

二重指数変換に基づく Sinc 展開による 特異摂動問題の数値解法

森 正武 (Masatake Mori), アヒニヤズ ヌルメメット (Ahniyaz Nurmuhhammad),
マイヌル メメット (Mayinur Muhammad), 峰村晋策 (Shinsaku Minemura)
東京電機大学理工学部

Department of Mathematical Sciences, Tokyo Denki Univeristy

1 特異摂動問題とその数値解法

この節では次のような 2 階常微分方程式の境界値問題を考える.

$$\begin{aligned}\varepsilon y''(x) + \mu_1(x)y'(x) + \mu_0(x)y(x) &= \sigma(x), \quad a < x < b, \\ y(a) &= y(b) = 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

ここで, ε は小さな正の数であり, $\mu_1(x)$, $\mu_0(x)$ および $\sigma(x)$ は $a < x < b$ において解析的であると仮定する. また, この問題には解 $y(x)$ が存在し, それがやはり $a < x < b$ において解析的であると仮定する.

この問題は特異摂動問題と呼ばれ, 科学, 技術のいろいろな分野において現れる. 方程式 (1.1) のように最高次の微分の係数が小さな数 ε である場合, 解には境界層が現れることが知られている. すなわち, 解は境界のごく近くの薄い層の内部では急激に変化し, 一方境界から離れたところでは通常の変化をする. したがって, この問題の数値解を求めることは一般にかなり困難で, 数値解法は十分注意深く選ぶ必要がある. 特異摂動問題の数値解法に関しては [9, 11, 3] およびその中の参考文献を参照されたい.

M. El-Gamel and J. R. Cannon は 2 階常微分方程式の特異摂動問題の数値解を Sinc-Galerkin 法を使って求める方法を提案した [1]. 彼らは問題の定義区間 $a < x < b$ を Sinc 展開の定義区間 $-\infty < t < \infty$ に変換するために一重指数変換 (SE 変換, [12, 5] を参照) を採用した. SE 変換に基づく Sinc 法の誤差解析から [12], この方法の誤差限界は $O(\exp(-c'\sqrt{N}))$, $c' > 0$, であることがわかっている. N は Sinc 展開の項の数を表すパラメータである. Sinc 近似の詳細に関しては [12, 4]. を参照されたい.

一方, 数値積分において二重指数変換 (DE 変換) によって効率の高い公式が導かれることがよく知られている [16, 13]. このことから, 数値積分以外の方法においても DE 変換を使うことができるのではないかと考えるのはごく自然である. 実際, 文献 [6, 15] の中に, Sinc 法において DE 変換を使えばきわめて効率の高い数値計算法が導かれることが示されている. 例えば, M. Sugihara は 2 階常微分方程式の境界値問題の数値解に対して DE 変換に基づく Sinc-collocation 法を適用し, その誤差限界が $O(\exp(-cN/\log N))$, $c > 0$ であることを明らかにした [14]. これは N が大きくなると SE 変換に基づく方法よりもずっと速く誤差が 0 に収束することを示している. また, Nurmuhhammad らは, 4 階の常微分方程式の境界値問題を解くために Sinc-collocation 法 [7] および Sinc-Galerkin 法 [8] を採用し, Sinc 法において DE 変換を採用するかぎり結果の誤差の挙動はつねに $O(\exp(-cN/\log N))$ となることを明らかにした.

本研究の目的は、両端点で0という境界条件の下での2階特異摂動境界値問題(1.1)を解くためにDE変換に基づくSinc-Galerkin法を提案することにある。この方法を以下DE Sinc-Galerkin法と呼ぶことにする。ここで、 ε は摂動パラメータと呼ばれる正の小さな定数である。また、この報告を通じて $\mu_1(x)$, $\mu_0(x)$, $\sigma(x)$ は $a < x < b$ において解析的で、解 $y(x)$ は存在してかつ $a < x < b$ で解析的であると仮定する。

さらに、半線形問題（非線形問題）に対してもこのDE Sinc-Galerkin法の適用を試みて、その有効性を検証する。

この研究での重要な点として、Sinc展開がDE変換に基づいていることと、Sinc-Galerkin法に現れる内積の近似にDE積分公式[16]を採用していることを挙げることができる。特異摂動問題の数値解を求めるために本研究でDE変換を採用している理由は次の通りである。SE変換でも同様であるが、DE変換における際だった特徴として、この変換に基づく方法の標本点が境界点に集積している。標本点がこのような分布をもつことによって、この方法により境界層の内部の情報を十分に取得することができるのである。

2 Sinc展開とDE変換

よく知られているように[12], sinc関数は $-\infty < t < \infty$ において次のように定義される。

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin \pi t}{\pi t} & ; t \neq 0, \\ 1 & ; t = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

そこで、標本点の間の間隔 h は固定し、問題の数値解を表現する基底関数として、sinc関数

$$S(j, h)(t) = \frac{\sin \frac{\pi}{h}(t - jh)}{\frac{\pi}{h}(t - jh)}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.2)$$

の集合を採用する。この基底関数は直交関係

$$S(j, h)(kh) = \text{sinc}(k - j) = \begin{cases} 1 & : k = j, \\ 0 & : k \neq j \end{cases} \quad (2.3)$$

を満たすことを容易に確かめることができる。

以上の準備の下に、 $-\infty < t < \infty$ で定義される関数 $u(t)$ を考える。そして、この関数は次の条件を満たすと仮定する。

i) $u(t)$ は t 平面の帯状領域

$$|\text{Im } t| < d \quad (2.4)$$

で解析的である。

ii) $t \rightarrow \pm\infty$ のとき $|u(t)| \rightarrow 0$ となる。

このとき、もしも級数

$$u_h(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u(jh)S(j, h)(t) \quad (2.5)$$

が収束するならばこれを Whittaker 基本展開と呼ぶ。(2.3) からわかるように、

$$u_h(kh) = u(kh) \quad (2.6)$$

が成り立つので、 $u_h(t)$ は $u(t)$ に対する補間になっていることに注意されたい。

仮定 (i) および (ii) にいくつかのゆるい条件を加えれば、

$$u(t) = u_h(t) + E_{\text{sinc}}(h), \quad E_{\text{sinc}}(h) = O\left(\exp\left(-\frac{\pi d}{h}\right)\right) \quad (2.7)$$

が成り立つことを示すことができる [12]。ただし、 d は (2.4) で定義した帯状領域の半幅である。誤差 $E_{\text{sinc}}(h)$ は $u(t)$ の離散化に起因するものであるから、これを離散化誤差と呼ぶことにする。この式から h が小さくなるとき $E_{\text{sinc}}(h)$ は急速に減少することがわかる。

sinc 関数による展開 (2.7) は無限区間 $-\infty < t < \infty$ 上で定義されているのに対して、これから取り扱おうとしている方程式は有限区間 $a < x < b$ 上で定義されている。したがって、 $-\infty < t < \infty$ を $a < x < b$ に写像する関数が必要となる。Sinc 法を応用するときこれまで多くの場合変換

$$x = \psi(t) = \frac{b-a}{2} \tanh \frac{t}{2} + \frac{b+a}{2} \quad (2.8)$$

が使われてきた [12, 1]。それに対して、本研究では

$$x = \psi(t) = \frac{b-a}{2} \tanh \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right) + \frac{b+a}{2} \quad (2.9)$$

