

ブロックイデアルのコホモロジー環

愛媛大学理学部 (Ehime University)
佐々木 洋城 (Sasaki, Hiroki)

1 はじめに

G を有限群とする. k を代数的閉体とし, その標数 p は $|G|$ の素因数であるとする.

定義 1.1 b を kG のブロックイデアルとし, D を b の defect 群とする. (D, e_D) を Sylow b -subpair とする. subpair $(P, e_P) \leq (D, e_D)$ に対して, 元 $\zeta \in H^*(D, k)$ についての条件

$$S(P) \quad \text{res}_P \zeta = (\text{res}_P \zeta)^x \quad \forall x \in N_G(P, e_P)$$

を考える. コホモロジー環 $H^*(D, k)$ の部分環としてブロック b のコホモロジー環を

$$H^*(G, b) =$$

$$\{\zeta \in H^*(D, k) \mid \zeta \text{ はどの } (P, e_P) \leq (D, e_D) \text{ に対しても条件 } S(P) \text{ を満たす}\}$$

によって定義する.

Linckelmann [4] における定義とは見掛け上ちょっと違うが, 同じと思ってよい.

河合氏は 2003 年 1 月の大阪大学におけるワークショップで, defect 群が二面体群などのときのブロックのコホモロジー環の計算を紹介してくれた. ここでは, まず, defect 群が wreathed 2-群であるブロックのコホモロジー環を計算してみたので紹介する. 次に, だれでもが疑問に思うであろうように, defect 群が正規部分である場合に, ブロックのコホモロジー環について分かることを述べる.

2 defect 群が wreathed 2-群であるブロックイデアルのコホモロジー環

2.1 wreathed 2-群 W

wreathed 2-群 W を

$$W = \langle a, b, t \mid a^{2^n} = b^{2^n} = t^2 = 1, ab = ba, tat = b \rangle, n \geq 2$$

と定義する. $c = ab$, $d = a^{-1}b$ とおくと, $Z(W) = \langle z \rangle$, $D(W) = \langle d \rangle$ である. さらに,

$$x = a^{2^{n-1}}, y = b^{2^{n-1}}, z = c^{2^{n-1}} = xy,$$

$$e = xt, f = d^{2^{n-2}} (= (a^{-1}b)^{2^{n-2}}),$$

$$U = \langle a, b \rangle, Q = \langle e, f \rangle, V = \langle e, f, c \rangle$$

とおく. $Q = \langle e, f \rangle$ は位数 8 の四元数群である. また, $V = \langle x, t, c \rangle$ でもある.

2.2 ブロックのコホモロジー環

b を群環 kG のブロックイデアルとし, W は b の defect 群であると仮定する.

S を G の部分群とする. 元 $g \in N_G(S)$ がひきおこす S の自己同型を ι_g と表す:

$$\iota_g : S \longrightarrow S; s \longmapsto s^g.$$

剰余類 $gSC_G(S) \in N_G(S)/SC_G(S)$ は S の外部自己同型 $\iota_g \text{ Inn } S$ をひきおこす. 以下では, $N_G(S)/SC_G(S)$ を S の外部自己同型群の部分群と同一視する.

(W, e_W) を Sylow b -subpair とする. W の部分群の自己同型群の構造を調べることににより (Alperin–Brauer–Gorenstein [1]), W の部分群 P で, 条件 $S(P)$ を調べなければならないものは W, U, V のみであることがわかる. すなわち

補題 2.1 $\zeta \in H^*(W, k)$ が $H^*(G, b)$ に属するためには

$$(N) \quad \zeta^g = \zeta \quad \forall g \in N_G(W, e_W)$$

$$(U) \quad (\text{res}_U \zeta)^g = \text{res}_U \zeta \quad \forall g \in N_G(U, e_U)$$

$$(V) \quad (\text{res}_V \zeta)^g = \text{res}_V \zeta \quad \forall g \in N_G(V, e_V)$$

が成り立つことが必要十分である.

Sylow b -subpair (W, e_W) については, 剰余群 $N_G(W, e_W)/WC_G(W)$ は 2'-群である. 一方, wreathed 2-群 W の自己同型群 $\text{Aut } W$ は 2-群であるから,

$$N_G(W, e_W) = WC_G(W).$$

特に, 任意の $\zeta \in H^*(W, k)$ は上記補題 2.1 の条件 (N) を満たす.

