

結合写像系の新しい分岐解析手法と

進行波の発生機構

小室 元政
帝京科学大学

2007.6.6 非線形振動子系の物理学（京大基礎物理研）

概要：結合力学系の分岐解析手法として「安定周期領域の塗りつぶし法」を提案する。塗りつぶし法が、結合ロジスティック写像（CML）、結合 Henon 写像、結合 Rosler 系（周期境界条件、 $Dx=Dy=Dz=\epsilon$ ）に対して、有効に働くこと、安定周期領域の構造がよく似ていることを示した。CML の場合に、安定 2 周期領域の右・左の分岐曲線が、2 周期軌道の最大・最小ドメイン長と深く関係することを示した。CML の場合に、進行波アトラクタが、特定の型を持つ安定 4 周期領域の先端からサドルノード分岐を通して発生していることを示した。この領域の先端は、鎌状に凹んだ特長的な形状を持っている。結合 Henon 写像、結合 Rosler 系の場合にも、進行波アトラクタが、同様のメカニズムで発生していることを示唆した。（この報告では、結合 Henon 写像、結合 Rosler 系については触れない。）

§ 1 CML(Coupled Map Lattice)

ロジスティック写像を素子として、空間 1 次元・周期境界・隣接結合システムを考える。

$$x_{n+1}(i) = (1-\epsilon)f(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{2}\{f(x_n(i-1)) + f(x_n(i+1))\}$$

$$f(x) = 1 - ax^2, \quad 1 \leq i \leq N, 0 \equiv N, 1 \equiv N+1$$

§ 2 塗りつぶし法

塗りつぶし法は、パラメータ空間で、安定周期点領域を探索するアルゴリズムである。N 番目のラインの中央位置（パラメータ値と周期点の座標）を記憶し、これを初期値として、N+1 番目のラインを上下にスキャンして、境界を探す。安定周期点領域の境界では周期点の

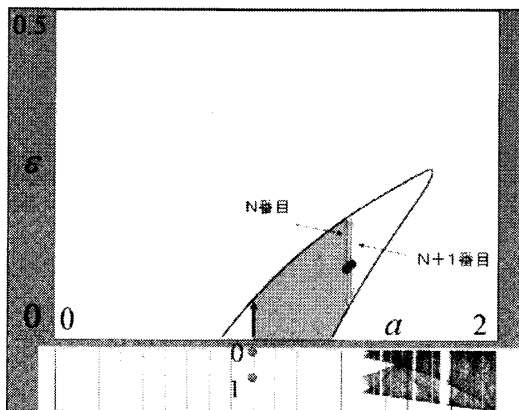


図 1

分岐が起きるので、境界の判定には、周期点の周期の変化

（周期倍分岐などの場合）、座標のジャンプ（サドルノード分岐、ニーマルクサッカ分岐などの場合）、固有値の不安定化、等の条件を使用する。安定周期点が 1 つあれば、それを初期値として塗りつぶし法で、領域を探索できる。特に、CML の場合、直積系（ $\epsilon=0$ ）における自明な安定周期点を探索の初期値にとることができる。また、直積系とは連結していない領域の探索には、ブルートフォースアタック法などで初期値を見つけることもできる。

ロジスティック写像は $a=0.8$ のとき、安定 2 周期点を持ち、その座標は $x_0=0.904508 \rightarrow x_1=0.345492$ である。この座標の組み合わせで、 $(a, \epsilon)=(0.8, 0.0)$ における直積系の安定 2 周期点が得られる。また、 $a=1.3$ のとき、安定 4 周期点を持ち、その座標は $y_0=0.999710 \rightarrow y_1=0.299245 \rightarrow y_2=0.883588 \rightarrow y_3=0.014946$

