

Hyperbolic Dehn Surgeries

筑波大 数学系 高橋 元男

§1. 基本群の表現を表わす代数曲線。

5_2 -knot  の補集合 M は、次の nice triangulation を持つ。

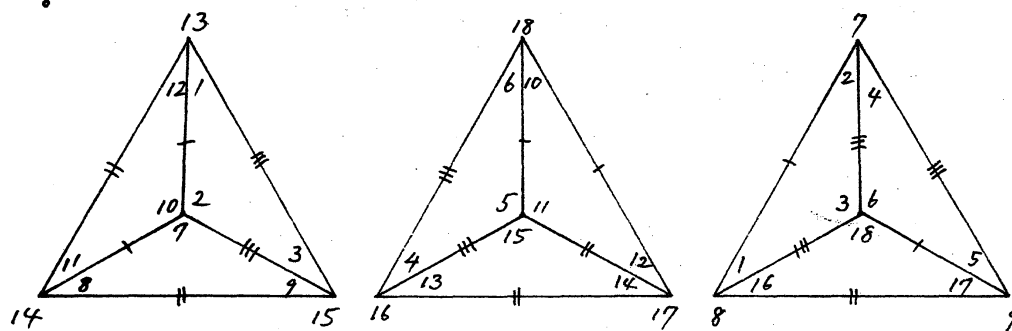


図 1.

即ち、これら三つの同じ大きさの正四面体の表面の正三角形を二つづつ、頂点の番号が一致する様に、貼り合せて、頂点を取り除いて得られる位相空間が M と同位相になる。

M に双曲的構造 (hyperbolic structure) を導入する為、これらの四面体を、三次元非ユークリッド空間の射影モデル P の境界 (無限遠点全体) に頂点を持つ ^{理想}四面体と考える。

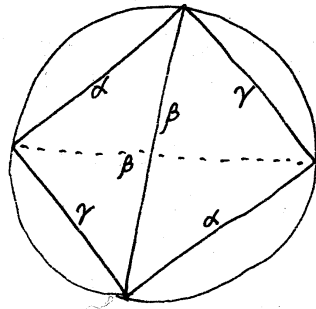


図 2.

この^{理想}四面体は、等長変換を除き、表面のなす二面角 α, β, γ ($\alpha + \beta + \gamma = \pi$) によって決定される。従って、それはユークリッド平面の三角形 (の相似型) によって決まる。

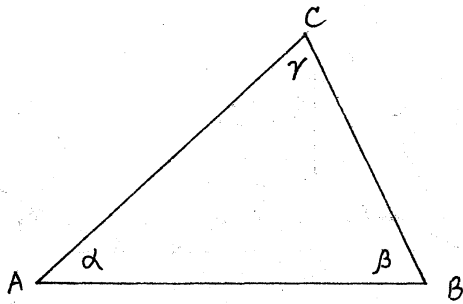


図 3.

ところが、三角形の相似型は複素数により表示出来る、即ち、複素平面 $\mathbb{C}$ において、 A を 0 、 B を 1 ととるとき、 C に相当する点の複素数 $\tilde{\alpha}$ によって三角形を表示するわけである。

同様に B を 0 、 C を 1 にもっていった時、 A の点を $\tilde{\beta}$ とする。

C を 0 、 A を 1 にもっていった時、 B の点を $\tilde{\gamma}$ とする。

これらはもちろん無関係ではなく、

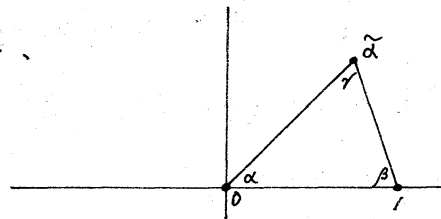


図 4.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\beta} &= \frac{1}{1-\tilde{\alpha}}, & \tilde{\gamma} &= \frac{1}{1-\tilde{\beta}}, & \tilde{\alpha} &= \frac{1}{1-\tilde{\gamma}} \\ \tilde{\alpha} &= 1 - \frac{1}{\tilde{\beta}}, & \tilde{\beta} &= 1 - \frac{1}{\tilde{\gamma}}, & \tilde{\gamma} &= 1 - \frac{1}{\tilde{\alpha}} \\ \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma} &= -1 \end{aligned} \right\} (0)$$

