

多孔質弾性体と流体の連成解析

金沢大学・数物科学類 岩崎宏 (Hiroshi Iwasaki)
Faculty of Mathematics and Physics,
Kanazawa University

概要

飽和した多孔質弾性体と流体の連成解析にむけて、方程式系の導出を紹介し、飽和した多孔質弾性体の準定常モデルである quasi-static Biot 方程式の数値計算結果を示し、問題点を考察した。

1 はじめに

人体は脳や血管といった様々な柔構造から構成されており、動脈硬化・動脈瘤などの疾病や、脳挫傷・網膜剥離などの損傷の治療・対策・予防には、柔構造の力学の理解は欠かせない。しかし、人体を構成する柔構造においては水分の影響が重要であるにもかかわらず、従来の研究は柔構造の力学的構造を粘弾性体として解析するものが多く、水分と柔構造の相互作用:「柔構造が膨潤すると形が変わり、柔構造を変形させると水分が外部に滲み出る。」を考慮した研究は少ない。

本研究は人体をなす柔構造を流体を含んだ多孔質粘弾性体ととらえ、流体と柔構造から成る系の動力学性質を数値シミュレーションで調べることを目的とする。特に、脳挫傷や脳浮腫の形成機序の解析が目標である。

頭部に衝撃を受けて脳が損傷する脳挫傷には、打撃部位直下の脳組織に損傷が起きる場合と、打撃部位の反対側(反衝側)の脳組織に損傷が起きる場合がある。前者を直撃損傷(coup injury)、後者を反衝損傷(contrecoup injury)という。頭蓋の骨折を伴わない場合これらの損傷は頭蓋との衝突で発生するものでないことが知られている。特に、反衝損傷の機序はよくわかっていない。

そこで、本研究では水分と柔構造の相互作用という観点から、従来の脳挫傷のモデルでは脳組織の圧縮性と捉えていた応答を、脳の間質液の脱水・吸水と捉えることで、新たな視点が得られるのではないかと考える。具体的には、頭蓋と脳と脳脊髄液からなる系をモ

デル化した「容器に封入された流体に飽和した多孔質弾性体が浮かんでいる。容器に衝撃を与えたとき、流体を介して多孔質弾性体内部にどのような応力が発生するか。」という問題を解析することで、反衝損傷などの損傷が起こる機序を明らかにしたいと考える。

そのためには、飽和した多孔質弾性体と流体が連成する系の物理モデルが必要である。しかし、飽和した多孔質弾性体は変形しながら吸水・脱水を行うので、多孔質弾性体と流体との界面における境界条件は複雑なものになる [9]。さらに安定化手法や移動境界の取り扱いまで考えなければならず、残念ながら今回は流体との連成まで取り扱うことができなかった。

そこで、題目と違う形になってしまうが、飽和した多孔質弾性体単独の場合の方程式系を紹介し、そのシミュレーション例を提示する。

2 方程式系の導出

2.1 基本的な系

バロトロピック・ニュートン流体は Navier-Stokes 方程式、質量保存則および状態方程式で記述される。

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \eta' \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}), \\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right) &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \left(\text{or } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \right), \\ \rho &= \rho(p).\end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{v}, p, \rho$ は流体の速度、圧力、密度を表す未知数であり、 η, η' は粘性率を表す。圧縮性が小さくレイノルズ数が低い流れに対しては、非線形項である移流項を取り除き、密度を圧力の一次の項まで展開することで、速度と圧力が未知数である線形方程式系、

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \eta' \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (2.2)$$

$$\rho_0 = \rho(p_0), \quad \frac{1}{K_f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \bigg|_{p_0}, \quad (2.3)$$

が得られる。これを Stokes 系と呼ぶ。なお、第 2 式は質量保存則であり、 K_f は流体の体積弾性率である。

固体として代表的な弾性体の支配方程式は、 $\mathbf{u}$ を変位ベクトル、 μ, λ を Lamé 定数、 $\hat{\sigma}$ を応力テンソル、 $\hat{\varepsilon}$ を歪テンソルとして、