である。この座標の組み合わせで、 $(a, \epsilon)=(1.3, 0.0)$ における直積系の安定 4 周期点が得られる。

システムのずらし対称性や反転対象性を考慮して本質的に異なる初期値を選ぶ。例えば、3 次元 2 周期点の場合 (x_0, x_0, x_1) と (x_1, x_0, x_0) はずらし対称性によって同一の分岐構造を持つので安定領域も同一である。また、例えば、5 次元 4 周期点の場合 (y_0, y_1, y_2, y_3) と (y_3, y_2, y_1, y_0) は反転対称性によって同一の分岐構造を持つので安定領域も同一である。本質的に異なる初期値を次元毎にカウントすると表 2 のようになる。（この数には、 (x_0, x_0, x_0) のように、コヒーレント領域に対応する周期点も含まれる。）

	2per	4per
2dim	2	3
3dim	2	5
4dim	4	16
5dim	4	34
6dim	8	113
7dim	9	325
8dim	16	1131
9dim	23	3771
10dim	44	

表 2

図 2.1 は 5 CML における、1 つの安定 2 周期点の領域を示している。初期値は $(a, \epsilon)=(0.8, 0.0)$ における直積系の 2 周期点 $(x_0, x_0, x_1, x_1, x_1) =$

$(0.904508, 0.904508, 0.345492, 0.345492, 0.345492)$

である。このように直積系の 2 周期点を初期値にして塗りつぶした領域は、直積系の初期値によって決定されるので、次元、周期、 $(x_0, x_0, x_1, x_1, x_1)$ のインデックスを並べて、5d2p_00111 領域と呼ぶことにする。図 2.1 では周期点の固有値を調べ、絶対値が最大の固有値（最大固有値と呼ぶ）の絶対値のよって色をつけている。すなわち、最大固有値が正の場合は赤で、負の場合は青で、また実数でない複素共役の場合は緑で色を塗っている。絶対値の大きさを縞模様で表している。すなわち、絶対値が、 $[0.9, 0.8]$, $[0.7, 0.6]$, $[0.5, 0.4]$, $[0.3, 0.2]$, $[0.1, 0.0]$ の区間にある場合は暗い色で、 $[1.0, 0.9]$, $[0.8, 0.7]$, $[0.6, 0.5]$, $[0.4, 0.3]$, $[0.2, 0.1]$ の区間にある場合は明るい色で塗っている。領域の境界では、固有値の絶対値が 1 となり、左側の境界ではサドルノード分岐（以後、SN 分岐と呼ぶ）を起こし、

右側の境界では周期倍分岐（以後、PD 分岐と呼ぶ）を起こしていることがわかる。

図の内部にある四角は $\text{eps}=0.1$ で領域を切ったときの固有値の絶対値をあらわしている。赤、青、緑は固有値がそれぞれ、正、負、複素共役であることを示している。領域の着色に使用されるのは、これらのうち最大のものである。

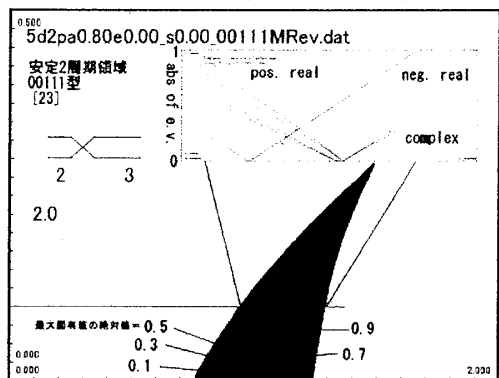


図 2.1

図 2.2 は 6d2p_001011 領域をあらわしている。領域の左側は SN 分岐、右側はナイマルク・サッカー分岐 (NS 分岐と呼ぶ) を起こしていることがわかる。図の内部にある四角は $\text{eps}=0.1$ で領域を切ったときの固有値の絶対値をあらわしている。

図 2.3 は 3d4p_001 領域をあらわしている。図の内部にある四角は $\text{eps}=0.05$ で領域を切ったときの固有値の絶対値をあらわしている。

