

確率微分方程式の解の合流・非合流問題と解の逐次近似をめぐる話題

九州大工学部 山田俊雄 (Toshio Yamada)

(I) 解の合流・非合流について。

常微分方程式の場合と大きく事情が異なる。で、確率微分方程式（以下、SDE と略記する）においては、解の pathwise の一意性がなりたつことは解が非合流であることを保障しない。以下にその事情を示す定理と例をのべよう。

定理

(i) $\sigma(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を (t, x) について連続で

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq \rho(|x - y|), \quad x, y \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

を満たすとする。ここに ρ は $\rho(0) = 0$ で非負、

$u \in (0, \infty)$ で非減少

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{dy}{\rho^2(y)} dx = \int_0^1 \frac{y}{\rho^2(y)} dy = +\infty$$

を満たす関数である。

(ii) $b(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を (t, x) について連続で

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq \kappa(|x - y|), \quad x, y \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

をみたすとする。こゝに $K(u)$ は $[0, \infty)$ 上の関数で
 $K(0)=0$, 非減少 $\lim_{x \downarrow 0} \left[\sup_{x \leq y \leq 1} K(y) \int_y^1 \frac{du}{P^2(u)} \right] / \left[\int_x^1 \int_y^1 \frac{du}{P^2(u)} dy \right]$
 $= 0$ を満足している。

さて $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ を通常の (増大する σ -加法族 $\mathcal{F}_t$ をもつ) 確率空間としておこう。この空間上には

- (a) ξ, η を $\mathcal{F}_0$ -可測な確率変数
- (b) $x(t, \eta), x(t, \xi)$ を $\mathcal{F}_t$ -可測な確率過程,
- (c) B_t は $\mathcal{F}_t$ -Brown 運動で $B_0 \equiv 0$.

を与え、それらから

$$x(t, \xi) = \xi + \int_0^t \sigma(s, x(s, \xi)) dB_s + \int_0^t b(s, x(s, \xi)) ds$$

a.s. $(0 \leq t < \zeta_1)$

$$x(t, \eta) = \eta + \int_0^t \sigma(s, x(s, \eta)) dB_s + \int_0^t b(s, x(s, \eta)) ds$$

a.s. $(0 \leq t < \zeta_2)$ をみたしてゐると仮定する。

$$\zeta_1 = \sup \left\{ t; \sup_{s \in [0, t]} |x(s, \xi)| < +\infty \right\}$$

$$\zeta_2 = \sup \left\{ t; \sup_{s \in [0, t]} |x(s, \eta)| < +\infty \right\}.$$

このとき, もし $\xi(\omega) < \eta(\omega)$ a.s. ならば

$$P(x(t, \xi) < x(t, \eta), 0 \leq t < \zeta) = 1 \text{ が成り立つ。}$$

こゝに $\zeta = \zeta_1 \wedge \zeta_2$. $\blacktriangle$

(注意) (i), (ii) の条件をみたす P, K の例として,

$$(A) \quad P(u) = Ku, \quad K(u) = Ku, \quad (K \text{ は定数})$$

(B) $P(u) = Ku(\log \frac{1}{u})^{\frac{1}{2}}$, $K(u) = Ku(\log \frac{1}{u})$
等がある (A) は σ , 及び b が Lipschitz 条件を満たす
ことを意味している。 $\blacktriangle$

[定理の証明] いくつかの段階に分けて証明を与える

(1°) $1 < L < +\infty$ とし $\Omega_L = \{\omega : \frac{1}{L} \leq \eta(\omega) - \xi(\omega) \leq L\}$
とおく。 $\Omega_L \in \mathcal{F}_0$, $P(\Omega_L) \uparrow +\infty$ ($L \rightarrow \infty$) であることは
明らか。

$\tilde{G}_L = \sup \{t : \sup_{s \in [0, t]} |x(s, \xi)| < L, \sup_{s \in [0, t]} |x(s, \eta)| < L\}$ とおく, $\tilde{G}_L \uparrow \tau$ ($L \rightarrow \infty$).

$$\sigma_{\frac{1}{m}} = \inf \{0 < t < \tau : x(t, \eta) - x(t, \xi) \leq \frac{1}{m}\}$$