Külshammer [3] に従って, $N_G(U, e_U)/C_G(U)$ と $N_G(V, e_V)/VC_G(V)$ の構造によって, ブロックを分類するが, Brauer–Wong [2], Alperin–Brauer–Gorenstein [1] の議論のまねをして, 分類の議論をする.

2.3 $N_G(U, e_U)/C_G(U)$

U の自己同型 τ, ω を次のように定義する:

$$\tau : \begin{cases} a \mapsto b \\ b \mapsto a \end{cases}, \quad \omega : \begin{cases} a \mapsto b \\ b \mapsto a^{-1}b^{-1} \end{cases}.$$

$\langle \tau, \omega \rangle \simeq \text{GL}(2, 2) (\simeq S_3)$ である. $\Phi(U) = \langle a^2, b^2 \rangle$ である. U の自己同型 σ は $U/\langle a^2, b^2 \rangle$ (四元群) の自己同型 $\bar{\sigma} : u\langle a^2, b^2 \rangle \mapsto u^\sigma\langle a^2, b^2 \rangle$ をひきおこす. 写像

$$\pi : \text{Aut } U \longrightarrow \text{Aut}(U/\langle a^2, b^2 \rangle); \sigma \longmapsto \bar{\sigma}$$

は split epi である. このとき

補題 2.2

$$\text{Aut } U = \text{Ker } \pi \rtimes \langle \tau, \omega \rangle.$$

Brauer–Wong [2] の議論を注意深く, まねして

補題 2.3

$$N_G(U, e_U)/C_G(U) = \begin{cases} \langle \tau \rangle, \\ \langle \tau, \omega \rangle^x & \exists x \in \text{Ker } \pi \cap C(\tau). \end{cases}$$

がわかる。さて、

補題 2.4 $\text{Ker } \pi = \{\sigma \in \text{Aut } U \mid u^\sigma \equiv u \pmod{\langle a^2, b^2 \rangle}\}$ に属する自己同型はコホモロジー環 $H^*(U, k)$ に自明に作用する。

により

命題 2.5 (i) $N_G(U, e_U)/C_G(U) \simeq \mathbb{Z}/(2)$ ならば、任意の $\zeta \in H^*(W, k)$ は補題 2.1 の条件 (U) を満たす。

(ii) $N_G(U, e_U)/C_G(U) \simeq \text{GL}(2, 2)$ ならば元 $\zeta \in H^*(W, k)$ が補題 2.1 の条件 (U) を満たすためには

$$(\text{res}_U \zeta)^\omega = \text{res}_U \zeta$$

であることが必要十分である。

2.4 $N_G(V, e_V)/VC_G(V)$

四元数群 $Q = \langle e, f \rangle$ の自己同型 τ, ω を

$$\tau: \begin{cases} e \mapsto f \\ f \mapsto e \end{cases}, \quad \omega: \begin{cases} e \mapsto f \\ f \mapsto e^{-1}f \end{cases}$$

と定義すると

補題 2.6

$$\text{Aut } Q = \text{Inn } Q \rtimes \langle \tau, \omega \rangle, \quad \langle \tau, \omega \rangle \simeq \text{GL}(2, 2).$$

V において Q と $\langle c \rangle$ はともに特性部分群である。 Q の自己同型 σ に対して、写像

$$\hat{\sigma}: V \longrightarrow V; x \longmapsto \begin{cases} x^\sigma & x \in Q, \\ x & x \in \langle c \rangle \end{cases}$$

は、自己同型 σ は $Q \cap \langle c \rangle = Z(Q)$ に自明に作用するから、well-defined であり、かつ自己同型である。明らかに、写像

$$i: \text{Aut } Q \longrightarrow \text{Aut } V; \sigma \longmapsto \hat{\sigma}$$

は群の単射準同型である。また、中心 $\langle c \rangle$ の自己同型 γ に対して

$$\hat{\gamma}: V \longrightarrow V; x \longmapsto \begin{cases} x & x \in Q, \\ x^\gamma & x \in \langle c \rangle \end{cases}$$

は、自己同型 γ は $Q \cap \langle c \rangle = Z(Q)$ に自明に作用するから、well-defined であり、かつ自己同型である。明らかに、写像

$$j: \text{Aut}(\langle c \rangle) \longrightarrow \text{Aut } V; \gamma \longmapsto \hat{\gamma}$$