(このうち二つだけが独立である) が成り立つ。

さて、上記 5_2 -knot complement の nice triangulation を構成する三つの四面体を、次の様な二面角を持つ理想四面体と考える。

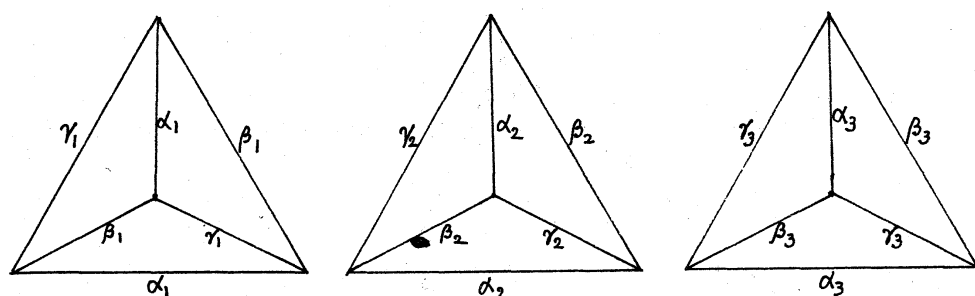


図 5.

(図 1 と対応しているものとする。)

Thurston の Lecture Note, Chap. 4 により、これらの貼り合せで hyperbolic structure が得られる為の条件は

$$(+)\quad \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1 \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_2 \tilde{\gamma}_3^2 = 1,$$

$$(\neq)\quad \tilde{\alpha}_1 \tilde{\gamma}_1 \tilde{\alpha}_2 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\alpha}_3 = 1,$$

$$(\neq)\quad \tilde{\beta}_1 \tilde{\gamma}_1 \tilde{\beta}_2 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\alpha}_3 \tilde{\beta}_3^2 = 1,$$

(図 1 参照)

である。(+)、(≠)、(≠) は 稜 +, ≠, ≠ にそれぞれ対応していることを示す。)

(†), (‡), (♯) は独立ではなく、三つを掛け合せると

trivial な式

$$\tilde{\alpha}_1^2 \tilde{\beta}_1^2 \tilde{\gamma}_1^2 \tilde{\alpha}_2^2 \tilde{\beta}_2^2 \tilde{\gamma}_2^2 \tilde{\alpha}_3^2 \tilde{\beta}_3^2 \tilde{\gamma}_3^2 = 1$$

になる。(∵ $\tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_i \tilde{\gamma}_i = -1$) また (†), (‡) は $\alpha_i \beta_i \gamma_i = -1$ を

用いると、それぞれ

$$\tilde{\gamma}_3^2 = \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \quad (1)$$

$$\tilde{\alpha}_3 = \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2 \quad (2)$$

と同値であるから (†), (‡), (♯) の代りに (1), (2) を用いてよ

い。今、 $\beta_1 = z$, $\beta_2 = w$, $\alpha_3 = \alpha$ とおくと (2) より

$$\alpha = zw \quad (3)$$

また (0)_i ((0) の関係式に添字 i をつけたもの) より

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{1}{1-\tilde{\beta}_1} = \frac{1}{1-z}, \quad \tilde{\gamma}_2 = \frac{1}{1-\tilde{\beta}_2} = \frac{1}{1-w}, \quad \tilde{\gamma}_3 = 1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{zw-1}{zw},$$

従って、(1) は

$$\frac{(zw-1)^2}{z^2 w^2} = \frac{1}{(1-z)(1-w)}$$

即ち

$$(zw-1)^2 (z-1)(w-1) = z^2 w^2 \quad (4)$$

~~この代数~~となる。(4) は代数曲線である。この代数曲線の種数を求めるため、この曲線を α -平面上の Riemann 面 $\mathcal{R}$ としてとらえると次の様になる。

即ち、(4) は

$$(\alpha-1)^2 (\alpha - (z+w) + 1) = \alpha^2$$

と書けるので

$$z+w = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha + 1}{(\alpha-1)^2}, \quad zw = \alpha$$

であるから、 z, w は t に関する二次方程式

$$t^2 - \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha + 1}{(\alpha-1)^2} t + \alpha = 0 \quad (5)$$