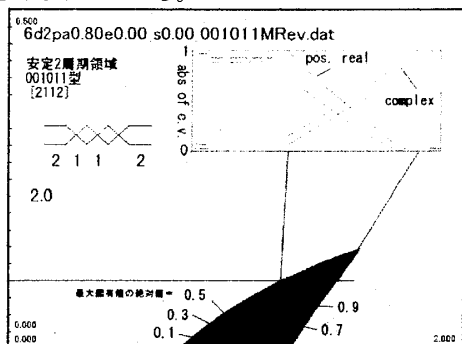


図 2.2

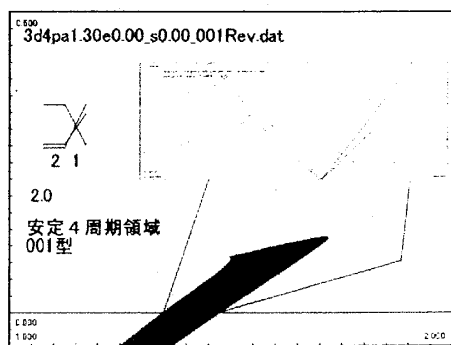


図 2.3

§ 3 領域の型と形状の関係

前述のように、直積力学系を延長して得られる領域は直積力学系における周期点の組み合わせで決定される。(2 周期領域は 01 の、4 周期領域は 0123 の組み合わせ) この組み合わせを領域の型という。型は数字の組み合わせを、

ずらし対称性、反転対称性などの対称性で割った同値類である。

この節では、領域の型と形状の関係について考察する。この節で用いる図は、横軸が a で $0.0 < a < 2.0$, 縦軸が eps で $0.0 < \text{eps} < 0.5$ である。

規則性 1 : パターン P の領域と、P を繰り返してできる型の領域は等しい。

図 3.1 は、2d2p_01, 4d2p_0101, 6d2p_010101, 8d2p_01010101 を並べたものである。

パターン 01 を繰り返し並べてできるこれらの領域の形状は一致している。固有値の個数は次元に一致するので、次元が異なれば、固有値の構造は当然異なる。図内部の四角は、 $\text{eps}=0.1$ における切り口の固有値をあらわしている。領域の左側の正の固有値の領域は一致しているが、領域の右側では、01 を奇数個並べた 2 次元、6 次元の場合は緑 (複素共役) であり、01 を偶数個並べた 4 次元、8 次元の場合は青 (負) である。(しかし、切り口での固有値を見ると、緑の線と青の線はほぼ重なっており、固有値の計算における誤差が現れている可能性もある。)

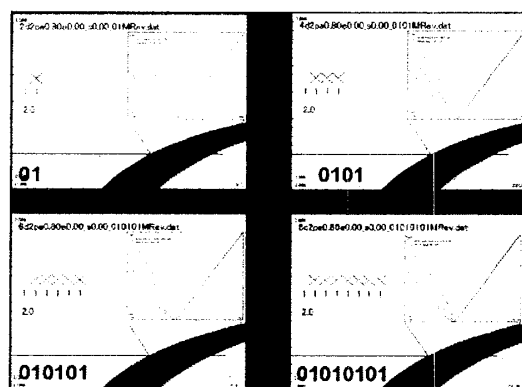


図 3.1

図 3.2 は、2d2p_011, 6d2p_011011, 9d2p_011011011 を並べたものである。パターン 011 を繰り返し並べてできるこれらの領域の形状も一致している。(2 周期の場合、パターンは 0 と 1 の組み合わせになるが、パターンの先頭には常に 0 を置くと定めておけば、0、1 の個数の列によってパターンを表現できる。例えば、011 は [12], 011011 は [1212] などとなる。図 3.2 ではこの表記も併用している。)