を採用する。この変換は Takahasi and Mori が 1974 年に数値積分に対して提案したものである [16]。この変換の逆変換は具体的に次のように書くことができる。

$$t = \psi^{-1}(x) = \phi(x) = \log \left(\frac{1}{\pi} \log \left(\frac{x-a}{b-x} \right) + \sqrt{\frac{1}{\pi^2} \left(\log \frac{x-a}{b-x} \right)^2 + 1} \right) \quad (2.10)$$

本研究でこの変換を使用する一つの理由は、(2.9) がある意味で最適変換になっていて、Sinc 法においてこの変換が (2.8) よりもずっと速い収束を与えることにある [16, 13, 15]。

(2.7) の t に (2.10) の $\psi^{-1}(x)$ を代入して

$$v(x) = u(\psi^{-1}(x)) \quad (2.11)$$

と置く。すると、(2.5) より $a < x < b$ で定義された関数 $v(x)$ に対して次の形の近似が得られる。

$$v(x) = u(\psi^{-1}(x)) = v_h(x) + E_{\text{sinc}}(h),$$

$$v_h(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v(\psi(jh))S(j, h)(\psi^{-1}(x)), \quad E_{\text{sinc}}(h) = O\left(\exp\left(-\frac{\pi d}{h}\right)\right) \quad (2.12)$$

変換 (2.9) の場合, d は $d \leq \pi/2$ を満たす正の数であり, また変換 (2.8) の場合, d は $d \leq \pi$ を満たす正の数であることがわかっている.

両端点で $y(a) = y(b) = 0$ という (1.1) に対する境界条件に対応して, ここで零点の位数を一般化し, $y(x)$ は境界点の近傍で

$$y(x) = \begin{cases} O((x-a)^{\beta_-}), & x \rightarrow a \quad (0 < \beta_-), \\ O((b-x)^{\beta_+}), & x \rightarrow b \quad (0 < \beta_+) \end{cases} \quad (2.13)$$

を満たすと仮定する. 後で示す数値例の方程式ではすべて $\beta_- = \beta_+ = 1$ としている.

このように仮定すると, (2.9) から

$$\begin{cases} x-a = \frac{b-a}{1+\exp(-\pi \sinh t)} \approx (b-a) \exp\left(-\frac{\pi}{2}e^{|t|}\right), & t \rightarrow -\infty, \\ b-x = \frac{b-a}{1+\exp(+\pi \sinh t)} \approx (b-a) \exp\left(-\frac{\pi}{2}e^t\right), & t \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (2.14)$$

が導かれる. したがって, (2.13) より $y(x) = y(\psi(t))$ は

$$y(\psi(t)) = \begin{cases} O\left(\exp\left(-\frac{\pi}{2}\beta_- \exp|t|\right)\right), & t \rightarrow -\infty, \\ O\left(\exp\left(-\frac{\pi}{2}\beta_+ \exp t\right)\right), & t \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (2.15)$$

のように二重指数的に減衰することがわかる. この意味で (2.9) を二重指数変換 (double exponential transformation, DE 変換) と呼ぶ. 一方, 変換 (2.8) の場合は $y(x) = y(\psi(t))$ は

$$y(\psi(t)) = \begin{cases} O(\exp(-\beta_-|t|)), & t \rightarrow -\infty, \\ O(\exp(-\beta_+t)), & t \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (2.16)$$

のように減衰し, したがってこちらは一重指数変換 (single exponential transformation, SE 変換) と呼ぶのである.

特異摂動問題においては, 境界に接する非常に薄い領域における $y(x)$ の挙動を注意深く解析する必要がある. 変換 (2.10) はこの要請によく適合する. なぜならば, すでに 1 節で述べたように, この変換は境界に非常に近いところで標本点を必要なだけとることができるからである.

3 無限和の打ち切り

ここでは (a, b) における数値解に対して Sinc 展開を使うので, (2.12) においては $v(x)$ として方程式の解 $y(x)$ を想定している. したがって以後, (2.4) に対応して, $y(\psi(t))$ はある d に対応する帯状領域 $|\operatorname{Im} t| < d$ において解析的であると仮定する. そのとき, (2.12)

から

$$y(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y(x_j) S(j, h)(\psi^{-1}(x)) + E_{\text{sinc}}(h), \quad x_j = \psi(jh),$$

$$E_{\text{sinc}}(h) = O\left(\exp\left(-\frac{\pi d}{h}\right)\right) \quad (3.1)$$

を得る。以下, $x_j = \psi(jh), j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ の各々を DE 点 (DE point) と呼ぶことにする。次に, $y(x_j)$ をその近似である y_j で置き換え,

$$\tilde{y}_h(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y_j S(j, h)(\psi^{-1}(x)) \quad (3.2)$$

と置く。ただし, 実際の計算では無限和 (3.2) を打ち切って有限和にしなければならない。そこでいま, 無限和 (3.2) を j の負の側では $j = -n_-$ で打ち切るとする。 $y(x)$ は (2.15) のように減衰し, また (2.1) より $|S(j, h)(t)| \leq 1$ が成り立つから, この打ち切りによって発生する誤差は近似的に次のように上から抑えることができる。

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{\pi}{2}\beta_- e^{(n_-+1)h}\right) + \exp\left(-\frac{\pi}{2}\beta_- e^{(n_-+2)h}\right) + \dots \\ &= \delta e^h + \delta e^{2h} + \dots, \quad \delta = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\beta_- e^{n_-h}\right) \\ &< \delta^{1+h} + \delta^{1+2h} + \dots = \delta \frac{\delta^h}{1 - \delta^h} < \delta = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\beta_- e^{n_-h}\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで, δ は小さいので $\delta^h < 1/2$ が成り立つことを仮定した [5].

最初に, Sinc 展開を打ち切るときこれまで標準的に行われてきた打ち切り方をここで復習しておく。簡単のために, ここでは $\beta_- = \beta_+ = \beta$ および $n_- = n_+ = n$ を仮定しておく。和の打ち切りは, 打ち切りから発生する誤差 (3.3) が Sinc 展開を行ったことによる離散化誤差 $\exp(-\pi d/h)$ (3.1) と等しくなるように, すなわち

$$\exp\left(-\frac{\pi}{2}\beta e^{nh}\right) = \exp\left(-\frac{\pi d}{h}\right) \quad (3.4)$$

となるように実行すべきである。この等式から, h と n の間に成り立つ次のような関係が導かれる。

$$h = \frac{1}{n} \log\left(\frac{2dn}{\beta}\right) \quad (3.5)$$

ここで $\exp(-\pi d/h)$ の h を (3.5) で置き換えれば, n で表現した誤差のよく知られた次の表示が得られる [16].

$$E_{DE}(= E_{\text{sinc}}(h)) = O\left(\exp\left(-\frac{\pi dn}{\log(2dn/\beta)}\right)\right) \quad (3.6)$$

同様にして、SE 変換 (2.8) の場合には、誤差の表示

$$E_{SE} = O\left(\exp\left(-\sqrt{\pi^2 d \beta n / 2}\right)\right) \quad (3.7)$$