は群の単射準同型である。

補題 2.7 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \text{Aut } V &= j(\text{Aut}\langle c \rangle) \times i(\text{Aut } Q), \\ \text{Aut}\langle c \rangle &\simeq j(\text{Aut}\langle c \rangle), \text{Aut } Q \simeq i(\text{Aut } Q), \\ |\text{Aut } V| &= 2^{n-1} \cdot 4 \cdot 6 = 2^{n+2} \cdot 3, \\ \text{Inn } V &= i(\text{Inn } Q), \text{Aut } V = \text{Inn } V \rtimes (j(\text{Aut}\langle c \rangle) \times \langle \widehat{\tau}, \widehat{\omega} \rangle). \end{aligned}$$

Alperin-Brauer-Gorenstein [1] の議論を注意深くまねして

補題 2.8

$$N_G(V, e_V)/VC_G(V) = \begin{cases} \langle \widehat{\tau}\widehat{\omega} \rangle, \\ \langle \widehat{\tau}, \widehat{\omega} \rangle \end{cases}$$

であることがわかり,

- 命題 2.9 (i) $N_G(V, e_V)/C_G(V) \simeq \mathbf{Z}/(2)$ ならば, 任意の $\zeta \in H^*(W, k)$ は補題 2.1 の条件 (V) を満たす.
(ii) $N_G(V, e_V)/VC_G(V) \simeq \text{GL}(2, 2)$ ならば元 $\zeta \in H^*(W, k)$ が補題 2.1 の条件 (V) を満たすためには

$$(\text{res}_V \zeta)^\omega = \text{res}_V \zeta$$

であることが必要十分である.

2.5 結論

以上により, $H^*(G, b)$ は $N_G(U, e_U)/C_G(U)$ と $N_G(V, e_V)/VC_G(V)$ により完全に分類されることがわかった.

主ブロックで考えると,

$$E = \langle x, y \rangle, \quad F = \langle z, t \rangle$$

とおくと

$$\begin{aligned} N_G(U)/C_G(U) \simeq \text{GL}(2, 2) &\iff N_G(E)/N_G(E) \simeq \text{GL}(2, 2), \\ N_G(V)/VC_G(V) \simeq \text{GL}(2, 2) &\iff E \sim_G F \end{aligned}$$

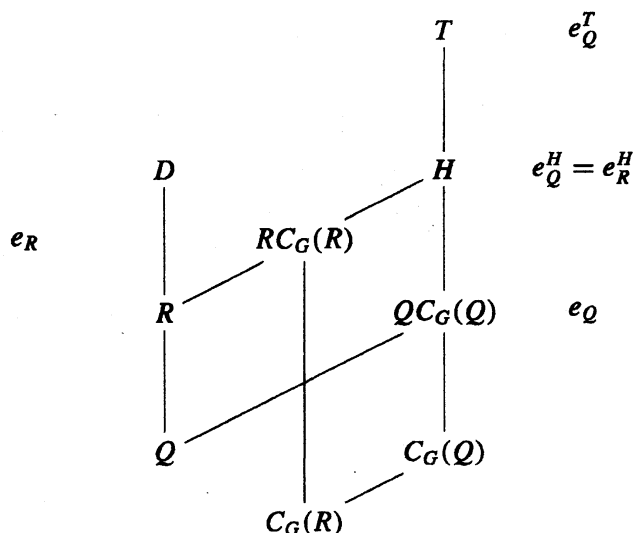
であるから, Okuyama-Sasaki [6] の分類により, $H^*(G, b)$ も記述できる.

3 defect 群が正規であるブロックのコホモロジー環

3.1 defect 群が正規であるブロックのコホモロジー環

kG のブロックイデアル b の defect 群 D が G で正規であると仮定する. (D, e_D) を Sylow b -subpair とする. (Q, e_Q) を $(Q, e_Q) \leq (D, e_D)$ である任意の b -subpair とし, $T =$

$N_G(Q, e_Q)$ とおく. $R = N_D(Q)$ は e_Q^T の defect 群である. $R \triangleleft T$ であり, R は e_Q^T のただひとつの defect 群である. $H = N_D(Q)C_G(Q)$ とおく.



$(Q, e_Q) \triangleleft (R, e_R)$ である. 以上のもとで, Frattini 論法により

補題 3.1

$$T = H \cdot N_T(R, e_R) = C_G(Q) \cdot N_T(R, e_R)$$

が成り立つ. 特に, $Q \triangleleft D$ のとき, $N_G(Q, e_Q) = C_G(Q)N_G(D, e_D)$ である.

この事実を用いて, 次が得られる.