の2根となる。従って、 α は α -平面の二重分岐被覆面である。分岐点を求めるには(5)が重根を持つ条件、即ち判別式 $D=0$ という方程式を解けばよい。

$$D = \frac{\alpha^6 - 8\alpha^5 + 18\alpha^4 - 18\alpha^3 + 13\alpha^2 - 6\alpha + 1}{(\alpha-1)^4} = 0$$

即ち

$$\begin{aligned} & \alpha^6 - 8\alpha^5 + 18\alpha^4 - 18\alpha^3 + 13\alpha^2 - 6\alpha + 1 \\ &= (\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1)(\alpha^3 - 6\alpha^2 + 5\alpha - 1) = 0. \end{aligned}$$

(I) $\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ の根は

$$\xi_1 = 0.1225612 + 0.7448618i,$$

$$\xi_2 = 0.1225612 - 0.7448618i,$$

$$\xi_3 = 1.754878.$$

(もちろん、“約”である。)

(II) $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 5\alpha - 1 = 0$ の根は

$$\xi_4 = 0.3079785,$$

$$\xi_5 = 0.6831041,$$

$$\xi_6 = 5.048917.$$

従って、 R は α -複素球面上、6点で分岐する二重被覆面であるから、種数2である。

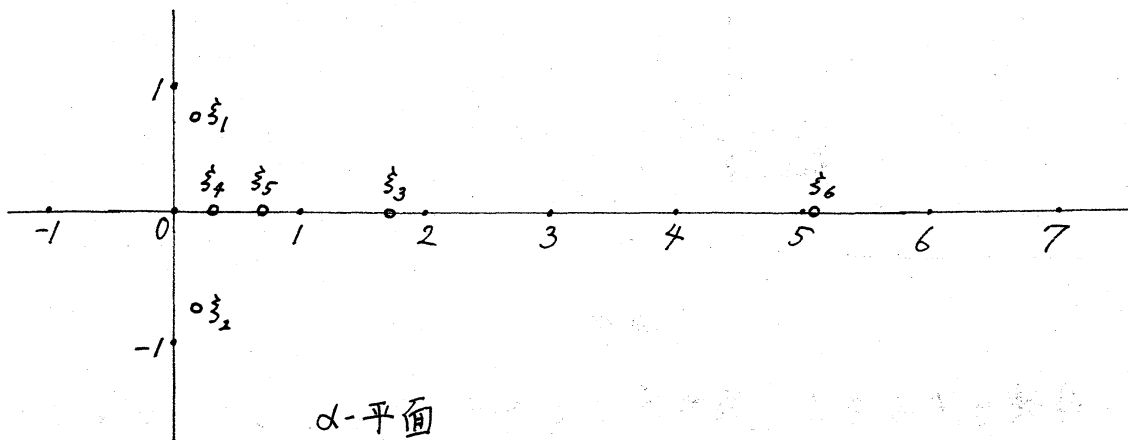


図6.

$\alpha = \xi_i$ の時、 M の完備双曲的構造が得られる。これがどこまで変形出来るかを調べるのが目的である。

§2. 表現の構成.

方程式 (0)_i ($i=1, 2, 3$), (1), (2) の解

$$\gamma = \{(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{\gamma}_1), (\tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma}_2), (\tilde{\alpha}_3, \tilde{\beta}_3, \tilde{\gamma}_3)\} \quad (6)$$

(但し $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i, \tilde{\gamma}_i \neq 0, 1, \infty$) は $\pi_1(M)$ の $PSL(2, \mathbb{C})$ への表現の一つの同値類を与える。これを説明しよう。

$u \neq 0, 1, \infty$ を一つの複素数とする。

(i) $\text{Im}(u) > 0$ ならば、 u は *positively oriented ideal tetrahedron* を決定するという。即ち、 $\mathbb{C}$ 上の上半空間で、図7の様な四面体を決定している。