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \hat{\sigma} = 0, \quad (2.4)$$

$$\hat{\sigma} = 2\mu \hat{\varepsilon} + \lambda(\hat{\mathbf{1}} : \hat{\varepsilon})\hat{\mathbf{1}}, \quad (2.5)$$

$$\hat{\varepsilon} = \{(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T\}/2, \quad (2.6)$$

で表せる。第 1 式は Navier の式であり、第 2 式は Hooke 則である。この系を Navier 系と呼ぶ。

2.2 Darcy 系

固体には多孔質という空隙を持つ骨材からなる物質もある。空隙に流体が充満した多孔質を「飽和した多孔質」と呼ぶ。飽和した多孔質の外部に圧力差を加えると流体が多孔質を浸透する現象が知られており、浸透速度 $\mathbf{q}$ が圧力勾配に比例するという Darcy 則

$$\mathbf{q} + \frac{k}{\eta} \nabla p = 0, \quad (2.7)$$

は有名である。ここで、 k は浸透率、 η は流体の粘性率である。空隙中の流れは低レイノルズ数のバロトロピック流体で表されると考えられる。空隙の体積比率 (porosity) を ϕ 、空隙中の流体の速度を $\mathbf{v}$ とすると、浸透速度 $\mathbf{q}$ は porosity と空隙中の流体の速度の積

$$\mathbf{q} = \phi \mathbf{v}, \quad (2.8)$$

で表せるので、空隙中の流体の質量保存則

$$\frac{\partial(\phi \rho_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \rho_f \mathbf{v}) = 0,$$

から $\mathbf{q}$ による移流項を無視して得られる近似式

$$\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial(\phi \rho_f)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (2.9)$$

に密度のテーラー展開を適用すると、空隙率は一定であるから、質量保存則

$$\frac{\phi}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0,$$

がえられる。

以上により，飽和した多孔質系を記述する方程式系

$$\mathbf{q} + \frac{k}{\eta} \nabla p = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\phi}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (2.11)$$

がえられる．この方程式系のことを Darcy 系と呼ぶ．

2.3 Biot 系

多孔質弾性体とは，多孔質を作る骨材が弾性体であり，さらに，流体と骨材との相互作用を考慮したシステムである．飽和した多孔質弾性体を記述する方程式系は，Darcy 系と Navier 系を合わせたものに骨材と流体との相互作用項を加えた形になっている．これを Biot 系と呼ぶ [2]．Biot 系の導出は以下のとおりである [3][8][5]．

骨材に外力がなす仕事を考える．このとき，空隙中の流体が骨材に及ぼす圧力のなす仕事も考慮されるので，単位体積あたりの仕事において共役な対は応力テンソルとひずみテンソルの対 $(\hat{\sigma}, \hat{\varepsilon})$ の他に，圧力と空隙率の対 (p, ϕ) もある．これらのなす微小仕事が全微分であると仮定すると，骨材の変形に対する単位体積あたりの自由エネルギー

$$\Psi_s = \Psi_s(\hat{\varepsilon}, \phi), \quad (2.12)$$

$$d\Psi_s = \hat{\sigma} : d\hat{\varepsilon} + p d\phi, \quad (2.13)$$

が存在する．変数変換

$$G_s = \Psi_s - p\phi, \quad (2.14)$$

$$G_s = G_s(\hat{\varepsilon}, p); \hat{\sigma} = \frac{\partial G_s}{\partial \hat{\varepsilon}}(\hat{\varepsilon}, p); \phi = -\frac{\partial G_s}{\partial p}(\hat{\varepsilon}, p), \quad (2.15)$$