(=、で $\inf(\phi) = \tau$ とおく)

$$\tau = \inf \{0 < t < \tau : x(t, \eta) - x(t, \xi) = 0\}$$

(=、で $\inf(\phi) = \tau$) とおく。 $x(t, \eta) - x(t, \xi)$

が t によって連続で $x(0, \eta) - x(0, \xi) = \eta - \xi > 0$ である

ことはより $\sigma_{\frac{1}{m}} \uparrow \tau$ ($m \rightarrow \infty$) が $\{\tau < \tau\}$ である

ことを示す。

$$(2^\circ) \quad \phi(x) = \int_x^1 \int_y^1 \frac{du}{P^2(u)} dy \quad \text{とおく, } x \in (0, \infty)$$

$\phi(x)$ は C^2 -関数 $x \downarrow 0$ で $\phi(x) \uparrow +\infty$.

$$\tilde{x} = t \wedge \sigma_{\frac{1}{m}} \wedge \tilde{G}_L \quad \text{とおく. } 0 \leq t \leq \tilde{x} \text{ で}$$

$x(t, \eta) \neq x(t, \xi)$ であるから Itô 公式を用いると

$$\phi(x(\tilde{x}, \eta) - x(\tilde{x}, \xi)) = \phi(\eta - \xi) +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\tilde{x}} \phi'(x(s, \eta) - x(s, \xi)) \{ \sigma(s, x(s, \eta)) - \sigma(s, x(s, \xi)) \} dB_s \\
& + \int_0^{\tilde{x}} \phi'(x(s, \eta) - x(s, \xi)) \{ b(s, x(s, \eta)) - b(s, x(s, \xi)) \} ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{x}} \phi''(x(s, \eta) - x(s, \xi)) \{ \sigma(s, x(s, \eta)) - \sigma(s, x(s, \xi)) \}^2 ds \\
& = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad \text{とおく.}
\end{aligned}$$

$\phi(x)$ は $(0, 1]$ で単調減少, $[1, \infty)$ で単調増加であることに注意する. $L > 1$ としよう.

$$I_1 \text{ について } E[I_1, \Omega_L] \leq \phi\left(\frac{1}{L}\right) + \phi(L).$$

$$I_2 \text{ は Martingale であるから } E[I_2, \Omega_L] = 0.$$

I_3 について. $[1, \infty)$ で $|\phi'(x)| = \left| \int_x^1 \frac{du}{\rho^2(u)} \right|$ は単調増加であることに注意すると (ii) の条件によつて

$$E[|I_3|, \Omega_L] \leq E\left[\int_0^{\tilde{x}} |\phi'(x(s, \eta) - x(s, \xi))| K(x(s, \eta) - x(s, \xi)) ds, \Omega_L\right]$$

$$= t \left\{ \phi'(2L) K(2L) + \sup_{\frac{1}{m} \leq x \leq 1} |\phi'(x) K(x)| \right\}.$$

I_4 について $\phi''(x) = 1/\rho^2(x)$ に注意して

$$\begin{aligned}
E[I_4, \Omega_L] & \leq E\left[\int_0^{\tilde{x}} \phi''(x(s, \eta) - x(s, \xi)) \rho^2(x(s, \eta) - x(s, \xi)) ds, \Omega_L\right] \\
& \leq E\left[\int_0^{\tilde{x}} \rho^2(x(s, \eta) - x(s, \xi)) / \rho^2(x(s, \eta) - x(s, \xi)) ds\right] \leq t.
\end{aligned}$$

以上, $I_1 \sim I_4$ についての評価により, L と t のみに関係するある定数, $K(L, t) < +\infty$ が存在して

$$\begin{aligned}
E[\phi(x(\tilde{x}, \eta) - x(\tilde{x}, \xi))] & \leq K(L, t) \\
& + t \sup_{\frac{1}{m} \leq x \leq 1} |\phi'(x) K(x)| \quad \text{を得る.}
\end{aligned}$$

