

Geodesic Flows On Homogeneous Spaces

京大 理 吉沢尚明

辰馬伸彦

§1 Geodesic flow & semisimple Lie group

1 Geodesic flow の定義

X を Riemannian metric をもった完備, 可符号, 連結の manifold とし, $x \in X$ における tangent space を $T^{(x)}$, $v(x) \in T^{(x)}$ で $|v(x)| = 1$ なるものの全体を $T_0^{(x)}$ とかく。

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ v \mid v = \begin{pmatrix} x \\ v(x) \end{pmatrix}, v(x) \in T_0^{(x)}, x \in X \right\}$$

とおく。 $v \in \mathcal{B}_0$ に, X の点 x から $v(x)$ の正方向への v なる geodesic $l(v)$ に沿って距離 s の点 $y(v, s)$ と, そこにおける $l(v)$ の長さ 1 の接ベクトル $\partial y(v, s)$ を考え $(y(v, s), \partial y(v, s))$ を対応させる:

$$\sqcup_s : B_0 \ni v = \begin{pmatrix} x \\ v(x) \end{pmatrix} \rightarrow \sqcup_s v = \begin{pmatrix} y(v, s) \\ \partial y(v, s) \end{pmatrix} \in B_0$$

$\sqcup_s$ は B_0 から B_0 の上への変換で $\mathcal{U} = \{\sqcup_s; -\infty < s < +\infty\}$ は B_0 上の 1-parameter の transformation group となる。

def. $\mathcal{U}$ を X 上の geodesic flow という。

μ_1 を X 上の metric による measure とする。

$T_0^{(x)} \sim S^{n-1}$ ($n = \dim X$) 故から $T_0^{(x)}$ には S^{n-1} 上の uniform measure μ_2 と同じ measure $\mu_2^{(x)}$ が入る。このとき

$$\mu = \mu_1 \times \mu_2^{(x)} \sim \mu_1 \times \mu_2$$

は $\sqcup_s$ 不変で $\mathcal{U}$ は measure space (B_0, μ) 上の metrical な flow となる。

2. Semi-simple Lie group の factor space.

G を non-compact, connected な semi-simple Lie group, K を G の maximal compact subgroup とする。 G, K の Lie algebra を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ とおく。
 $G/K = \{gK\}$ は Riemannian manifold で, $G/K \ni \tilde{g} = gK$ での tangent space を $T(\tilde{g})$ とすると

$$T(\tilde{g}) \cong \mathfrak{G}/\tilde{K} \cong \tilde{K}^{\perp \text{ put}} \cong \mathcal{N} \quad (\text{同型})$$

== ところで $\mathcal{N}$ は $\mathfrak{G}$ の Killing form による $\tilde{K}$ の直交補空間である。

homogeneous space G/K では次がなりたつ

(1). $\tilde{g} = gK \in G/K$ を通る geodesic $l(v)$ は

$$l(v) = \{y(v, s) = g \exp(s v) \cdot K \mid -\infty < s < +\infty\}_{v \in \mathcal{N}}$$

とあらわされ

$$\partial y(v, s) = g \exp(s v) \cdot v$$

(2). G/K 上の Riemannian metric による measure $\tilde{\mu}$ は G が semi-simple ならばよりその両側不変な Haar measure からみちみかれたものである。

Γ を G の discrete sub group とする。double coset space (Γ の fundamental domain)

$X = \Gamma \backslash G/K \ni x = \{\Gamma g K\}$ において $T(x) = \{\Gamma g v\}$ となる筈である。すなわち, $gK \in G/K$, $\gamma \in \Gamma$ とするとき, 対応

$$T(gK) \xleftrightarrow{\gamma} T(\gamma gK)$$

で接ベクトルを同一視する。 $\gamma gK = gK$ のとき $\gamma g v \neq g v$

ならば $\Gamma g v$ は X の tangent vector と考えられないので、 Γ の仮定 1) Γ は $T^{(x)}$ の vector の同一視を well-define するをおく。更に Γ の仮定 2) $\tilde{\mu}$ から induce した measure μ_1 で X は finite volume をもつ。