により，以下の関係式

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} d\varepsilon_{kl} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial p} dp \\ &= \frac{\partial^2 G_s}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{kl} + \frac{\partial^2 G_s}{\partial p \partial \varepsilon_{ij}} dp, \\ d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial \phi}{\partial p} dp \\ &= -\frac{\partial^2 G_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial p} d\varepsilon_{ij} - \frac{\partial^2 G_s}{\partial p \partial p} dp, \end{aligned}$$

が得られる。ここで線形性を仮定すると、係数

$$C_{ijkl} \equiv \frac{\partial^2 G_s}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}}, \quad b_{ij} \equiv -\frac{\partial^2 G_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial p} = -\frac{\partial^2 G_s}{\partial p \partial \varepsilon_{ij}}, \quad \frac{1}{K_\phi} \equiv -\frac{\partial^2 G_s}{\partial p \partial p},$$

は定数であり、さらに多孔質弾性体が等方的ならば、対称性の議論により、

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \\ b_{ij} = B_w \delta_{ij},$$

となり、骨材における応力・空隙率の変形・圧力に対する依存性

$$d\hat{\sigma} = d\hat{\sigma}_s - B_w dp \hat{1}, \quad (2.16)$$

$$\hat{\sigma}_s \equiv \mu \{(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T\} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \hat{1},$$

$$d\phi = B_w \nabla \cdot d\mathbf{u} + \frac{1}{K_\phi} dp, \quad (2.17)$$

が得られる。ここで、 μ, λ は Lamé の係数、 B_w は Biot-Willis 係数 [3]、 K_ϕ は空隙の体積弾性率である。Biot-Willis 係数は流体と骨材の相互作用の強さを表す無次元量と考えられる。

多孔質空隙中の流体の質量保存則 (2.9) において、 ϕ が定数でないこと (2.17) と流体の圧縮性が小さいことを考慮すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial(\phi \rho_f)}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\phi}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} \\ &= \left(B_w \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{K_\phi} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\phi}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} \\ &\approx B_w \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(\frac{1}{K_\phi} + \frac{\phi_0}{K_f} \right) \frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned}$$

より、変形の寄与も考慮した空隙中の流体の質量保存則

$$\frac{1}{K'} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + B_w \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{K'} \equiv \frac{1}{K_\phi} + \frac{\phi_0}{K_f}, \quad (2.19)$$

が得られる。ここで、 ϕ_0 は圧力も応力もかからないときの空隙率、 K' は飽和した多孔質弾性体の体積弾性率を表す。また、Navier 系において Hooke 則 (2.5) を、圧力を考慮した Hooke 則 (2.16) に置き換えると、

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \hat{\sigma}_s + B_w \nabla p = 0, \quad (2.20)$$

$$\hat{\sigma}_s \equiv \mu \{(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T\} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \hat{1}, \quad (2.21)$$

が得られる.

以上の結果をまとめると Biot 系

$$\mathbf{q} + \frac{k}{\eta} \nabla p = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{K'} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + B_w \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \quad (2.23)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \hat{\sigma} + B_w \nabla p = 0, \quad (2.24)$$

$$\hat{\sigma} = \mu \{ (\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T \} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \hat{\mathbf{1}}, \quad (2.25)$$

が導かれる. Biot 系は Darcy 系と Navier 系を合わせた形をしており, 下線部があらたに付け加えられた相互作用の項である. $B_w \nabla \cdot \mathbf{u}$ は骨材の変形により生じた流体の体積変化を表し, $B_w \nabla p$ は流体の圧力が骨材に及ぼす力を表す. 二つの項の係数が同じ B_w であることは, 弾性体にかけられた応力のなす微小仕事と空隙を介してかけられた圧力のなす微小仕事の和が, 順番によらず等しいことと同値である.