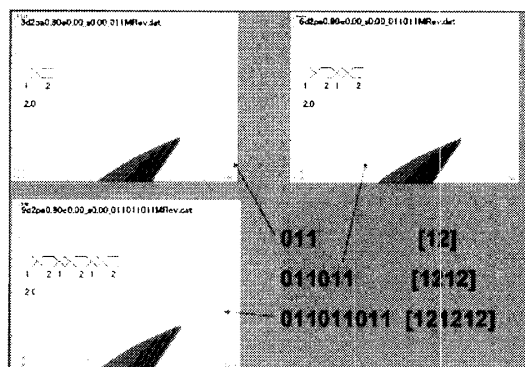


図 3.2

**規則性 2 : 2 周期領域は、CML の次元によらず、
右側分岐曲線は最大ドメインでほぼ決まり、
左側分岐曲線は最小ドメインでほぼ決まる。
どちらも、ドメイン長の増加とともに垂直に近づく。**

パターンにおいて 0 または 1 が続いている部分をドメインと呼ぶ。ドメインの中で、最大の長さのものを最大ドメイン、最小の長さのものを最小ドメインと呼ぶ。たとえば、パターン 000011100111 では最大ドメインは 0000 で最大ドメイン長 = 4、最小ドメインは 00 で最小ドメイン長 = 2 である。

図 3.3 の右下の図は、10 次元までの、最大ドメイン長が 2 のパターンの領域の境界をすべての重ねがきした図である。領域の右側境界である右側分岐曲線がほぼ重なっていることがわかる。周囲には例として、4 つの図：
3d2p_011, 7d2p_0101011, 9d2p_001101011, 4d2p_0011
を配している。

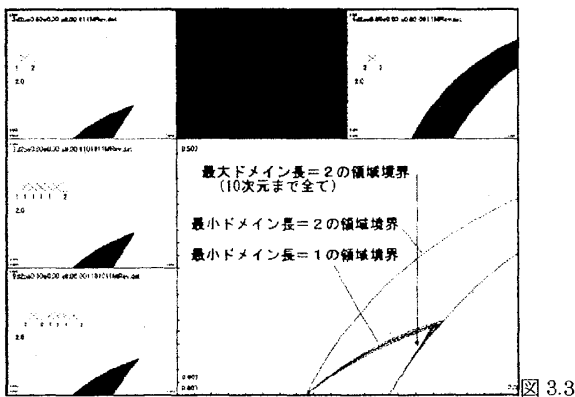


図 3.3

図 3.4 は、10 次元までの、最大ドメイン長が 3, 4, 5 のそれぞれのパターンの領域の境界をすべての重ねがきした図である。最大ドメイン長 = 4、最大ドメイン長 = 5 の図では、上部 (eps が 0.5 に近い) では、右側分岐曲線が離れていく傾向があるが、下部 (eps が 0.0 に近い) ではよく一致していることがわかる。最大ドメイン長の増加に伴い、右側分岐曲線は次第に垂直に近づいている。

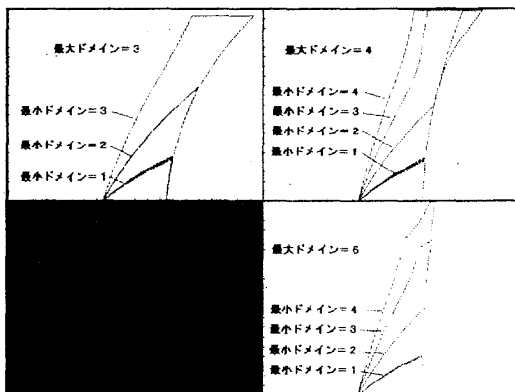


図 3.4

次に左側分岐曲線について見てみる。図 3.5.1 は 10 次元までの、最小ドメイン長が 1 のそれぞれのパターンの領域の境界をすべての重ねがきした図である。左側分岐曲線は、最大ドメイン = 1 の場合は、少し離れているが、最大