をおく。

Example $n-1$ 次元の定備な負の定曲率空間で finite volume をもつ X は Lobachevsky 空間がその universal covering space である。

$$I^{n-1} = \left\{ x = (x_1 \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \begin{aligned} [x, x] &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = -c^2, \\ x_n &> 0 \end{aligned} \right\},$$

(半径 $c > 0$ の pseudo sphere の上半部)

は metric

$$ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_{n-1}^2 - dx_n^2$$

で $n-1$ 次元の負の定曲率空間 - Lobachevsky 空間 -

になる。 $J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$ とし

$$g \in GL(n, \mathbb{R}), \quad : \quad {}^t g J g = J, \quad g_{nn} > 0, \quad \det g = 1$$

の全体は n 次元の proper Lorentz group G をつくる。

$G \ni g$ で x_n を不変にするものの全体

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; u \in SO(n-1) \right\} \sim SO(n-1)$$

は maximal compact subgroup で $\Lambda^{n-1} \sim G/K$ である。
従ってある Γ ; discrete subgroup があって

$$X \sim \Gamma \backslash G/K$$

となる。

§2 Geodesic flow の群論的取扱ひ。

1. 問題点

geodesic flow $U = \{U_s\}$ が $L^2_\mu(B_0)$ 上に U を与える unitary 表現 $\mathcal{D} = \{U_s, L^2_\mu(B_0)\}$ の既約分解で、

- 1). U の trivial な表現が唯一含まれる $\Leftrightarrow U$ ergodic
 - 2). $\mathcal{D} \oplus \mathbb{1}$ の既約分解の measure を multiplicity とおいてみる。 $\Leftrightarrow U$ の spectral type をみる。となる。 $\Leftrightarrow U$ の spectral type をみる。となる。 $\Leftrightarrow U$ の spectral type をみる。となる。
- なる以上で、flow U の ergodic 性, spectral type を群論的に取扱う。

U の orbitwise な B_0 の分解はこまかすぎるので、次のようにしてアライ分解を考える。

$$3). \quad B_0 \ni \begin{pmatrix} x \\ v\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma g_0 K \\ \Gamma g_0 v \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{U}_g} \begin{pmatrix} \Gamma g_0 g K \\ \Gamma g_0 g v \end{pmatrix} \in B_0, \quad v \in \mathcal{M}$$

なる B_0 の変換群 $\{\tilde{U}_g\}$ を考える。(1) より $g = \exp(sv) \in G$ のとき $\tilde{U}_g = L_s$ であるから

• $\{\tilde{U}_g\}$ orbit は geodesic flow $\{U_s\}$ の orbits からなるアライモのである。

• $\{\tilde{U}_g\}$ orbit は K が compact なことより, B_0 で closed 従って B_0 上の measure μ は各 $\{\tilde{U}_g\}$ orbit θ 上の G -invariant measure μ_θ で

$$\mu = \int_{S = \{\text{orbit space}\}} \mu_\theta d\nu(\theta)$$

$$(4) \quad L^2_\mu(B_0) = \int_S \oplus L^2_{\mu_\theta}(\theta) d\nu(\theta)$$

と分解される。(μ_θ は a.e $d\nu$ で G -invariant)

② K が $T_0^{(gK)}$ で transitive $\iff B_0$ はある単一の $\tilde{U}_g$ -orbit と一致。

(Labachevsky のときは $K \cong SO(n-1)$ より transitive.)