最後に quasi-static Biot 系を紹介する. 脳浮腫のように数時間のオーダーでゆっくりと脳組織の膨潤が起こる現象を記述したいときは, 慣性 ρ と圧縮性 $1/K'$ を無視できる近似を適用してもよい. そのような近似をした系を quasi-static Biot 系と呼ぶ.

$$\mathbf{q} + \frac{k}{\eta} \nabla p = 0, \quad (2.26)$$

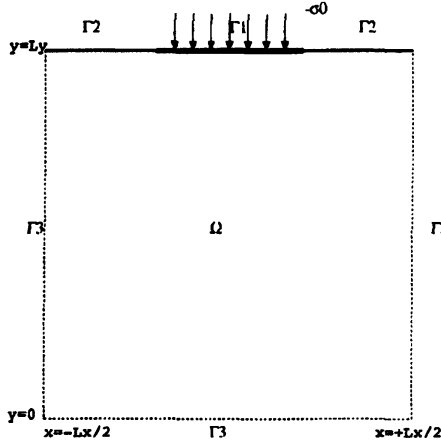
$$\nabla \cdot \mathbf{q} + B_w \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \quad (2.27)$$

$$-\nabla \cdot \hat{\sigma} + B_w \nabla p = 0, \quad (2.28)$$

$$\hat{\sigma} = \mu \{ (\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T \} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \hat{\mathbf{1}}. \quad (2.29)$$

3 quasi-static Biot 系の数値計算

quasi-static Biot 系の数値計算例として, 飽和した多孔質弾性体を「ゆっくりと踏みつける」ときの挙動を考える. 図 1 に示した長方形型の領域 Ω に多孔質弾性体がある場合を考える.



$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{ (x, y) \mid |x| < \frac{L_x}{2}, 0 < y < L_y \right\}, \\ \Gamma_1 &= \left\{ (x, y) \in \partial\Omega \mid |x| \leq \frac{L_x}{5}, y = L_y \right\}, \\ \Gamma_2 &= \left\{ (x, y) \in \partial\Omega \mid |x| > \frac{L_x}{5}, y = L_y \right\}, \\ \Gamma_3 &= \partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2).\end{aligned}$$

図 1

長方形型の多孔質弾性体が下部および側面を浸透性ある壁に固定され、上部は開放され、上部中央に応力を与える境界条件を考えると以下のようなになる。

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{x}, t) &= 0 & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \\ \sigma_{yy}(\boldsymbol{x}, t) &= -\sigma_0 & \boldsymbol{x} \in \Gamma_1, \\ \sigma_{yy}(\boldsymbol{x}, t) &= 0 & \boldsymbol{x} \in \Gamma_2, \\ \sigma_{xy}(\boldsymbol{x}, t) &= 0 & \boldsymbol{x} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ u(\boldsymbol{x}, t) &= 0 & \boldsymbol{x} \in \Gamma_3,\end{aligned}$$

また、初期条件は

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{x}, t = 0) &= 0 & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u(\boldsymbol{x}, t = 0) &= 0 & \boldsymbol{x} \in \Omega,\end{aligned}$$

である。パラメーターは

$$\begin{aligned}L_x &= L_y = 1, \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad E = 3, \quad \nu = 0.2, \\ k &= \eta = B_w = 1, \quad \sigma_0 = 1,\end{aligned}$$