が導かれる。ただし、 h と n の関係は $h = \sqrt{2d/n}$ のようにとる。(3.6) と (3.7) を比較すれば、 n が大きくなると誤差は SE 変換よりも DE 変換の方がずっと速く 0 に収束することがわかる。実際、Sinc 近似の中で DE Sinc 近似がある意味で最適であることが数学的にも証明されている [13, 15]。この事実が本研究で DE 変換を採用している最も大きな理由の一つである。

しかし、応用の観点に立つと、(2.4) で定義される $y(\psi(t))$ が解析的な帯状領域の半幅 d の値を前もって知ることは通常は困難である。そこで、この標準的な打ち切り方の代わりに、 d の値を前もって知っている必要のない別の打ち切り方をここで提案する。

いろいろな応用に現れる $|y(x)|$ の最大値は 1 のオーダーであると考えるのは妥当である。そこで、ここでは $\max_{0 \leq x \leq 1} |y(x)|$ は 1 のオーダーの値であると仮定する。 $y(x) = y(\psi(t))$ はすでに見たように (2.15) のように減衰する。このことから、ここで和の次のような打ち切り方を提案する。まず最初に、打ち切りパラメータとして ε_{tr} をとり、これに小さな正の数を与える。次に、刻み幅 h を適当に選ぶ。そして、もしも $|y(x_j)|$ が

$$|y(x_j)| \leq \varepsilon_{tr} \quad \text{at } j = -n_- \quad (3.8)$$

を満たしたならば j の負の側においては $j = -n_-$ で $y(x_j)$ は十分小さく減衰したとみなし、和 (3.1) を $j = -n_-$ までとって終了する。すなわち、 $|y(x_j)|$ は (2.15) のように減衰するので、

$$\exp\left(-\frac{\pi}{2}\beta_- e^{t_-}\right) = \varepsilon_{tr}, \quad t_- = n_- h \quad (3.9)$$

となったところで打ち切る。 $-t_-$ は変数 t の打ち切りの下限である。これから刻み幅 h と解の Sinc 展開の項数 n_- の間の次のような関係が導かれる。

$$n_- = \frac{1}{h} t_-, \quad t_- = \log\left(\frac{2}{\pi\beta_-} \log \frac{1}{\varepsilon_{tr}}\right) \quad (3.10)$$

同様に、 j の正の側においては $j = n_+$ において $|y_j| \leq \varepsilon_{tr}$ が成り立ったならばそこで $|y_j|$ は十分小さく減衰したとみなし、和を $j = n_+$ までとって終了する。ただし、

$$n_+ = \frac{1}{h} t_+, \quad t_+ = \log\left(\frac{2}{\pi\beta_+} \log \frac{1}{\varepsilon_{tr}}\right) \quad (3.11)$$

であり、 t_+ は変数 t の打ち切りの上限である。

ε_{tr} の選び方はユーザーの誤差許容限界に対する要求に依存し、いろいろな選び方が考えられる。そのうち簡単かつ一般的な選び方として、 ε_{tr} として実際に数値解を計算するシステムの計算機イプシロン (machine epsilon) を採用するやり方が考えられる。その理由は、計算機イプシロンあるいはその良い近似値を計算するひじょうに簡単なプログラムが知られているからである [2]。実際、6 節で示す数値例では、 ε_{tr} として数値解を求めて

いるシステムの計算機イプシロンを採用している. いずれにしても, ε_{tr} としては計算しているシステムの計算機イプシロンと等しいかそれより大きい値を採用すべきである.

これまでは摂動パラメータ ε がひじょうに小さいということはとくに考慮に入れてこなかった. もしも ε が小さいということを注意深く考慮に入れなければならないとすれば, 次のような打ち切り方が考えられる.

ここでは簡単のために, 特異摂動問題 (1.1) の端点は $a = 0$ および $b = 1$ であると仮定する. また, 以下 $\mu_1(x)$ と $\mu_0(x)$ はある α に対して

$$\mu_1(x) = 0, \quad \mu_0(x) \leq -\alpha < 0 \quad (\alpha > 0) \quad (3.12)$$

を満たしていると仮定する. このとき, [3] より, 両端点 $x = 0$ および $x = 1$ に境界層が現れ, 左側の端点の近傍では解において境界条件 $y(0) = 0$ を満たす項 $y_-(x)$ が優越し, それが

$$|y(x)| \approx |y_-(x)| \leq \hat{y}_-(x), \quad \hat{y}_-(x) = C_- \left| \exp \left(-\alpha \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \right) - 1 \right| \quad (3.13)$$

のように上限 $\hat{y}_-(x)$ で抑えられることが知られている.

特異摂動問題では $\sqrt{\varepsilon}$ はそれ自身ひじょうに小さい定数である. しかし, 左側の端点 $x = 0$ ではさらに狭い領域 $x \ll \sqrt{\varepsilon}$ において $y(x)$ の挙動を取り扱う必要がある. このように狭い領域では $\hat{y}_-(x) = C_- |\exp(-\alpha x/\sqrt{\varepsilon}) - 1| \approx C_- \alpha x/\sqrt{\varepsilon}$ が成り立つ. したがって, 左側の端点 $x = 0$ のごく近傍では $\hat{y}_-(x) \approx C_- L_- x$ が成り立つと考えることができる. ただし, $L_- (= \alpha/\sqrt{\varepsilon})$ は大きな正の定数である. 右側の端点 $x = 1$ の近傍でも状況は同様に, $\hat{y}_+(x) \approx C_+ L_+(1-x)$ が成り立つ. ただし, L_+ も大きな正の定数である.

そこで, このように極端に端点に近接した領域では上限 $\hat{y}_-(x)$ は解の絶対値 $|y(x)|$ をよく近似していると仮定し, したがって和 (3.2) の打ち切りを (3.9) の左辺の代わりに上限 $\hat{y}_-(x) \approx L_- x$ (C_- は無視する) によって実行する. すなわち, x は (2.14) のように減衰するので,

$$L_- \exp \left(-\frac{\pi}{2} \beta_- e^{t_-} \right) = \varepsilon_{\text{tr}}, \quad t_- = n_- h \quad (3.14)$$

が成り立つように打ち切れればよい. 以上から, 打ち切りの項数として

$$n_- = \frac{1}{h} t_-, \quad t_- = \log \left(\frac{2}{\pi \beta_-} \log \frac{L_-}{\varepsilon_{\text{tr}}} \right). \quad (3.15)$$

を得る. 正の側の打ち切り項数についても, 同様にして

$$n_+ = \frac{1}{h} t_+, \quad t_+ = \log \left(\frac{2}{\pi \beta_+} \log \frac{L_+}{\varepsilon_{\text{tr}}} \right). \quad (3.16)$$

が得られる. 6 節の数値例では (3.15) および (3.16) を採用している.