さて L を固定して $L \leq m$ とし $\sigma_m < t \wedge \tilde{\sigma}_L$ では

$$\phi(x(\tilde{x}, \tau) - x(\tilde{x}, \xi)) = \phi(\frac{1}{m}) \quad \text{に注意すると}$$

$$E[\phi(\frac{1}{m}) : \sigma_m < t \wedge \tilde{\sigma}_L, \Omega_L] \leq E[\phi(x(\tilde{x}, \tau) - x(\tilde{x}, \xi)) : \Omega_L]$$

$$\text{より } P(\sigma_m < t \wedge \tilde{\sigma}_L ; \Omega_L)$$

$$\leq \left\{ K(L, T) + t \sup_{\frac{1}{m} \leq x \leq 1} |\phi'(x) K(x)| \right\} / \phi(\frac{1}{m})$$

$$= \frac{K(L, T)}{\phi(\frac{1}{m})} + t \left\{ \sup_{\frac{1}{m} \leq x \leq 1} K(x) \int_x^1 \frac{du}{\rho^2(u)} / \int_{\frac{1}{m}}^1 \int_x^1 \frac{du}{\rho^2(u)} dx \right\}$$

∴ $m \uparrow \infty$ とすると (ii) に注意して

$$P(\tau < t \wedge \tilde{\sigma}_L : \Omega_L) = 0 \quad \text{を得る.}$$

これより $L \uparrow \infty$, つまり $t \uparrow +\infty$ として.

$$P(\tau < \xi) = 0 \quad \text{となるから}$$

$$P(x(t, \xi) < x(t, \tau) : 0 \leq t < \xi) = 1 \quad \text{が得ら}$$

れた. 証明終了 ▲

注 1. ρ についての $\int_x^1 \int_y^1 \frac{du}{\rho^2(u)} dy = +\infty$ の条件は
ある意味で最良の条件である.

$$\sigma(t, x) = \rho(x), \quad b(t, x) \equiv 0 \quad \text{としよう}$$

$\rho(0) = 0$, $(-\infty, 0)$ で単調非増加, $(0, \infty)$ で非減少.

$$\text{今 } \int_0^1 \frac{du}{\rho^2(u)} = \infty, \quad \int_{-1}^0 \frac{du}{\rho^2(u)} = +\infty \quad \text{を仮定すると}$$

$$dX_t = \rho(X_t) dB_t \quad \text{に対して Pathwise 一意性が成}$$

りたことはよく知られている.

$\therefore \xi \equiv 0, \quad \eta = a \quad (a > 0)$ としよう.

$$(*) \quad x(t, \xi) = \int_0^t P(x(s, \xi)) dB_s, \quad x(0, \xi) = \xi = 0.$$

$$(**) \quad x(t, \eta) = \int_0^t P(x(s, \eta)) dB_s, \quad x(0, \eta) = \eta = a > 0.$$

$x(t, \xi) \equiv 0$ $x(t, \eta)$ と比較しよう.

$$P \text{ に対して 更に } \int_x^1 \int_y^1 \frac{du}{P^2(u)} dy = +\infty$$

であれば $x(t, \xi) < x(t, \eta)$ がなりたつてゐる.

$$\text{よって } \int_x^1 \int_y^1 \frac{du}{P^2(u)} dy < +\infty \text{ であるとき}$$

$$x(t, x) = x + \int_0^t P(x(s, x)) dB_s, \quad x(0, x) = x$$

を diffusion と呼ぶとき (Generator は $\frac{1}{2} P^2(x) \frac{d^2}{dx^2}$)

$x=0$ は accessible であるので $x(t, a)$ は $x(t, 0)$ に合流する (i.e. $x(t, a) > 0$ が保障される).

このように 解について Pathwise の一意性は必ずしも解の非合流性を保障しない.

注 2 多次元の SDE については、係数に Lipschitz 条件を仮定すると、解の非合流性がなりたつことが分る、詳しくは文献 (1) を参照されたら.

[II] SDE の解の逐次近似について.

係数に Lipschitz 条件が仮定されてゐるとき、逐次近似

法は、解の存在、及び一意性を証明するための極めて有効で強力な手段である。ところで常微分方程式論では、解の存在と一意性が保障されているのに、逐次近似法では解を求めることのできる例がある。このために、1940年代、50年代初頭にかけて、逐次近似 (Picard 近似) の成立を保障するための十分条件が色々提出されている。SDE に於ても、係数が Non-Lipschitz の場合に解の存在、一意性の成立のための十分条件は数多く提案されているが、それらの場合には逐次近似が有効か、否かについての研究はほとんどなされていないようである。以下にのべる定理は、この問題に対する解答の試みである。