ドメイン = 2, 3 の場合は、よく一致している。図 3.5.2, 図 3.5.3 は 10 次元までの、最小ドメイン長が 2, 3 のそれぞれのパターンの領域の境界をすべての重ねがきした図である。左側分岐曲線は、ees=0.0 から離れるにしたがって、離れる傾向も見られるが、eps=0.0 の近くでは、よく一致している。最小ドメイン長の増加に伴い、左側分岐曲線も次第に垂直に近づいていることがわかる。

最大 (小) ドメイン長と、右 (左) 側分岐曲線の対応は完全ではないものの、パターンから領域の形状を推測する上では重要な示唆を与える。(右側分岐曲線では、PD 分岐や NS 分岐が生じることが多いが、これらは最大ドメインで発生しやすいことを示唆している可能性がある。)

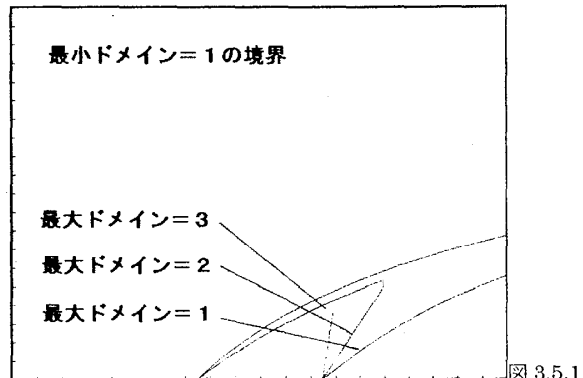


図 3.5.1

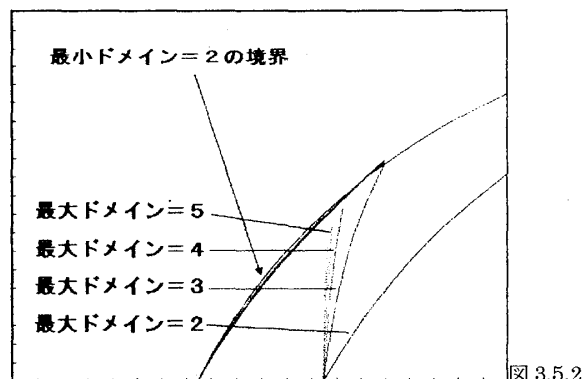


図 3.5.2

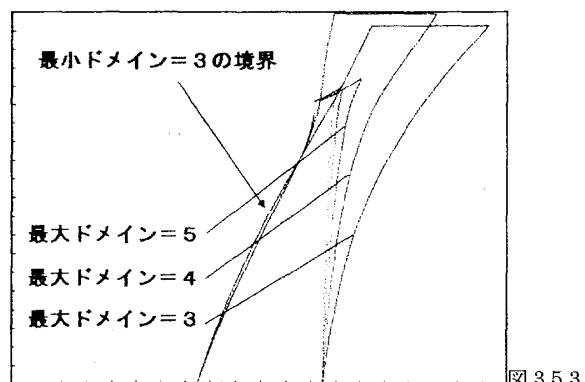


図 3.5.3

§ 4 領域境界の分岐と接続に関する注意

4 周期点が PD 分岐や SN 分岐から生じるとき、必ずしも

すべての要素が一斉に4周期になるとは限らず、2周期の要素と4周期の要素が混在することがある。

例えば、3 CML の点 $p=(x_1, x_2, x_3)$ において、座標 x_1, x_3 は4周期で振る舞い、 x_2 は2周期で振舞う場合、点 p はそれ自身としては4周期点である。このような安定周期点は、直積系の延長としては得られないが、直積系の延長として得られる領域に隣接するような形で存在することがある。図 4.2.1 はイメージ図である。