ここで, L_- および L_+ は Sinc 展開の打ち切りの場所を決めるためだけに使われており, 数値解を求めるアルゴリズムそのものには現れていないことに注意されたい. しかも, L_- は (3.15) の右辺の n_- には二重の対数の内部に現れており, したがって n_- あるいは t_- に

対する L_- の影響はひじょうに小さい。 L_+ についても状況は同じである。例えば、例 1 の表 1 の t_- と t_+ の変化を参照すれば状況は一層よく理解されよう。

強調すべきことは、ここで提案する DE 変換に基づく Sinc 法は、 ε がひじょうに小さいという特異な状況に特別な注意を払うことなしに、それ自身で特異摂動問題を解く能力を備えているという点である。したがって、 L_- の適切な値を選ぶことが困難な場合にはむしろ $L_- = 1$ を使うことを推奨する。このように選んでも多くの場合役に立つ結果を得ることができるであろう。状況は L_+ についても同様である。6 節の例 3 を参照されたい。

4 DE Sinc-Galerkin 法

以上の準備の下に、対象としている特異摂動問題の数値解を求めるために Galerkin 法を適用してみる。ここでは当面、2 階微分の係数を定数 ε ではなく関数の形に $\mu_2(x)$ のように一般化して扱い、両端点で 0 の境界条件をもつ次の方程式を考察する。

$$\begin{aligned}\mu_2(x)y''(x) + \mu_1(x)y'(x) + \mu_0(x)y(x) &= \sigma(x), \quad a < x < b, \\ y(a) &= y(b) = 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

ここで、(1.1) における $\mu_1(x)$ 、 $\mu_0(x)$ 、 $\sigma(x)$ とともに、 $\mu_2(x)$ は $a < x < b$ において解析的であるとする。

最初に、重み関数 $1/\phi'(x) = 1/\{\psi^{-1}(x)\}'$ をもつ次の内積を導入する。

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx, \quad \rho(x) = \frac{1}{\phi'(x)}\tag{4.2}$$

この重み関数が

$$\begin{aligned}\frac{1}{\phi'(x)} &= \frac{1}{\frac{d\psi^{-1}(x)}{dx}} = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{b-a}{2} \frac{\frac{\pi}{2} \cosh t}{\cosh^2(\frac{\pi}{2} \sinh t)} \\ &\approx \pi \frac{b-a}{2} e^{|t|} \exp\left(-\frac{\pi}{2} e^{|t|}\right), \quad t \rightarrow \pm\infty\end{aligned}\tag{4.3}$$

を満たすことがすぐにわかる。そこで、方程式 (4.1) と Sinc 関数

$$S_k \equiv S(k, h)(\psi^{-1}(x))\tag{4.4}$$

の内積を作ると、弱形式の方程式

$$\langle \mu_2 y'', S_k \rangle + \langle \mu_1 y', S_k \rangle + \langle \mu_0 y, S_k \rangle = \langle \sigma, S_k \rangle.\tag{4.5}$$

が導かれる。左辺の各項を部分積分すると、

$$\langle \mu_2 y'', S_k \rangle = \int_a^b y(\mu_2 S_k \rho)'' dx + F_2, \quad F_2 = \{y'(\mu_2 S_k \rho) - y(\mu_2 S_k \rho)'\} \Big|_a^b\tag{4.6}$$

および

$$\langle \mu_1 y', S_k \rangle = - \int_a^b y(\mu_1 S_k \rho)' dx + F_1, \quad F_1 = \{y(\mu_1 S_k \rho)\} \Big|_a^b \quad (4.7)$$

が得られる。\$y(x)\$ は境界で (2.13) の形で 0 になると仮定したから、\$F_1\$ および \$F_2\$ の第 2 項は境界で 0 になる。一方、(2.13) に見るように \$y'(x)\$ は境界で一般には 0 になるとは限らない。しかし、重み関数 \$\rho(x)\$ を (4.2) のように定義したので、(4.3) より \$F_2\$ の第 1 項も境界で 0 になることがわかる。以上から、方程式 (4.1) に対応する、\$y(x)\$ の微分を含まない次のような弱形式の方程式が導かれた。

$$\int_a^b y(\mu_2 S_k \rho)'' dx - \int_a^b y(\mu_1 S_k \rho)' dx + \int_a^b y(\mu_0 S_k \rho) dx = \int_a^b \sigma S_k \rho dx \quad (4.8)$$

次に、(4.8) の各項の数値積分を実行する。そのために、ここでは DE 変換 (2.9) に基づく二重指数公式 (DE 公式)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\psi(t)) \psi'(t) dt = h \sum_{j=-n_-}^{n_+} f(x_j) \frac{1}{\phi'(x_j)} + E_{\text{int}} + E_{\text{trunc}}, \\ x_j &= \psi(jh), \quad E_{\text{int}} = O\left(\exp\left(-\frac{2\pi d'}{h}\right)\right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

を採用する [16]。そして刻み幅 \$h\$ として、Sinc 展開 (3.1) において採用したと等しい刻み幅を採用する。こうすることによって、DE 点 \$x_j = \psi(jh)\$, \$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\$ は Sinc 展開と DE 公式とで共通の値となる。\$d'\$ は \$f(\psi(t))\psi'(t)\$ が解析的な帯状領域

$$|\text{Im } t| < d' \quad (4.10)$$

の半幅である。また、\$E_{\text{int}}\$ は数値積分による誤差であり、\$E_{\text{trunc}}\$ は和の打ち切りから生ずる誤差である。

まず初めに、\$f(x)\$ として \$y(\mu_m S_k \rho)^{(m)}\$, \$m = 0, 1, 2\$ および \$\sigma S_k \rho\$ の場合を考える。各項に応じて \$d'\$ の値は異なる。仮りに \$d \approx d'\$ が成り立っていると仮定すると、数値積分を二重指数公式で計算したときの (4.9) の誤差 \$E_{\text{int}}\$ は、刻み幅 \$h\$ が同じであるとしたときの DE Sinc 展開 (3.1) の誤差の 2 乗で小さくなることがわかる。したがって、ここでは

$$2d' \geq d \quad (4.11)$$

であると仮定し、以下この仮定の下で、(3.1) で生ずる誤差 \$E_{\text{sinc}}(h)\$ と比べて (4.9) の誤差 \$E_{\text{int}}\$ を無視することにする。

次に、積分 (4.8) の各項は (4.9) より \$1/\phi'(x_j)\$ なる重みをもち、この重みは (4.3) に見るように二重指数的に減衰する。したがって、和 (4.9) は被積分関数の絶対値が \$\varepsilon_{\text{tr}}\$ 以下になるところで打ち切られることになる。これらのことから、打ち切りによる誤差、すなわち (4.9) における誤差 \$E_{\text{trunc}}\$ は、実際の計算では無視できることがわかる。

以上の準備によって、解くべき方程式の具体的な形を書き下すことができる。すなわち、(4.8) の各項に DE 公式 (4.9) を適用し、無限和を 3 節で示した方法で打ち切ると、次

の連立 1 次方程式が導かれる.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=-n_-}^{n_+} \left\{ \mu_2 \delta_{jk}^{(2)} + h \left(-\mu_2 \left(\frac{1}{\phi'} \right)' + \mu_1 \left(\frac{1}{\phi'} \right) \right) (x_j) \delta_{jk}^{(1)} \right. \\
 & \left. + h^2 \left(\mu_2 \left(\frac{1}{\phi'} \right)'' \left(\frac{1}{\phi'} \right) - \mu_1' \left(\frac{1}{\phi'} \right)^2 - \mu_1 \left(\frac{1}{\phi'} \right)' \left(\frac{1}{\phi'} \right) + \mu_0 \left(\frac{1}{\phi'} \right)^2 \right) (x_j) \delta_{jk}^{(0)} \right\} y_j \\
 & = h^2 \sigma \left(\frac{1}{\phi'} \right)^2 (x_k), \quad k = -n_-, -n_- + 1, \dots, n_+,
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