(4) より $L^2_{\mu_\theta}(\theta)$ で ergodicity, spectrum を考えればよい。

Orbit θ を固定し, G は θ に作用していると考ええる。

$$\tilde{\square}_g; \overset{\sigma}{\underset{\vee}{v}}_0 = \begin{pmatrix} \Gamma_{g_0} K \\ \Gamma_{g_0} v \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{\square}_g v_0 = \begin{pmatrix} \Gamma_{g_0} g K \\ \Gamma_{g_0} g v \end{pmatrix}, \quad v \in \mathcal{N}$$

$$\therefore \tilde{\square}_g v_0 = v_0 \iff [g \in K, \quad gv = v]$$

$$\therefore K_0 = \{k \in K; \quad kv = v\};$$

よって

$$\tilde{\square}_g v_0 = v_0 \iff g \in K_0$$

$\therefore$

$$\sigma \sim \Gamma \backslash G / K_0$$

よって μ' を G の Haar measure からきまる measure とすれば

$$L^2_{\mu}(\sigma) \sim L^2_{\mu'}(\Gamma \backslash G / K_0)$$

一方 $g = \exp(sv)$ ならば $\tilde{\square}_g = U_s$. よって $\mathcal{U}$ は double coset space である

$$U_s: \begin{pmatrix} \Gamma g_0 K_0 \\ \Gamma g_0 v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Gamma g_0 \exp(sv) K_0 \\ \Gamma g_0 \exp(sv) v \end{pmatrix}$$

だから

$$H = \{\exp(sv); \quad -\infty < s < +\infty\}$$

は ψ を $\psi|_H$ に制限した変換群となる。

以上によって H が $L^2_{\mu}(\Gamma \backslash G / K_0)$ 上にひきおこす表現の既約分解を求めることを考えればよい。そのために次のことに注意する

• $K \supset K_0$ は V の stability group で compact だから

$$(5) \quad L^2(\Gamma \backslash G / K_0) \subset L^2(\Gamma \backslash G)$$

とみてよい

$$\therefore f \in L^2(\Gamma \backslash G / K_0) \iff f(m) = f(m k_0), \quad \forall m \in \Gamma \backslash G, \\ \forall k_0 \in K_0.$$

$$\circ \mathcal{H} = L^2(\Gamma \backslash G), \quad \mathcal{H}_0 = L^2(\Gamma \backslash G / K_0) \quad \text{とおく。}$$

$\mathcal{H}$ 上への G の operation = $\mathcal{H}$ 上への G -right translation
 R_g, G の表現 $D = \{R_g, \mathcal{H}\}$:

$$\mathcal{H} \ni f(m) \longrightarrow R_g f(m) = f(mg),$$

を考えると (5) より

• $\mathcal{H}_0$ 上への H の operation = $R_g (g \in H)$ の $\mathcal{H}_0$ の制限となるから

問題: 表現 $D = \{R_g, \mathcal{H}\}$ で $g \in H, \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0$ とした
もの, すなわち H の $\mathcal{H}_0$ 上での表現

$$D(H, \mathcal{B}_0) \equiv D|_H|_{\mathcal{B}_0} = \{R_h, \mathcal{B}: (h \in H)\} |_{\mathcal{B}_0}.$$

の既約分解を求める。

について考えればよい。このとき § 2.1 の 1), 2) に対応して

1) $\mathcal{O}$ で ergodic $\Leftrightarrow D(H, \mathcal{B}_0)$ が唯一つの trivial $\mathbb{1}_H$ な表現をもつ

2) $\mathcal{O}$ での spectrum $\Leftrightarrow D(H, \mathcal{B}_0)$ の既約分解の spectrum なる対応を通してしるべることになる。

2. Example

§ 1. の Example の場合には

$G = \text{proper Lorentz group of dim } n = \text{Lor}(n)$

$$K = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} u & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) : u \in SO(n-1) \right\} \sim SO(n-1),$$

$\mathcal{B}_0$ は 1 つの $\widetilde{\Pi}_g$ -orbit と一致, $v = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & 0 \ 1 \\ & 1 \ 0 \end{array} \right)$ としよい。

$$K_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline 0 & 1 \ 0 \\ & 0 \ 1 \end{array} \right) ; x \in SO(n-1) \right\}$$