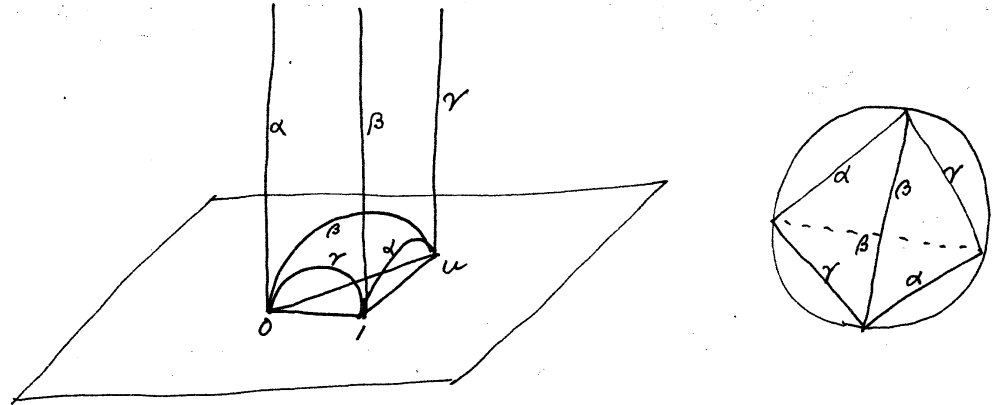


図7.

体積はもちろん、有限 > 0 である。これを $v(u)$ で表わす。

(ii) $\text{Im}(u) = 0$ 、即ち $u \in \mathbb{R}$ ならば、 u は *flattened ideal tetrahedron* を決定するという。即ち、 $\mathbb{C}$ 上の上半空間で、図8の様な、ぺしゃんこになった四面体を決定している。

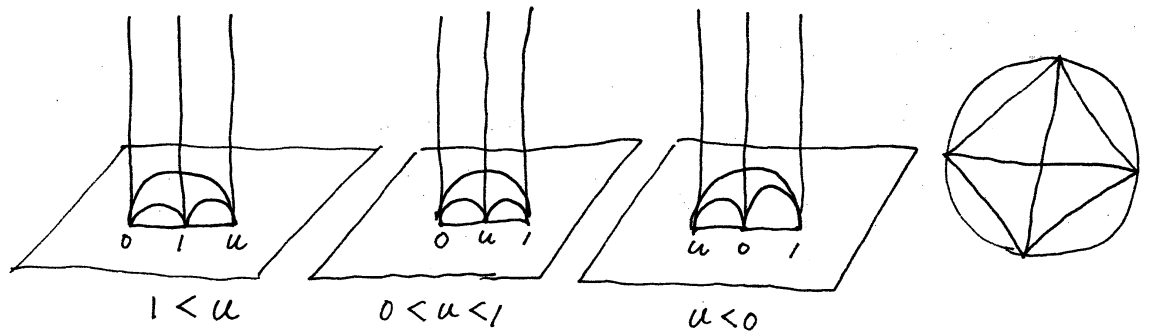


図8.

体積は 0 と考えられる。 $v(u) = 0$ とおく。

(iii) $\text{Im}(u) < 0$ の時、 u は negatively oriented ideal tetrahedron を決定するという。図 9 参照。

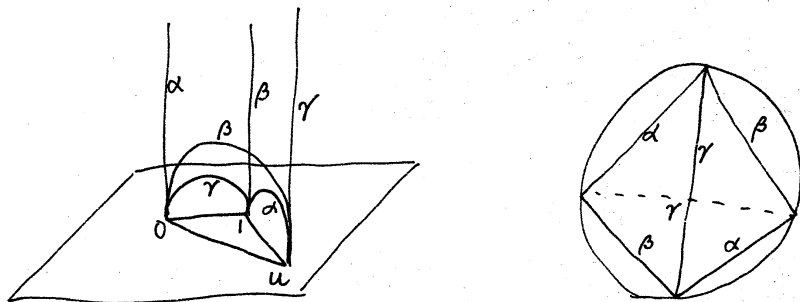


図 9.