ただし,

$$\delta_{jk}^{(0)} = \begin{cases} 1; & j = k, \\ 0; & j \neq k, \end{cases} \quad \delta_{jk}^{(1)} = \begin{cases} 0; & j = k, \\ \frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)}; & j \neq k, \end{cases} \quad \delta_{jk}^{(2)} = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3}; & j = k, \\ \frac{-2(-1)^{k-j}}{(k-j)^2}; & j \neq k \end{cases} \tag{4.13}$$

である. (4.12) に現れる微分の各項の具体形は次のようになる.

$$\left(\frac{1}{\phi'} \right) (x) = \left(\frac{1}{\phi'} \right) (\psi(t)) = \frac{b-a}{2} \frac{\frac{\pi}{2} \cosh t}{\cosh^2 \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right)}, \tag{4.14}$$

$$\left(\frac{1}{\phi'} \right)' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\phi'} \right) = \phi'(x) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\phi'} \right) = \tanh t - \pi \cosh t \tanh \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right), \tag{4.15}$$

$$\left(\frac{1}{\phi'} \right)'' \left(\frac{1}{\phi'} \right) = \frac{1}{\cosh^2 t} - \pi \sinh t \tanh \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right) - \frac{\pi^2}{2} \frac{\cosh^2 t}{\cosh^2 \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right)} \tag{4.16}$$

ここで, 特異摂動問題 (1.1) も含む 2 階常微分方程式の境界値問題 (4.1) の数値解

$$\tilde{y}_{n_{\text{tot}}}(x) = \sum_{j=-n_-}^{n_+} y_j S(j, h)(\psi^{-1}(x)) \tag{4.17}$$

を計算する手順をまとめておく. (4.17) の左辺の下付き添え字に現れる n_{tot} は

$$n_{\text{tot}} = n_- + n_+ + 1 \tag{4.18}$$

で定義され, (4.12) によって実際に計算される (4.17) の項の総数を表す.

1. 項の打ち切りのための基準 ε_{tr} を選ぶ (例えば計算機イプシロン).
2. 刻み幅 h を選ぶ.
3. (3.10) と (3.11) から n_- と n_+ を決定する. あるいは (3.15) と (3.16) から n_- と n_+ を決定する.

4. 連立 1 次方程式 (4.12) において $\mu_2(x) = \varepsilon$ と置き, これを $y_j, j = -n_-, -n_- + 1, \dots, n_+$ について解く. y_j は DE 点 $x = \psi(jh)$ における近似解の値 $y_j = \tilde{y}_{n_{\text{tot}}}(x_j)$ である.
5. 任意の点 x における近似解の値は (4.17) の右辺を計算することによって求められる.

近似解の誤差を E_{max} とする. 横軸に n_{tot} をとって対数スケールでこの誤差 E_{max} のグラフをプロットすると, すなわち $\log E_{\text{max}}$ vs. n_{tot} のグラフをプロットすると, ほとんど線形の関係 $\log E_{\text{max}} \approx -cn_{\text{tot}}$ が見られる. その理由は次の通りである. (3.10) と (3.11), あるいは (3.15) と (3.16) から

$$h \approx t_{\text{tot}}/n_{\text{tot}}, \quad t_{\text{tot}} = t_- + t_+ \quad (4.19)$$

なる関係が成り立っていることがわかる. したがって, (3.1) より

$$E_{\text{max}} \approx |E_{\text{sinc}}(h)| = O\left(\exp\left(-\frac{\pi d}{h}\right)\right) = O(\exp(-cn_{\text{tot}})), \quad c = \frac{\pi d}{t_{\text{tot}}}$$

となる. ただし, この関係は $|E_{\text{sinc}}(h)| \geq \varepsilon_{\text{tr}}$ を満たす h あるいは n_{tot} に対してのみ成り立つものであることに注意する必要がある.

5 半線形問題の解

これまで述べてきた方法は, 両端で 0 という境界条件の下で, 次のような半線形境界値問題の数値解を求めるためにも使うことができる.

$$\begin{aligned} \mu_2(x)y''(x) + \mu_1(x)y'(x) + F[x, y] &= \sigma(x), \quad a < x < b, \\ y(a) &= y(b) = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

この問題は $\mu_2(x) = \varepsilon$ の場合には特異摂動問題になる. $F[x, y]$ は非線形項で, $F[x, y]$ には $y(x)$ の微分は含まれないとする. 半線形と呼ぶ理由はそのためである. ここでも $F[x, y]$ は x と y の関数で, $a \leq x \leq b$ において解析的であると仮定する.

このような半線形の場合でも, (4.17) と同じ形の解を仮定し, 同様の解析を行えば, 結局次のような非線形代数方程式が得られる.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=-n_-}^{n_+} \left[\left\{ \mu_2 \delta_{jk}^{(2)} + h \left(-\mu_2 \left(\frac{1}{\phi'} \right)' + \mu_1 \left(\frac{1}{\phi'} \right) \right) (x_j) \delta_{jk}^{(1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + h^2 \left(\mu_2 \left(\frac{1}{\phi'} \right)'' \left(\frac{1}{\phi'} \right) - \mu_1' \left(\frac{1}{\phi'} \right)^2 - \mu_1 \left(\frac{1}{\phi'} \right)' \left(\frac{1}{\phi'} \right) \right) (x_j) \delta_{jk}^{(0)} \right\} y_j \right. \\ &\quad \left. + h^2 F[x_j, y_j] \left(\frac{1}{\phi'} \right)^2 (x_j) \delta_{jk}^{(0)} \right] = h^2 \sigma \left(\frac{1}{\phi'} \right)^2 (x_k), \quad k = -n_-, -n_- + 1, \dots, n_+ \end{aligned} \quad (5.2)$$

この非線形方程式 (5.2) を $y_j, j = -n_-, -n_- + 1, \dots, n_+$ について解けば, DE 点 $x_j = \psi(jh)$ における近似解 $y_j = \tilde{y}_{n_{\text{tot}}}(x_j)$ が得られ, また (4.17) によって任意の点 x における近似解

を求めることができる。このとき、適切な初期値から出発することができれば、通常はニュートン法によって (5.2) の解を得ることができる。6 節に半線形問題の数値解を求める例を示す。

6 数値例

ここで、特異摂動問題 (1.1) および (5.1) で $\mu_2(x) = \varepsilon$ とした場合の数値例を示し、これまで議論してきた解析の結果を確認する。そこでは、ここで提案している方法が高精度の結果を与えることを示すために問題の解は Pentium IV パーソナルコンピュータで Fujitsu コンパイラの 4 倍精度演算を使って計算する。このシステムの計算機イプシロンは 1.926×10^{-34} であり、計算を実行するときには (3.8) で使う打ち切りパラメータは $\varepsilon_{tr} = 1.926 \times 10^{-34}$ を選んだ。数値計算を実行するときには、最初に計算機で ε_{tr} を計算し [2]、その値をそれ以降の計算で使うようにしている。