$\sigma(t, x), b(t, x)$ は $[0, \infty) \times \mathbb{R}^1$ 上の実数値関数。

$$\begin{aligned} \text{(条件 A)} \quad & |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 + |b(t, x) - b(t, y)|^2 \\ & \leq K(|x - y|^2) \quad x, y \in \mathbb{R}^1, t \geq 0. \end{aligned}$$

ここに $K(u)$ は $(0, \infty)$ 上の単調非減少関数で

$$K(0) = 0, \quad \int_{0+} \frac{du}{K(u)} = +\infty \quad \text{をみたす concave}$$

関数とちす。

$$\text{注 2.1} \quad |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq \rho(|x - y|)$$

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq \rho(|x - y|)$$

の形で σ, b に条件をつけたとき、例として、

$P(u) = Cu$ (Lipschitz 条件); $P(u) = Cu(\log \frac{1}{u})^{\frac{1}{2}}$;
 $P(u) = Cu(\log \frac{1}{u})^{\frac{1}{2}} (\log_{(2)} \frac{1}{u})^{\frac{1}{2}}$; ... 等の場合は
 条件 (A) が満たされている

SDE $dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt$
 を考える. 条件 (A) によつて, この SDE に対して path-
 wise の解の一貫性が保障される. ((2) を参照)

さて 逐次近似解 $X_0(t) \equiv \xi$,

$$X_k(t) = \xi + \int_0^t \sigma(s, X_{k-1}(s)) dB_s + \int_0^t b(s, X_{k-1}(s)) ds,$$

$k = 1, 2, \dots$ としよう.

$$X(t) \text{ を } X(t) = \xi + \int_0^t \sigma(s, X(s)) dB_s + \int_0^t b(s, X(s)) ds$$

と置く. このとき次の定理がなりたつ.

定理 $[0, T]$ を任意の有界区間とする. 条件 (A)
 及び $E[|\xi|^2] < +\infty$ の下で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_n(t) - X(t)|^2 \right] = 0 \text{ がなりたつ.}$$

(証明) 本質的な部分に限つてのべよう.

(1°) 条件から次のことが簡単に分る

定数 $K_1 > 0$, $K > 0$, $C > 0$ で次の性質をもつものがある.

$$|a(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq K(1+x^2)$$

$$E[|\chi_k(t)|^2] \leq K_1(1+E[|\xi|^2]) \quad (K_1 \text{ は } k \text{ に 無関係})$$

$$E\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |\chi(s) - x(0)|^2\right] \leq Ct.$$

$$K_1(u) = \int_0^T K(u) \quad \text{とおいて} \quad 0 < T_1 \leq T \text{ を}$$

$$K_1(Ct) \leq C, \quad t \in [0, T_1] \quad \text{がなりたつように} \quad \text{選ぶ}$$

でよく.

(2°) $[0, T_1]$ で定理の主張がなりたつことを示そう

$$\phi_0(t) = Ct,$$

$$\phi_k(t) = \int_0^t K_1(\phi_{k-1}(s)) ds, \quad k=1, 2, \dots$$

$$\tilde{\phi}_k(t) = E\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |\chi_k(s) - x(s)|^2\right] \quad k=0, 1, 2, \dots$$

とおく. このとき 次の lemma がなりたつ.

lemma : $k=0, 1, 2, \dots$ に対し

$$0 \leq \tilde{\phi}_k(t) \leq \phi_k(t) \leq \phi_{k-1}(t) \leq \dots \leq \phi_1(t) \leq \phi_0(t)$$

$t \in [0, T_1]$ がなりたつ.

(lemma の証明)

$k=0$ のとき

$$\tilde{\phi}_0(t) = E\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |\chi(s) - x(0)|^2\right] \leq Ct = \phi_0(t)$$

だからなりたつ. $k=1, 2, \dots$

$k = 1$ のとき

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_1(t) &= E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |x_0(s) - x(s)|^2 \right] \\ &\leq 2 E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s \{ \sigma(u, x_0(u)) - \sigma(u, x(u)) \} dB_u \right|^2 \right] \\ &\quad + 2 E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s \{ b(u, x_0(u)) - b(u, x(u)) \} du \right|^2 \right]\end{aligned}$$