命題 3.2 b を G のブロックイデアルとする. D を b の defect 群とし, (D, e_D) を Sylow b -subpair とする. D が G で正規ならば

$$H^*(G, b) = H^*(D, k)^{N_G(D, e_D)}$$

である. 特に, $H = N_G(D, e_D)$ とおき, $c = e_D^H$ とおくと, $H^*(G, b) = H^*(H, c)$ が成り立つ.

3.2 Puig の定理

ここでは, 有限群 G の部分群 H のブロック c のブロックべき等元 f が条件

(O) 任意の $x \in G \setminus H$ に対して $f \cdot f^x = 0$

を満たしていると仮定する.

命題 3.2 の記号の下で, b のブロックべき等元を e とし, c のブロックべき等元を f とおくと, f は上の条件を満たし, さらに $e = \sum_{Hx \in H \setminus G} f^x$ である.

Puig [7] は仮定 (O) の下で

$$e = \sum_{Hx \in H \setminus G} f^x$$

とおくと,

命題 3.3 (i) e は kG のブロックべき等元である. $b = kGe$ とおく.

(ii) ブロック b と c は共通の defect 群 D をもち,

(iii) ブロック b と c は (b, c) -加群 $M = ekGf$ により, Morita 同値である: $M \otimes_c M^* \simeq b$, $M^* \otimes_b M \simeq c$.

定理 3.4 c -subpair (P, f_P) に対して, b -subpair $(P, \hat{f}_P)$ がただひとつ定まり,

- (i) $(Q, f_Q) \neq (P, f_P) \Rightarrow (Q, \hat{f}_Q) \neq (P, \hat{f}_P)$,
- (ii) $N_G(P, \hat{f}_P) = C_G(P)N_H(P, f_P)$,
- (iii) $(Q, f_Q) \leq (P, f_P) \Leftrightarrow (Q, \hat{f}_Q) \leq (P, \hat{f}_P)$,
- (iv) $(Q, f_Q) \sim_H (P, f_P) \Leftrightarrow (Q, \hat{f}_Q) \sim_G (P, \hat{f}_P)$,
- (v) 任意の b -subpair (P, e_P) に対して, ある c -subpair (P, f_P) を適当にとれば, $(P, e_P) \sim_G (P, \hat{f}_P)$.

を示した. この命題により, コホモロジー環 $H^*(G, b)$ と $H^*(H, c)$ が一致することがわかる.

しかし, Linckelmann [5] によっても, この事実は説明できる. すなわち,

命題 3.5 (i) e と f は共通の source idempotent i をもつ.

(ii) $M = ekGf$ は (G, H) -加群 $kGi \otimes_{kD} ikH$ の直和因子である.

が成り立つ. (ii) の証明のために, (b, kD) -加群 $X = kGi$ を考える. 相対 X -射影元 $\pi_X = \text{Tr}_D^G(i) \in Z(b)$ は可逆であることから, $b \mid kGi \otimes_{kD} ikG$, 従って, $M = bf \mid kGi \otimes_{kD} ikGf$ であることがわかる. e の取り方および条件(O)により, $M = ekGf$ は

$$M = \sum_{Ht \in H \setminus G} t(fkH)$$

と表される. また, 条件(O)により, $fkGf = fM = \sum_{Ht \in H \setminus G} ft(fkH) = fkH$ である. 従って, $ikGf = ifkGf = ikHf = ikH$ である. すなわち, $M \mid kGi \otimes_{kD} ikH$.

従って, Linckelmann [5] Theorem 3.1 により, $H^*(G, b) = H^*(H, c)$ である.

参考文献

- [1] J. L. Alperin, R. Brauer, and D. Gorenstein, Finite groups with quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroups, Trans. Amer. Math. Soc. **151** (1970), 1–261.
- [2] R. Brauer and W. J. Wong, Some properties of finite groups with wreathed Sylow 2-subgroups, J. Algebra **19** (1971), 263–273.
- [3] B. Külshammer, On 2-blocks with wreathed defect groups, J. Algebra **64** (1980), 529–555.
- [4] M. Linckelmann, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebr. Represent. Theory **2** (1999), 107–135.
- [5] ———, On splendid derived and stable equivalences between blocks of finite groups., J. Algebra (2001), 819–843.
- [6] T. Okuyama and H. Sasaki, Relative projectivity of modules and cohomology theory of finite groups, Algebras and Representation Theory **4** (2001), no. 5, 405–444.
- [7] L. Puig, Local block theory in p -solvable groups, The Santa Cruz Conference on Finite Groups (B. Cooperstein and G. Mason, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 37, Amer. Math. Soc., 1980, pp. 385–388.