いずれの例題においても、問題は $0 < x < 1$ で定義されていて、 $a = 0$, $b = 1$ である。したがって、二重指数変換は具体的に次のようになる。

$$x = \psi(t) = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\exp\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)} = \frac{1}{1 + \exp(-\pi \sinh t)} \quad (6.1)$$

また、 $\beta_- = \beta_+ = 1$ と置いた。どの例題においても、刻み幅は $h = 0.32, 0.16, 0.08, 0.04, 0.02, 0.01$ と選んでいるが、解の挙動がより明確になるようにこれ以外の h の値についても計算した例もある。以上のようにパラメータを選んだ後、4 節の最後で述べた手順に従って計算を行った。

いずれの例についても真の解がわかっているので、各 DE 点 $x_j = \psi(jh)$, $j = -n_-, -n_- + 1, \dots, n_+$ において数値解 $y_j = \tilde{y}_{n_{tot}}(x_j)$ の誤差

$$E_{\max} = \max_{-n_- \leq j \leq n_+} |y_j - y(x_j)|, \quad x_j = \psi(jh) \quad (6.2)$$

を図に示した。各々の図において、'max error' は $E_{\max}$ を表し、' n_{tot} ' は Sinc 展開の総項数 $n_{tot} = n_- + n_+ + 1$ を表している。図のグラフ上のマーカーは、実際に計算を行って得たデータ対 $(n_{tot}, E_{\max})$ に対応し、図では各 ε ごとに隣接するデータ対を線分で結んで示してある。

例 1 最初の例は、El-Gamel and Cannon [1] による特異摂動の標準的な問題である：

$$\begin{aligned} \varepsilon y''(x) - y(x) &= \cos^2(\pi x) + 2\varepsilon \pi^2 \cos(2\pi x), \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

この方程式は (1.1) で $a = 0$, $b = 1$, $\mu_1(x) = 0$, $\mu_0(x) = -1$ とした場合に相当し、したがって解 $y(x)$ は $\alpha = 1$ とした (3.12) を満たしている。そこで、 L_- , L_+ として $L_- = 1/\sqrt{\varepsilon}$, $L_+ = 1/\sqrt{\varepsilon}$ のように選んだ。実際、この問題の真の解はつぎのようになっている。

$$y(x) = \frac{e^{-x/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}}{1 + e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}} - \cos^2(\pi x) \quad (6.4)$$

われわれは $\varepsilon = 10^{-10}, 10^{-8}, 10^{-5}, 1$ の場合についてこの問題を DE Sinc-Galerkin 法を使って解き、その数値解の誤差 $E_{\max}$ を図 1 に示した. 表 1 に (3.15) および (3.16) で定

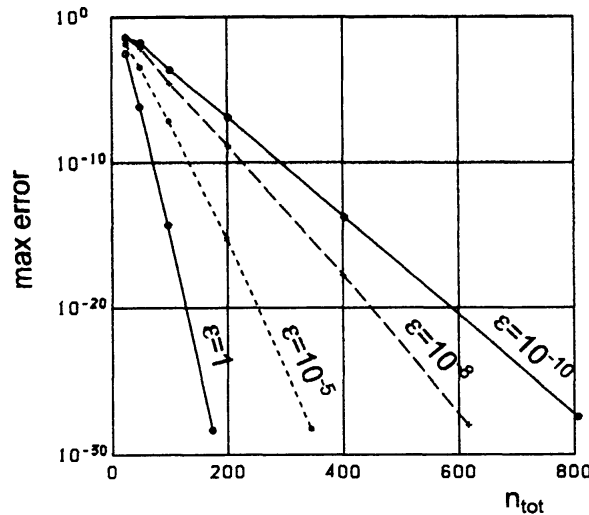


図 1: 例 1 の $\varepsilon = 10^{-10}, 10^{-8}, 10^{-5}, 1$ の場合の最大誤差 $E_{\max}$

義される t_- と t_+ を示した. この例では各 ε について $t_- = t_+$ が成立している. 表 1 と

表 1: 例 1 の各 ε に対する t_- および t_+ . この例では $t_- = t_+$.

ε	10^{-10}	10^{-8}	10^{-5}	1
t_-, t_+	4.0387	4.0125	3.9719	3.9004

(4.19) から n_{tot} に対応する h の値を容易に求めることができる. この表から, われわれの方法によれば Sinc 関数展開で数百項とれば, ほぼ 4 倍精度の結果が得られることがわかる. $\varepsilon = 10^{-10}, 10^{-8}, 10^{-5}$ のいずれの場合にも, L_- と L_+ の選び方で考慮した以外, $\varepsilon = 1$ の場合と同様に ε が小さいということに特別な注意を払うことはしなかった.

ちなみに, 例 1 で $L_- = L_+ = 10^5$ の代わりに $L_- = L_+ = 1$ を使うと, ε のそれぞれの値に対して図 1 とほとんど同じ誤差曲線が得られる. その理由は, 3 節の最後に述べたように, L_- と L_+ の数値解に対する影響が一般に大きくないからである. 例 3 も参照されたい.

Sinc 展開がどの程度滑らかであるかを見るために, 区間 $0 \leq x \leq 1$ を 1000 等分して幅 0.001 の小区間に分けた. そして, $\varepsilon = 10^{-5}$ の場合について, $h = 0.08$ ととり, その近似解 $\tilde{y}_{n_{\text{tot}}}(x_i)$ を $x_i = i/1000, 1 \leq i \leq 999$ において (4.17) から計算し, その結果をグラフにして図 2 に示した. この近似解は真の解にひじょうに近いので, このグラフに真の解を上書きすると二つのグラフが重なって区別することができない. DE 点での最大誤差は $j = -14$, すなわち $x = 1.34 \times 10^{-2}$ において生じ, 値は $E_{\max} = 7.04 \times 10^{-8}$ である. 一方, 等間隔刻みの点での最大誤差は $i = 7$, すなわち $x = 7.00 \times 10^{-3}$ において生じ, 値は

8.59×10^{-7} である。また、両端点において境界層が生じていることがこのグラフからわかる。

図2の下側に DE 点の位置をプロットした。これからも二重指数変換に基づく標本点が端点に集積していることがわかる。

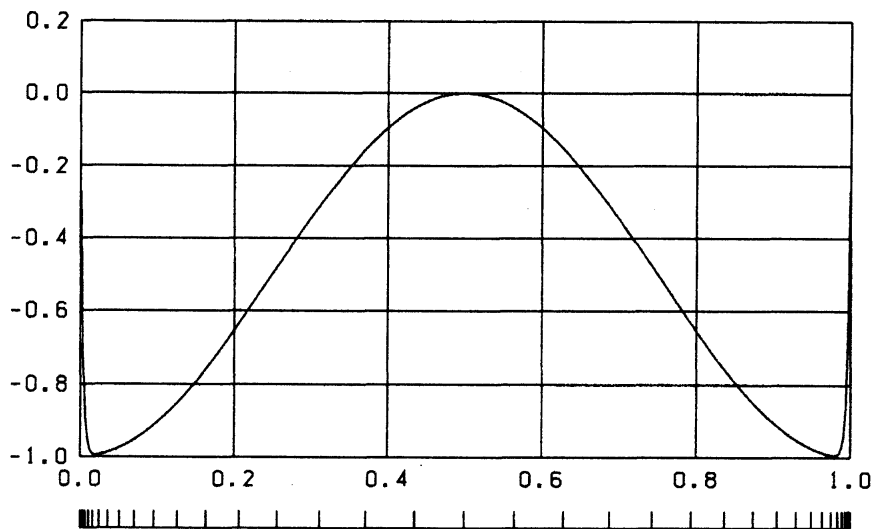


図 2: $\varepsilon = 10^{-5}$ および $h = 0.08$ の場合の (6.3) の DE Sinc-Galerkin 法による数値解