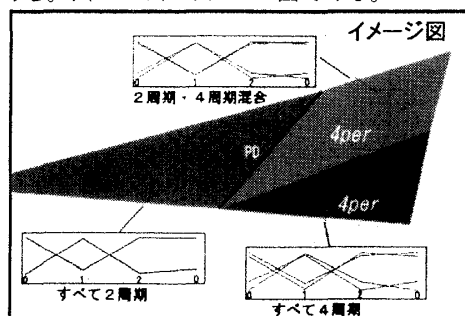


図 4.2.1

図 4.2.2 は 3 GML における分岐図である。図中の四角には $\epsilon=0.025$ の切り口の軌道の分岐を示している。上の四角は x_0 座標、下の四角は x_1 座標への射影である。4p_01'2 とかいたマゼンタ色の領域では x_0 は4周期だが、 x_1 は2周期であることがわかる。

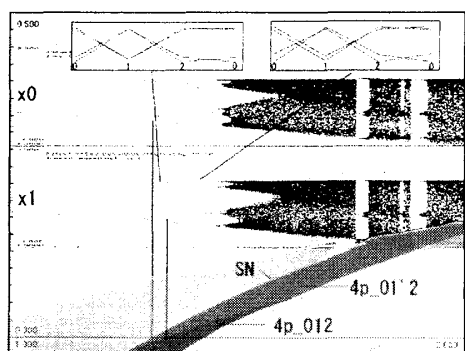


図 4.2.2

図 4.2.3 は、安定 2 周期領域 3d2p_001 の右分岐曲線で PD 分岐が起き、すべての座標点 x_0, x_1, x_2 が 4 周期に分岐して、安定 4 周期領域 3d4p_001 を隣接して生じている場合である。

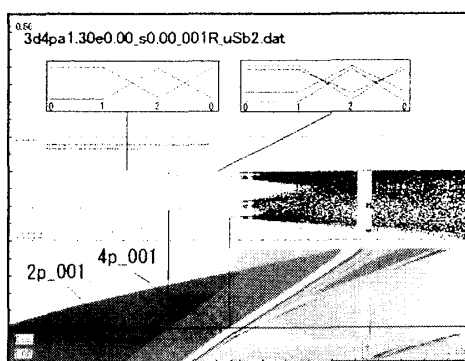


図 4.2.3

§ 5 進行波アトラクタの発生機構

1 2 次元の場合：

12d4p_000111222333 領域の先端は鎌のように凹んでおり、SN 分岐を生じている。この鎌状の凹みから進行波アトラクタ (traveling wave attractor) が発生している。また、千切れた細い領域が存在して、ここでも SN 分岐を経て、TW が発生している。さらに先には、TW の消滅ラインがある。このラインを越すと、TW は消滅し、他の領域にジャンプする。TW 領域の右側は崩壊ラインであり、このラインに近づくと、「ブククリ分岐」を起こし、やがて崩壊する。