Martingale 不等式と Schwarz の不等式を用いて,

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(t) &\leq 8 E \left[\left| \int_0^t \{ \sigma(s, x_0(s)) - \sigma(s, x(s)) \} dB_s \right|^2 \right] \\ &\quad + 2 E \left[t \int_0^t |b(s, x_0(s)) - b(s, x(s))|^2 ds \right] \\ &\leq 8 T E \left[\int_0^t \{ |\sigma(s, x_0(s)) - \sigma(s, x(s))|^2 + |b(s, x_0(s)) - b(s, x(s))|^2 \} ds \right] \quad \because (A) \text{ を用いて} \\ &\leq 8 T E \left[\int_0^t K_1 (|x_0(s) - x(s)|^2) ds \right] \\ &= E \left[\int_0^t K_1 (|x_0(s) - x(s)|^2) ds \right] \\ &\leq \int_0^t K_1 (E[|x_0(s) - x(s)|^2]) ds \quad (\because K_1 \text{ concave})\end{aligned}$$

$$\therefore \because E[|x_0(s) - x(s)|^2] \leq \tilde{\Phi}_0(s) \leq \phi_0(s) = Cs$$

($k=0$ の結果) を用いると, K_1 , 非減少より

$$\tilde{\Phi}_1(t) \leq \int_0^t K_1(\tilde{\Phi}_0(s)) ds \leq \int_0^t K_1(\phi_0(s)) ds = \phi_1(t).$$

$$\therefore \because K_1(Cs) \leq C \quad t \in [0, T_1] \text{ を用いると}$$

$$\phi_1(t) = \int_0^t K_1(\phi_0(s)) ds = \int_0^t K_1(Cs) ds \leq Ct = \phi_0(t).$$

$$\therefore \because \tilde{\Phi}_1(t) \leq \phi_1(t) \leq \phi_0(t) \quad t \in [0, T_1].$$

$\phi(t) \equiv 0, t \in [0, T_1]$ がなりたつ. (何故なら, 常微分方程式 $dy/dt = K_1(y), y(0)=0$ は $\int_0^+ \frac{du}{K_1(u)} = +\infty$ の下では唯一つの解, $y(t) \equiv 0$ をもつ. Osgood の一意性条件).

よって $0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} E \left[\sup_{0 \leq t \leq T_1} |x_k(t) - x(t)|^2 \right]$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\Phi}_k(T_1) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(T_1) = \phi(T_1) = 0$$

によって, 定理の主張は, $t \in [0, T_1]$ について確かめられた. あと $t \in [0, T]$ に対して定理の主張の成立を調べる必要があるが, この部分は技術的な複雑さはあるが, 本質的なアイデアを必要としない部分ではないので省略する.

(文献 (2) を参照のこと). ▲

注 2.2 条件 (A) を満足する σ, b に対しても, SDE $dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt$ に解の pathwise の一意性がなりたつ場合が色々知られていたり, それらについて逐次近似がなりたつかどうか, ちゃんと研究されている. 例えば $dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt$.

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq C|x - y|^{\frac{1}{2}}$$

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq C|x - y|, \quad \text{の場合 解の pathwise}$$

の一意性がなりたつことがよく知られていて, ~~典型的な具体例~~ 典型的な具体例が $\underbrace{\text{いくつか}}$ の type の方程式で記述される. (Bessel 過程, Pinned $\underbrace{\text{いくつか}}$ Brownian motion, 集団遺伝学に出てくる拡散過程 など) とはしたが, この場合, 逐次近似が成

り立つかどうか不明である。報告者は 解の合流, 非合流問題と解の逐次近似の成立, 不成立の間に何らかの関連があるのではないかと空想している。

注 2.3 $dx_t = \sigma(t, x_t)dB_t + b(t, x_t)dt.$

において, 解の pathwise の一意性がなりたっている, しかも $\sigma(t, x) \neq 0$ であるとき, 逐次近似がなりたっている, 具体例も知られていない。

注 2.4 定理は一次元の場合にのべたが (条件 A) の下では多次元でも解の逐次近似が保障される。*三次元以上の場合, modulus of continuity (係数の) で条件を与え3限り, (条件 A) は解の pathwise の一意性を保障する条件として ほぼ best possible と考えてよい。

文献

- (1) Yamada, T., Ogura, Y. : On the strong comparison theorems for solutions of stochastic differential equations.
Z. Wahr. 56, pp3-19. (1981).
- (2) Yamada, T. : On the successive approximation of solutions of stochastic differential equations.
J. Math. Kyoto Univ. 21, No. 3, pp 501-515 (1981).