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} chs & shs \\ shs & chs \end{smallmatrix} \end{array} \right) : -\infty < s < +\infty \right\}$$

3. 注意 S.S. Lie algebra $\mathcal{G}$ の simple component $\sim$ の分解。

$$\mathcal{O}_j = \sum_i \oplus \mathcal{O}_{j_i}$$

↓

$$v = \sum_i v_i$$

において $\exists v_i = 0$ ならば v からきまる $\mathcal{B}_0$ 中の G -orbit は lower dimension となるから $\forall j: v_j \neq 0$ としよ。

§. 3. Gelfand - Fomin, Mautner, Hiai の方法.

1. §. 2. の reduction より §. 2. 1 の問題 1), 2) は

問題: G の表現 $D = \{R_g, \mathcal{H} = L^2(\Gamma \backslash G)\}$ の制限

$D(H, \mathcal{H}_0) = D|_H|_{\mathcal{H}_0}$ の H -既約分解を求める。

$$(\mathcal{H}_0 = L^2(\Gamma \backslash G / K_0))$$

の如く, 表現論の問題に帰着する。

① 目的の分解を

$$D(H, \mathcal{H}_0) \sim \int_{\Sigma} x_{\sigma} d\nu(\sigma), \quad x_{\sigma} = H \text{ の一次元の表現} \quad (1)$$

② D の既約分解を

$$D \sim \int_{\Omega} w_{\rho} d\tau(\rho) \quad (2)$$

とする。

$\mathcal{H}_\mathcal{P}$: $\mathcal{W}_\mathcal{P}$ の表現空間,

$$\Omega_0 = \{ \mathcal{W}_\mathcal{P} \in \Omega \mid K_0 - \text{invariant vector set} \}$$

$\mathcal{H}_\mathcal{P} =$ 表現 $\mathcal{W}_\mathcal{P}$ ($\in \Omega_0$) 中の K_0 -invariant vector の set

$$\text{i.e.,} \quad = \{ v \in \mathcal{H}_\mathcal{P} ; \mathcal{W}_\mathcal{P} \in \Omega_0, \bigwedge_{K_0} v = v \quad \forall K_0 \in K_0 \}$$

とすると

$$\mathcal{H} \sim \int_{\Omega} \mathcal{H}_\mathcal{P} d\tau(\mathcal{P}), \quad \mathcal{H}_0 \sim \int_{\Omega_0} \mathcal{H}_\mathcal{P}(\mathcal{P}) d\tau(\mathcal{P}).$$

$$\textcircled{3} \quad D|(H, \mathcal{H}_0) \sim D_0|(H, \mathcal{H}_0) \sim \int_{\Omega_0} \mathcal{W}_\mathcal{P}|(H, \mathcal{H}_0^{(\mathcal{P})}) d\tau(\mathcal{P}) \quad *)$$

$$\therefore \mathcal{W}_\mathcal{P}|(H, \mathcal{H}_0^{(\mathcal{P})}) \sim \int_{\Sigma'_\mathcal{P}} x_\sigma d\gamma'_\mathcal{P}(\sigma)$$

とすると

$$*) \quad \sim \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{\Sigma'_\mathcal{P}} x_\sigma d\gamma'_\mathcal{P}(\sigma) \right\} d\tau(\mathcal{P}) \quad (3)$$

$\therefore$ (1) より

$$\begin{cases} \Sigma \sim \Omega_0 \times (\Sigma'_\mathcal{P}) \\ \gamma \sim \tau \times (\gamma'_\mathcal{P}) \end{cases}$$