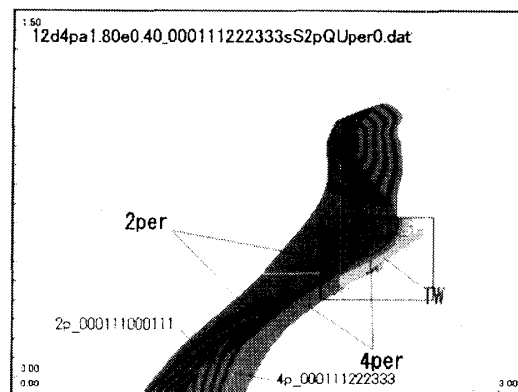


図 5.1a

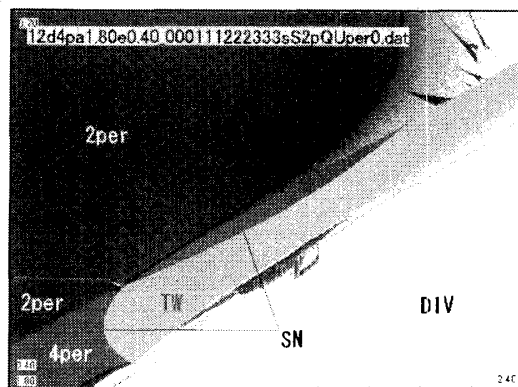


図 5.1b

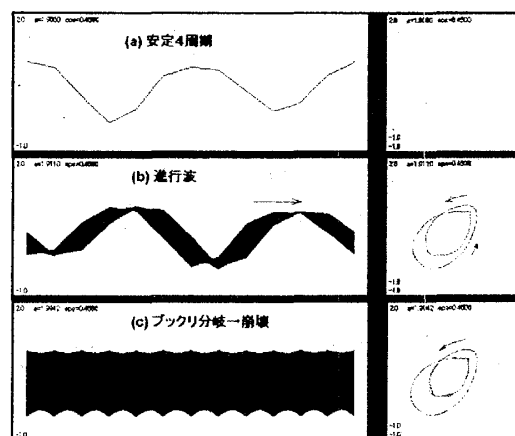


図 5.2

1 3 次元の場合：

1 2 次元の場合と同様の鎌状の凹みがあり、SN 分岐を生じて、進行波アトラクタ (TW) が発生している。(領域は複雑に重なり合っているため、特定が難しい。1 3 が

4の倍数でないことによるのか) NS分岐からTWを発生するルートがある。すなわち、NS分岐から小さな不変円(IC)が生じ、それらがサドル点と接触して大きな不変円となり、さらにそれらがサドル点と接触して、TWとなる。