であり、圧力・変位ともに空間刻み 100×100 のレギュラーメッシュを使って空間差分し、時間方向に陰的 Euler 法を使って数値計算を行った。

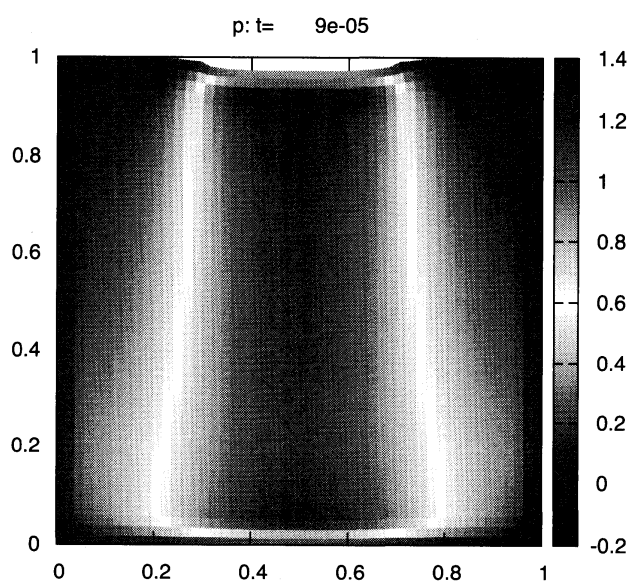


図 2

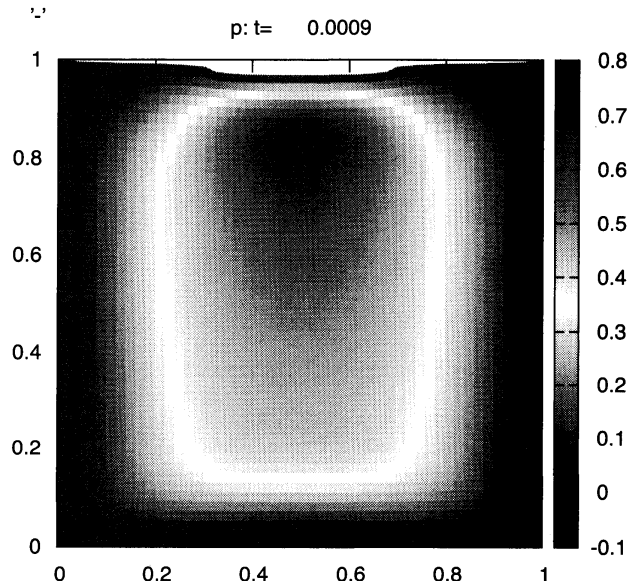


図 3

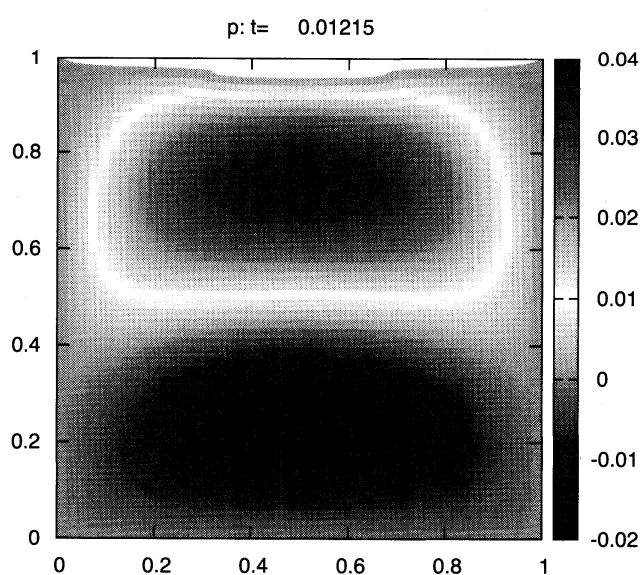


図 4

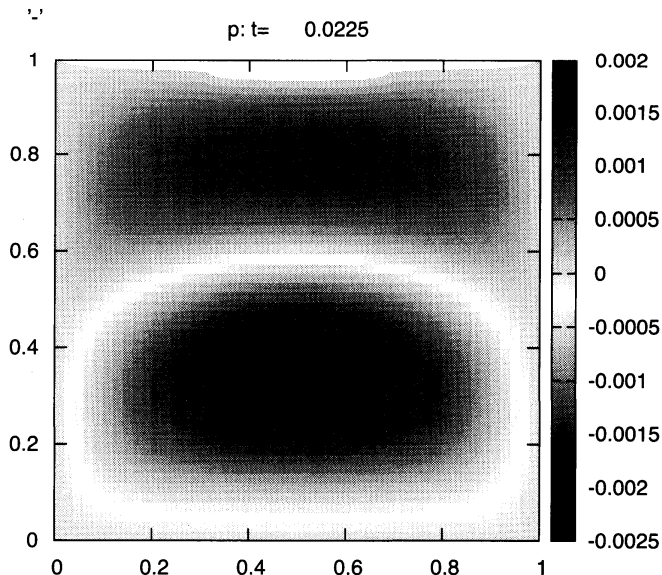


図 5

上部を「踏みつける」ことで空隙が圧縮され、それに伴い圧力が上昇し、その後、周囲に脱水することで圧力が減少していくことが見られる。しかし、微小であるが負の圧力という非物理的振る舞いが見られる。浸透流は圧力勾配に比例することから、圧力の極小値近辺は膨潤を表す。つまり、図 4・図 5 は、踏みつけているにもかかわらず膨潤が発生していることを示している。この問題は次章で考察する。

4 考察

前章の数値計算では本来発生しない負の圧力が発生したが，これは圧力場をレギュラーメッシュで差分することで発生した非物理的圧力振動である．有限要素法においても非物理的圧力振動が発生することが報告されている [6]．

粘性流体の有限要素法でも同様な問題があり，LBB(Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi) 条件あるいは sup-inf 条件「粘性流体の流れの有限要素法による解析では，圧力の近似関数の次数は速度の近似関数の次数よりも少なくとも 1 次低くなければならない」を破ると圧力場に非物理的な振動が発生することが知られている [4][7]．

今回の多孔質弾性体における非物理的振る舞いの原因も本質的に同じである．

この問題を解決するには 2 種類の方法がある．ひとつは，速度と圧力に対して異なる次数の形状関数を用いる「混合補間法」，あるいは差分法の場合はスタガードメッシュの採用，であり，もうひとつは，付加項を方程式に加えることで，速度と圧力が同じ次数の形状関数を用いたときの不安定を抑制する「安定化有限要素法」である．前者は格子生成が煩雑であるが多くの研究が行われている．また，後者は形状関数は単純であるが刻み幅に依存した付加項を加えなければならず，境界条件も変わってしまうという問題がある．

ストークス流と飽和した多孔質弾性体の連成解析を行うには，それぞれのサブシステムで LBB 条件を満足させなければいけない．どのような手法をとるのが有効か，先行研究 [1] などを参考に連成解析ソルバーを開発したい．

参考文献