2 ergodic $\forall w_g \in \Omega_0$ について

$$\begin{cases} w_g|_H \sim \int_{\Sigma_g} \chi_\sigma dY_g(\sigma), \\ w_g|_{(H, \chi_0(g))} \sim \int_{\Sigma'_g} \chi_\sigma dY'_g(\sigma) \end{cases}$$

がわかっているものとする。

w_g の仮定 1)

$$w_g|_H \succ \exists \mathbb{1}_H \text{ (H-invariant vector がある)} \Leftrightarrow w_g = \mathbb{1}_G$$

がみたされるならば

$D(H, \chi_0)$ の H-invariant vectors の次元

= 分解 (3)より D での $\mathbb{1}_G$ の multiplicity

= 1

i.e. ergodic.

結果.

o (Mautner). $v = \sum_j v_j \quad \forall_j, v_j \neq 0 \Rightarrow w_g$ の仮定 1) がなりたつ。

従って これを含む $\mathcal{O}$ で ergodic

o Gelfand - Fomin (Lor (3), Lor (4)), Hirai (任意 $\dim(n)$) は
全ての k_0 -class 1 の表現をかぞえ上げて w_g の仮定 1) のなり

たつことを示した。

3. spectrum

$$(*) \begin{cases} H \text{ の 同 じ 表 現 } \varphi \sim \varphi_f \text{ の 連 続 和 } \int_{\Omega'} \varphi_f d\sigma(f) \text{ は} \\ [\dim L^2_{\alpha}(\Omega')] \varphi \text{ と 同 値} \end{cases}$$

w_f の仮定 2) $w_f(H, \mathcal{H}_0(f))$ は $w_f \neq \mathbb{I}_G$ に対して multiple Lebesgue をみたすならば (*) より 分解 (3) で

$$D(H, \mathcal{H}_0) \oplus \mathbb{1} \text{ は } [\dim L^2_{\alpha}(\Omega_0) + \alpha] - \text{Lebesgue}$$

◦ Gelfand-Fomin, Hirai は仮定 2) と $\dim L^2_{\alpha}(\Omega_0) = \infty$ を示し, 従って σ -Lebesgue を示した。

4. Examples

§ 2.2 の examples 2"

1. $n=3 \Rightarrow$

$$G = \text{Lor}(3) \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; u \in SO(2) \right\}$$

$$B = 0 \quad v = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$

$$K_0 = \{e\} \quad H = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1} & & \\ \hline & \text{chs} & \text{shs} \\ & \text{shs} & \text{chs} \end{array} \right) : -\infty < s < \infty \right\}$$

$\downarrow$

$$\therefore \mathcal{H} = \mathcal{H}_0$$

$\forall w_f$ は $\neq \mathbb{I}_G$ なる既約表現で

$w|_H$: simply Lebesgue (discrete series τ)

: doubly Lebesgue (cont. s)

$$\dim L^2(\Gamma \backslash G) = \infty$$

i.e. 仮定 1) 仮定 2) がなりたち. u は σ -Lebesgue.

2. $n = 4$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in SO(3) \right\}$$

$$B_0 = \theta, \quad v = \left(\begin{array}{c|c} 0_2 & 0 \\ \hline 0 & 0_1 \\ \hline & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow K_0 = \left\{ \begin{pmatrix} r & \\ & 1_1 \end{pmatrix} \right\} \sim SO(2), \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1_2 & \\ \hline chs & shs \\ shs & chs \end{pmatrix} \right\}$$

$\Omega = \Omega_0$ の $\forall w_p$ ($\neq \Gamma$ 既約) τ : $w|_{(H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R})}$
 is simply Lebesgue

$$\dim L^2(\Gamma \backslash G / K_0) \geq \dim L^2(\Gamma \backslash G / K) = \dim \{f: f(cgk) = f(g)\}$$

$\Gamma g K$ is closed τ $\dim(\Gamma g K) \leq \dim G$

$$\therefore \dim L^2(\Gamma \backslash G / K) = \infty$$

τ -仮定 1) 2) がなりたち.