFERENCES

- [1] S. R. Alpern and V. S. Prasad, Typical dynamics of volume-preserving homeomorphisms, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, (2001).
- [2] R. Berlanga, Groups of measure-preserving homeomorphisms as deformation retracts, *J. London Math. Soc.* (2) 68 (2003) 241 - 254.
- [3] R. Berlanga and D. B. A. Epstein, Measures on sigma-compact manifolds and their equivalence under homeomorphism, *J. London Math. Soc.* (2) 27 (1983) 63 - 74.
- [4] A. Fathi, Structures of the group of homeomorphisms preserving a good measure on a compact manifold, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* (4) 13 (1980) 45 - 93.
- [5] R. E. Greene and K. Shiohama, Diffeomorphisms and volume-preserving embeddings of noncompact manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 255 (1979) 403 - 414.
- [6] D. McDuff, On groups of volume-preserving diffeomorphisms and foliations with transverse volume form, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 43 (1981) 295 - 320.
- [7] J. Moser, On the volume elements on a manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120 (1965) 286 - 294.

- [8] J. Oxtoby and S. Ulam, Measure preserving homeomorphisms and metrical transitivity, *Ann. of Math.*, 42 (1941) 874 - 920.
- [9] T. Yagasaki, Measure-preserving homeomorphisms of noncompact manifolds and mass flow toward ends, *Fund. Math.*, 197 (2007) 271 - 287.
- [10] T. Yagasaki, Groups of volume-preserving diffeomorphisms of noncompact manifolds and mass flow toward ends, to appear in *Trans. AMS* (math.GT/0805.3552)
- [11] T. Yagasaki, Homotopy types of diffeomorphism groups of noncompact 2-manifolds, preprint (math.GT/0109183v2 (revised in 20 Jan 2009))

Tatsuhiko Yagasaki

Division of Mathematics,
Department of Comprehensive Science,
Faculty of Engineering and Design,
Kyoto Institute of Technology,
Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto 606-8585, Japan
yagasaki@kit.ac.jp