この体積は有限であるが、符号を逆にして負であると考え
る。 $v(u) < 0$ 。

(i), (ii), (iii) 合せて non-degenerated tetrahedron と呼
ぶ。明らかに $v(u)$ は $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数である
が、これは $\mathbb{C}$ 全体から $\mathbb{R}$ への連続関数に、更に $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ から
 $\mathbb{R}$ への連続関数へと拡張される。(単に $u(0) = u(1) = u(\infty) = 0$
と置くことにより。) 更に $u = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ とするとき
 $f(x, y) = v(x + yi)$ は、二変数の実解析関数である。

~~≡~~ $\in_x$ 上記 M の nice triangulation で、面 (13, 14, 15) を
張り合せ、次に面 (16, 17, 18) も張り合せると、次の様な一つ
の多面体が出る。

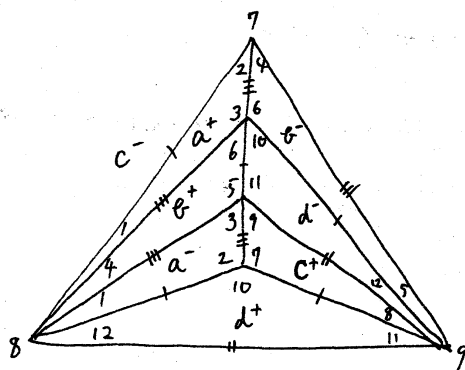


図 10.

この多面体で、面 a^+ と a^- 、 b^+ と b^- 、 c^+ と c^- 、 d^+ と d^- をそれぞれ指定された様に貼り合せ、然る後、頂点を取り除くと M と同位相な位相空間が出来る。(これを M と同一視する。)

M において、この多面体の中心 O を base point とし、面 a^- から a^+ を通って O に戻るループを a とする。同様に b, c, d が定義出来る。ループ a, b, c, d を含む $\pi_1(M)$ の元もまた、 a, b, c, d を乗らすことにすると、 $\pi_1(M)$ は a, b, c, d で生成され、各稜 $(\dagger, \ddagger, \S)$ のまわりの関係式

$$((\dagger)) \quad a c d^{-1} b^{-1} d = 1$$

$$((\ddagger)) \quad c d = 1$$

$$((\S)) \quad a^{-1} b^{-1} c a b = 1$$

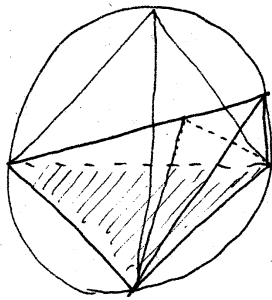
を持つ。即ち、

$$\pi_1(M) \cong \langle a, b, c, d \mid a c d^{-1} b^{-1} d = c d = a^{-1} b^{-1} c a b = 1 \rangle.$$

今、(0)_i, (1), (2) の解 (6) が与えられたとしよう。これによって nice triangulation の topological な四面体は、

geometricな non-degenerated tetrahedron とする。

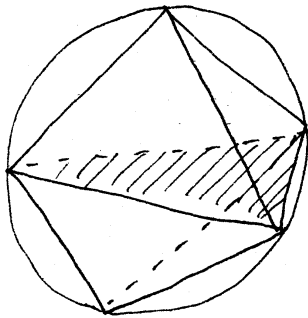
射影モデルで、これらの四面体を指定された様に isometric に貼り合わせる。(今の場合面 (13, 14, 15) と (16, 17, 18) のみ貼り合わせる。) 但し、positively oriented な四面体と negatively oriented な四面体^{の面}を貼り合わせる時は、両者が貼り合わせる面の同じ側に来る様に貼り合わせる。(図11参照)



(斜線の部分が貼り合せた面)

図 11.

posi. と posi 或いは nega. と nega. を貼り合わせる時は、ふつうの様に、両者が貼り合わせる面の、互いに反対側に来る様に貼り合わせる。(図12参照)



(斜線の部分が貼り合せた面)

図 12.

flattened ideal tetrahedron の場合の貼り合せ方は説明を要しないであろう。

これによって topological な多面体 (図10) の geometric な実現 P が得られる。但し、 P は入りくんでいたり、部分的につぶれていたりしているかも知れない。 P の各面は geometric (hyperbolic) な三角形になっている。例えば $\alpha^-(1, 2, 3)$ と $\alpha^+(1, 2, 3)$ も geometric ideal triangle になっている。この $\alpha^-(1, 2, 3)$ を $\alpha^+(1, 2, 3)$ に写す ~~isomet~~ H^3 (hyperbolic 3-space) の isometry A が唯一存在する。そこで上記の $\pi_1(M)$ の生成元 a に対し $A \in I^+(H^3) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ を対応させる。($I^+(H^3)$ は H^3 の orientation preserving isometry の全体のなす群。) 同様に $c^-(4, 5, 6)$ を $c^+(4, 5, 6)$ に写す isometry B を c に対応させ c, d についても同様に C, D を対応させる。この時、基本群の表示の基本関係式 $((+)), ((-)), ((\neq))$ に対応する関係式

$$(((+))) \quad A C D^{-1} B^{-1} D = I$$

$$(((\neq))) \quad C D = I$$

$$(((\neq))) \quad A^{-1} B^{-1} C A B = I$$

(I は 恒等写像)