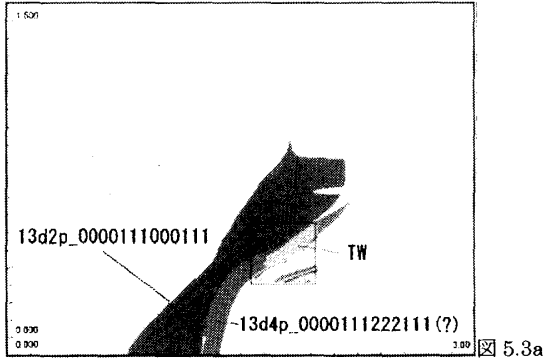


図 5.3a

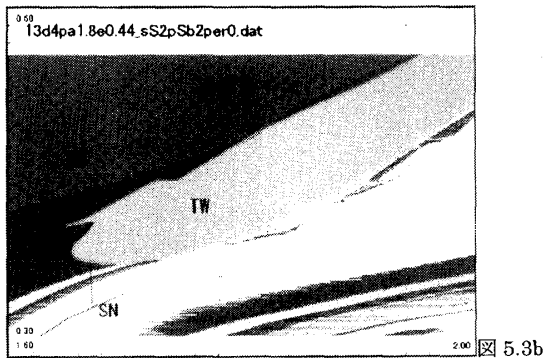


図 5.3b

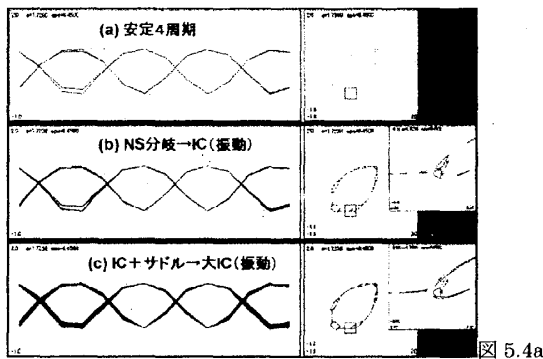


図 5.4a

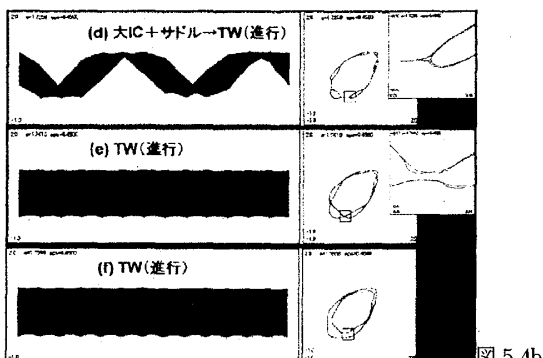


図 5.4b

TW 領域は9次元以下では、見つからない。(周期

点がまばらで隣とつながらないからか?) 10次元、11次元の TW 領域は発散域 ($a > 2.0$)に入っている。次元の増加とともに、左側に移動する。20次元では、2箇所に TW 領域が存在することになる。1つは10次元の TW 領域と同じ場所に (パターン繰り返しの規則により)、もう1つは20次元固有の位置に。このようにして、次元の高い場合には、TW 領域は複数存在し、重なり合うこととなる。これが、進行速度の異なる進行波が共存する理由となる。(SN分岐点から遠ざかると、進行速度は速くなる。)

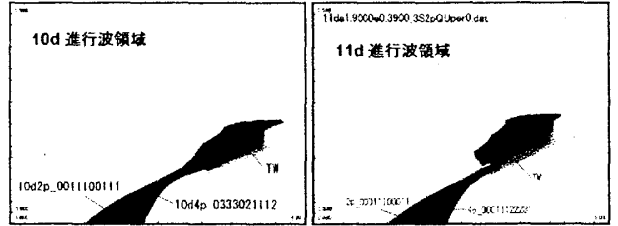


図 5.5a

図 5.5b

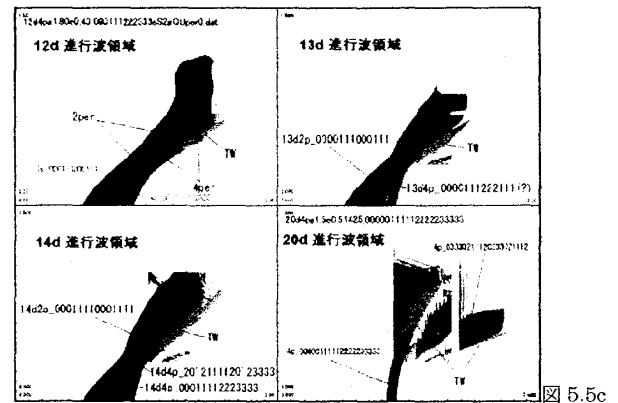


図 5.5c

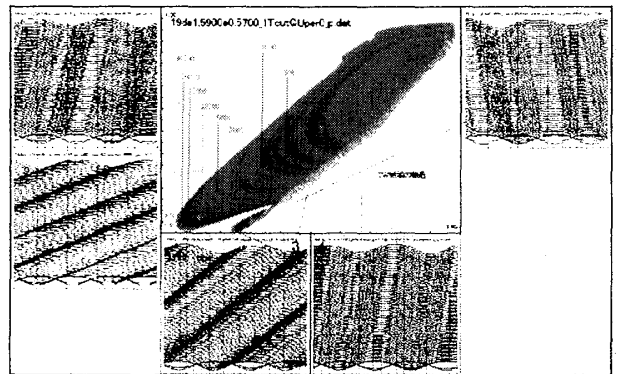


図 5.6

図 5.6 では、19次元の TW 領域を、右または左にシフトした状態に、40000 ステップ以内で回帰する非周期点のみを抽出し、回帰ステップ数で色分けをした。SN分岐点から遠ざかると、進行速度は速くなる様子がわかる。

参考: 12CML の TW のパラメータと座標データ

$a=2.400000$, $\epsilon=0.640000$,

$x_0=-0.106225$, $x_1=0.484643$, $x_2=0.839718$, $x_3=0.671213$,

$x_4=0.242561$, $x_5=-0.136623$, $x_6=0.029215$, $x_7=0.594073$,

$x_8=0.939138$, $x_9=0.708612$, $x_{10}=0.009925$, $x_{11}=-0.419414$