われわれは (6.3) と同じ問題で $\varepsilon = 10^{-5}$ とした場合について、一重指数変換に基づく Sinc-Galerkin 法、すなわち SE Sinc-Galerkin 法によって数値解を計算してみた。その際、 $d = \pi/2$, $n = 100$ と選び、[1] に従って $h = \pi/\sqrt{n}$ としてあとは SE Sinc-Galerkin 法の伝統的な手順に従った。結果をやはり図3に (SE-Gal) として示してある。この図から、DE Sinc-Galerkin 法の収束の方が、SE Sinc-Galerkin 法の収束よりもずっと速いことがわかる。このことは (3.6) と (3.7) との比較で当然予想されたことである。

例 2 次の問題と数値結果は Liu and Xu [3] からとったものであり、伝統的な解法による最近の結果の一例である：

$$\begin{aligned} \varepsilon y''(x) - (2 + \sin x)y(x) &= f(x), \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

$f(x)$ は

$$y(x) = \exp(-x/\sqrt{\varepsilon}) + \exp(-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}) + x(1-x) - (1 + \exp(-1/\sqrt{\varepsilon})) \quad (6.6)$$

が真の解になるように選ぶものとする。この方程式は (1.1) で $a = 0$, $b = 1$, $\mu_1(x) = 0$, $\mu_0(x) = -(2 + \sin x)$ とした場合であり、(3.12) が $\alpha = 1$ とすれば満たされる。したがって、 $L_- = 1/\sqrt{\varepsilon}$, $L_+ = 1/\sqrt{\varepsilon}$ と選んだ。Liu and Xu は、この特異摂動問題を、解の特異

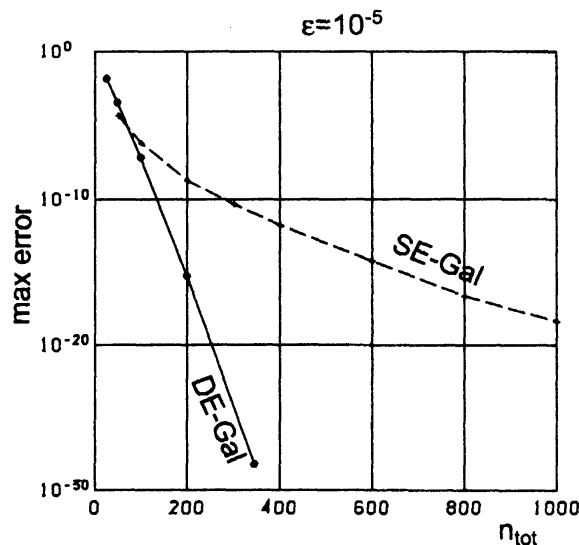


図 3: 例 1 で $\varepsilon = 10^{-5}$ とした場合の DE 変換と SE 変換による結果の比較

な挙動に適合するように節点を選ぶ Hermite スプラインに基づく Galerkin 法によって解いている。一方われわれは、同じ問題を標本点を DE 点に選ぶ DE Sinc-Galerkin 法によって解いた。その際、例 1 と同様の理由により、 $L_- = 1/\sqrt{\varepsilon}$, $L_+ = 1/\sqrt{\varepsilon}$ と置いた。

$\varepsilon = 1.456 \times 10^{-11}$ ($\sqrt{\varepsilon} = 3.816 \times 10^{-6}$) の場合について、われわれの方法による誤差 (DE-Gal) と、[3] の Table 3 にある Liu and Xu による誤差を直接コピーしたもの (Hermite splines) とを図 4 に示した。 n_{tot} は節点 (標本点) の総数であり、いまの場合 $t_- (= t_+)$ は 4.0494 である。図 4 に見るように、 n_{tot} が小さいうちは Liu and Xu による適合的に節点を選ぶ Hermite スプラインに基づく Galerkin 法の方が良い結果を与える。しかし、 n_{tot} が大きくなるに従って、われわれの方法が Liu and Xu の方法を追い越し、最後には誤差はずっと速く小さくなることがわかる。

例 3 最後の例は El-Gamel and Cannon [1] による半線形問題の例である。

$$\begin{aligned} \varepsilon y''(x) + 2y'(x) + y^2(x) &= (\exp(-x/\varepsilon) - 1/\varepsilon) \exp(-x/\varepsilon), \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 1, \quad y(1) = \exp(-1/\varepsilon) \end{aligned} \quad (6.7)$$

この問題の解は次のようになる。

$$y(x) = \exp(-x/\varepsilon) \quad (6.8)$$

この問題は半線形であるだけでなく、境界条件が両端点で 0 になっていない。DE Sinc 法を使うためには、この問題を両端点で 0 という境界条件の問題に変形しなければならない。この例では、次のような 1 次関数を定義する。

$$s(x) = (\exp(-1/\varepsilon) - 1)x + 1 \quad (6.9)$$

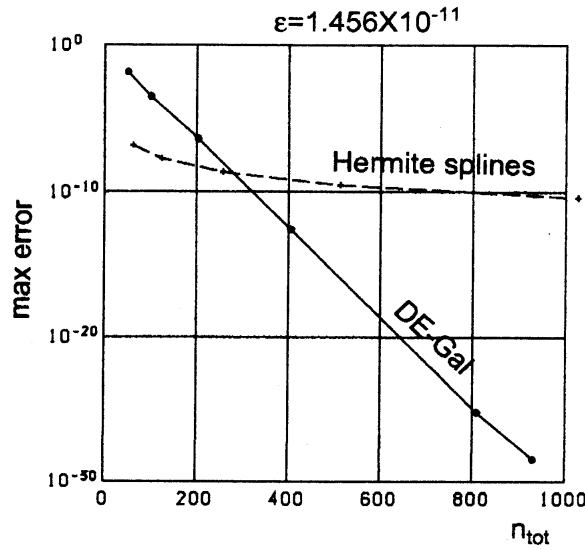


図 4: DE Sinc-Galerkin 法と適合的に節点を選ぶ Hermite スプラインに基づく Galerkin 法の例 2 における比較

この関数は両端点で 0 という条件を満たす. そして,

$$u(x) = y(x) - s(x) \quad (6.10)$$

と置く. この変換を行うと, 関数 $u(x)$ は

$$\begin{aligned} \varepsilon u''(x) + 2u'(x) + u^2(x) + 2((\exp(-1/\varepsilon) - 1)x + 1)u(x) &= f(x), \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

を満たすことがわかる. ただし, $f(x)$ は

$$u(x) = \exp(-x/\varepsilon) - (\exp(-1/\varepsilon) - 1)x - 1 \quad (6.12)$$

が真の解になるように選ぶものとする. 方程式 (6.11) を $u(x)$ について数値的に解き, (6.10) の $u(x)$ をこの数値解で置き換えれば, (4.17) の近似解 $\tilde{y}_{n_{\text{tot}}}(x)$ を得る.