が成立すれば $\pi_1(M) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ の準同型、即ち表現が得られた事になるが、この $((+)), ((-)), ((\neq))$ が成り立った

めの条件をじっと考えてみると、正に条件 (1), (2), (3) になり、解 r はこの条件を満たしているから、 r によって表現 $H_r: \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (up to ~~some~~ equivalence, これは最初にとる四面体の位置の定め方の任意性による) が得られる。

§3. M の Dehn surgeries.

§1 の nice triangulation の各四面体の頂点の正則近傍を取り除くと、次の様な、頂点のかけた四面体が出る。

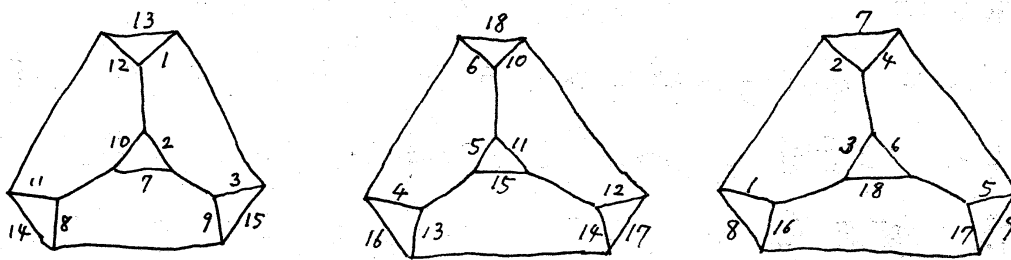


図 13.

これらを、§1 の様に貼り合せ、頂点のそばの小さな三角形をつなげて行くと、 5_2 -knot の exterior が出る。境界は torus T であり、今の場合、この torus は 12 個の三角形から成っている。

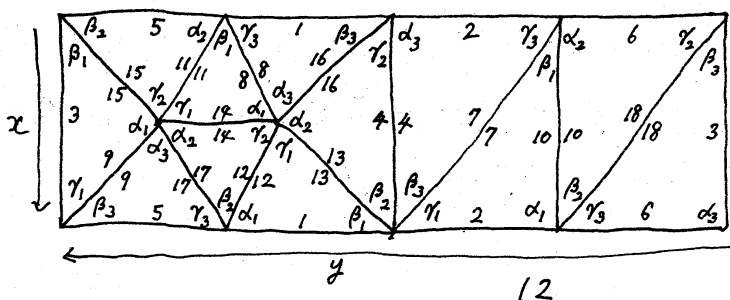


図 14.

$\pi_1(T) \hookrightarrow \pi_1(M)$ であるが、 $\pi_1(T)$ の生成元として図14の x, y をとると、 $\pi_1(M)$ の生成元 a, b, c, d との関係は

$$\begin{cases} x = b \\ y = d c^{-1} b d^{-1} c a \end{cases}$$

明らかに x が meridian m であり H_1 を計算して longitude l を定めると $l = x^{-2} y$.

$$\begin{cases} m = x = b \\ l = x^{-2} y = b^{-2} d c^{-1} b d^{-1} c a \end{cases}$$

~~故に~~ M に p/q -Dehn surgery して得られる多様体 $M_{p/q}$ の基本群は $\pi_1(M)$ に関係式 $m^p l^q = 1$ を加えて得られる。

以上は topological な話であるが、今 (付), (中), (非) の解 r によって四面体が geometric な四面体になるとすると上記の様に ~~表現~~ H_r が生まれる。 $\overset{l, m}{x, y}$ は $\pi_1(M)$ の元でもあるから $H_r(\overset{m}{x}), H_r(\overset{l}{y})$ が定まる。 $[H_r(m), H_r(l)] = 1$ であるから $H_r(m), H_r(l)$ は共通の無限遠点を fix する。その点を中心とする horosphere を E とする。 E はユークリッド平面と isometric である。 $H_r(m), H_r(l)$ は E を不変にし、 E 上の相似変換を引き起す。 E を複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視すると、 E 上の相似変換は $f(z) = u z + v, u, v \in \mathbb{C}$ という形である。この変換をも、 $H_r(m), H_r(l)$ で表わし、 u に相当するものを $H'_r(m), H'_r(l)$ で表わす。