- [1] S. Badia, A. Quaini and A. Quarteroni, “Coupling Biot and Navier–Stokes equations for modelling fluid–poroelastic media interaction”, J. Comput. Phys., **228** (2009) 7986–8014.
- [2] M. A. Biot, “General Theory of three-dimensional consolidation”, J. Appl. Phys., **12** (1941) 155–164.
- [3] M. A. Biot and D. G. Willis, “The elastic coefficients of the theory of the consolidation”, J. Appl. Mech., **24** (1957) 594–601.
- [4] F. Brezzi and J. Douglas, Jr., “Stabilized mixed methods for the Stokes problem”, Numer. Math., **53** (1988) 225–235.
- [5] O. Coussy, “Poromechanics”, John Wiley & Sons, 2004.

- [6] M. A. Murad and A. F. D. Loula, "*On stability and convergence of finite element approximation of Biot's consolidation problem*", Internat. J. Numer. Methods Engrg., **37** (1994) 645-667.
- [7] 中山司, 「流れ解析のための有限要素法入門」, 東京大学出版会, 2008.
- [8] J. R. Rice and M. P. Cleary, "*Some basic stress-diffusion solutions for fluid saturated elastic porous media with compressible constituents*", Rev. Geophys. Space Phys., **14** (1966) 226-241.
- [9] R. E. Showalter, "*Poroelastic filtration coupled to Stokes flow*", Published in "*Control Theory of Partial Differential Equation*", Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **242** (2005) 229-241.