いま, $\mu_2(x) = \varepsilon$ である方程式 (5.1) において, μ_1 と $F[x, u]$ が

$$0 < \alpha \leq \mu_1(x) \quad (\alpha > 0), \quad 0 \leq F_u \leq \beta(x) \quad (6.13)$$

を満たしているとする. このとき, [10] によれば, 両端点で 0 という境界条件を満たす解 $u(x)$ には左側の端点 $x = 0$ にのみ境界層が現れ, その境界層における解の支配的な項 $u_-(x)$ は

$$|u(x)| \approx |u_-(x)| \leq \hat{u}_-(x), \quad \hat{u}_-(x) = C_- \left| \exp\left(-\alpha \frac{x}{\varepsilon}\right) - 1 \right|. \quad (6.14)$$

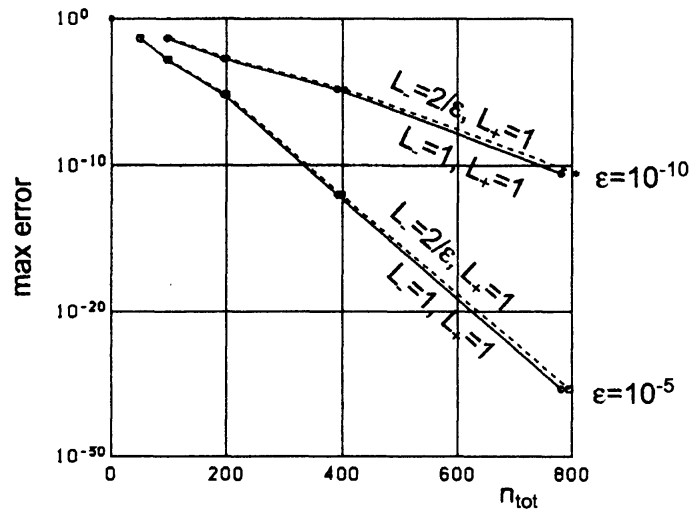


図 5: 半線形問題 (6.11) の近似解の誤差

のように $\hat{u}_-(x)$ によって上から抑えられることが知られている。右端点は通常の零点である。

ここで考えている方程式 (6.11) は (5.1) で $a = 0, b = 1, \mu_2(x) = \varepsilon, \mu_1(x) = 2, F[x, u] = u^2 + 2((\exp(-1/\varepsilon) - 1)x + 1)u$ と置いたものであるから、 $\alpha = 2$ とすれば (6.13) が満たされる (真の解 (6.12) はわかっているとして)。そこで、 $L_- = 2/\varepsilon, L_+ = 1$ と選んだ。一方、この例では、 $L_- = 1, L_+ = 1$ と選んだ場合についても数値解を計算してみた。後者の場合、標準的な境界値問題の方程式 (5.2) において単に $\mu_2(x) = \varepsilon$ と置いた以外 ε が小さいということについてはとくに何も考慮しなかった。 $L_- = \alpha/\varepsilon$ ($\alpha = 2$), $L_+ = 1$ と選んだ場合の数値解における t_- および t_+ の値を表 2 に示した。一方、 $L_- = 1, L_+ = 1$ と選んだ場合には $t_- = t_+ = 3.9004$ となる。

表 2: 例 3 の半線形問題における t_- および t_+

ε	10^{-10}	10^{-5}
t_-	4.1670	4.0464
t_+	3.9004	3.9004

非線形連立代数方程式 (5.2) を解くために、Newton 法を利用した。ただし、初期値としては両端点で 0 という境界条件を満たす 1 次関数 $u^{(0)}(x) \equiv 0$ を採用したが、いずれの ε の場合にも Newton 法は最大 5 回の反復で収束した。

図 5 に、 $\varepsilon = 10^{-10}$ および 10^{-5} の場合について、変形した問題 (6.11) の数値解の誤差 $E_{\max}$ を示した。実線は $L_- = 1, L_+ = 1$ と選んだ場合の誤差で、一方点線は $L_- = 2/\varepsilon, L_+ = 1$ と選んだ場合の誤差を示す。図 5 から、 $L_- = 1, L_+ = 1$ とする方が $L_- = 2/\varepsilon, L_+ = 1$ とするよりもわずかに高い精度の結果が得られることがわかるが、両者の差は 3 節で述べたようにきわめて小さい。

参考文献

- [1] M. El-Gamel, J. R. Cannon, On the solution a of second order singularly-perturbed boundary value problem by the Sinc-Galerkin method, *Z. angew. Math. Phys.* 56 (2005) 45–58.
- [2] G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, C. B. Moler, *Computer Method for Mathematical Computations*, Prentice-Hall, 1977.
- [3] Liu, Song-Tao, Xu, Yuesheng, Galerkin methods based on Hermite splines for singular perturbation problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 43 (2006) 2607–2623.
- [4] J. Lund, K. L. Bowers, *Sinc Methods for Quadrature and Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [5] M. Muhammad, M. Mori, Double exponential formulas for numerical indefinite integration, *J. Comput. Appl. Math.* 161 (2003) 431–448.
- [6] M. Mori, M. Sugihara, The double exponential transformation in numerical analysis, in: *Numerical Analysis in the 20th century Vol. V*, W. Gautschi, F. Marcella'n, L. Reichal (Eds), *Quadrature and Orthogonal Polynomials*, *J. Comput. Appl. Math.* 127 (2001) 287–296.
- [7] A. Nurmuhammad, M. Muhammad, M. Mori, M. Sugihara, Double exponential transformation in the Sinc-collocation method for a boundary value problem with fourth-order ordinary differential equation, *J. Comput. Appl. Math.* 182 (2005) 32–50.
- [8] A. Nurmuhammad, M. Muhammad, M. Mori, Sinc-Galerkin method based on the DE transformation for the boundary value problem of fourth-order ODE, *J. Comput. Appl. Math.* 206 (2007) 17–26.
- [9] R. E. O'Malley, Jr., *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences 89, Springer-Verlag, 1991.
- [10] I. Radeka, D. Herceg, High-order methods for semilinear singularly perturbed boundary value problems, *Novi Sad J. Math.* 33 (2003) 139–161.
- [11] H.-G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska, *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations, Convection-Diffusion and Flow Problems*, Springer Series in Computational Mathematics 24, Springer 1996.
- [12] F. Stenger, *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1993.
- [13] M. Sugihara, Optimality of the double exponential formula — functional analysis approach — , *Numer. Math.* 75 (1997) 379–395.

- [14] M. Sugihara, Double exponential transformation in the Sinc-collocation method for two-point boundary value problems, *J. Comput. Appl. Math.* 149 (2002) 239–250.
- [15] M. Sugihara, Near optimality of the Sinc approximation, *Math. Comput.* 72 (2003) 767–786.
- [16] H. Takahasi, M. Mori, Double exponential formulas for numerical integration, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 9 (1974) 721–741.