今の場合図から

$$H'(m) = H'(x) = \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3^{-1} = \frac{zw}{(1-w)(zw-1)} = \frac{(1-z)(zw-1)}{zw}$$

$$H'_r(y) = \tilde{\beta}_1^{-1} \tilde{\beta}_2^3 \tilde{\alpha}_3^{-1} = \frac{w^2}{z^2}$$

$$H'(l) = \frac{(1-w)^2 w^2}{(1-z)^2 z^2}$$

上記の結果より次の定理を得る。

定理 1. $\pi_1(M)$ の表現 H_r が $\pi_1(M_{p/q})$ の表現 ^{を表わす} ~~である~~ ための条件は、 $H'_r(m)^p H'_r(l)^q = 1$ であることである。

§4. Hyperbolic Dehn surgery.

定理 1 の条件は

$$p \log H'(m) + q \log H'(l) = 2\pi\pi i \quad \text{の性質の解}$$

と書ける。§1 の終りに述べる complete な解 ^{の性質の解} において

$\log$ の枝を standard に取ると

$$p \log H'_r(m) + q \log H'_r(l) = 2\pi i$$

(即ち $\eta=1$) になっている。 ~~一般に $p, q \in \mathbb{R}$ として~~

$\log H'_r(m), \log H'_r(l)$ が $\mathbb{R}$ 上独立である限り

$$\exists! p, q \in \mathbb{R} \quad p \log H'_r(m) + q \log'_r(l) = 2\pi i.$$

$(p, q) \in \text{解 } r$ の hyperbolic Dehn surgery coefficient と呼ぶ。

complete hyperbolic structure を与える解系, が
変形して どこまで hyperbolic structure を与えるか.
は後述の考察を必要とするが 終結果は 図 6 の λ 平面
の x 軸の上方部分すべてに解析接続される.

この時 hyperbolic Dehn surgery coefficient は
図 15 の範囲を動く. (closed loop の外)

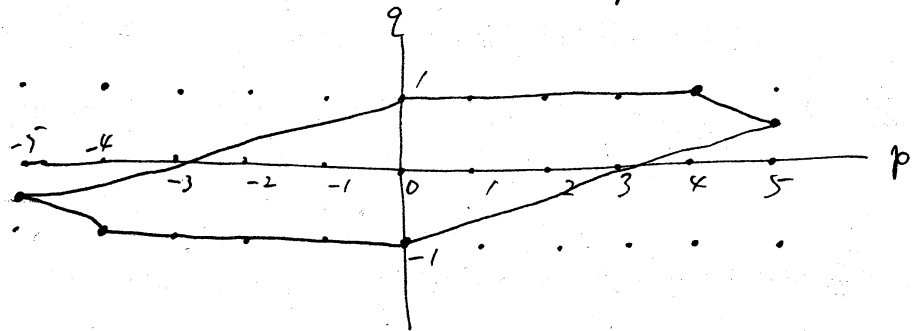


図 15

(complete)
(p, q) が互に素な整数 の時 $M_{p/q}$ の hyperbolic
structure を与える. 故に 次の定理を得る.

定理 2. S_2 -knot の Dehn surgery で得られる多様体
 $M_{p/q}$ は $p/q = 0, \infty, 1, 2, 3, 4$ を除いて ^(complete) hyperbolic
structure を許す.

一方 Heegaard splitting を考察することにより, 次の得る.

定理 3. $p/q = 0, 4, 10$ の時 $M_{p/q}$ は sufficiently large
しかも $p/q = 0, 4$ の時 incompressible torus をもつ.

$p/q = 1, 2, 3$ の時 $M_{p/q}$ は special Seifert fibered
space である. 従って定理 2 の例外の場合

hyperbolic structure は入らない。

なお $p/q=10$ の時 genus 2 の incompressible surface を持ち、この場合は sufficiently large にかつ hyperbolic である。