

平面代数曲線、点集合のホモトピー型

東大 理 坂本幸一

$C \subset \mathbb{P}^2$ を degree n の平面代数曲線とする。 C の singular set ΣC は ordinary double points だけからなるとする。このとき $\mathbb{P}^2 - C$ の homotopy type を求めたい。

まず、A. Hattori および T. Nakamura による次の結果がある。

定理 1 $L = \bigcup_{i=1}^k L_i \subset \mathbb{C}^N$ とする。但し、 L_i は $\mathbb{C}^N$ の general position にある超平面とする。そのとき $\mathbb{P}^N - L$ の homotopy type は次のようになる。

$$\mathbb{P}^N - L \simeq [\underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_k]^{(N)}.$$

$$\text{但し、 } [\underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_k]^{(N)} = \bigcup_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} \{(x_1, \dots, x_k) \in S^1 \times \cdots \times S^1 \mid j \notin \{i_1, \dots, i_k\} \Rightarrow x_j = 1\}$$

とくに $C = L = \bigcup_{i=1}^n L_i$ が $\mathbb{P}^2$ の general position にある n 本の lines の union ならば $\mathbb{P}^2 - L \simeq [\underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n-1}]^{(2)}$ である。

定義 C_0, C_1 を ordinary double point のみを特異点として
 持つ、 n 次曲線とする。 C_0 と C_1 とを結ぶ曲線の連続な族
 $\{C_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ が次の条件をみたすとき、 $\{C_t\}$ は C_0 から C_1
 への deformation である、あるいは、 C_0 は C_1 に deform される
 と言おう。

- $\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ 各 } \Sigma C_t \text{ は ordinary double points のみからなる。} \\ (2) \# \Sigma C_t = \text{constant for } 0 < t \leq 1. \end{array} \right.$

(注. 明らかにこのとき、 $\# \Sigma C_0 \geq \# \Sigma C_1$.)

n 次曲線に対し、その定義多項式が定数倍を除いて一意
 に対応する。3変数 n 次の単項式は $\frac{n^2+3n+2}{2}$ 個 あるから、
 n 次曲線は $\mathbb{P}^N$ ($N = \frac{n(n+3)}{2}$) の一点に対応する。点 a
 $\in \mathbb{P}^N$ に対応する curve を $C(a)$ とすると、

$$\begin{aligned}
 H &= \bigcup_{a \in \mathbb{P}^N} a \times C(a) \\
 &= \left\{ (a, p) \in \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^2 \mid \begin{array}{l} a = (a_{ijk}), p = (x, y, z) \\ f(a, p) = \sum_{i+j+k=n} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

は $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^2$ の smooth な algebraic subset である。 $\pi: H \rightarrow \mathbb{P}^N$
 を、自然な projection とする。上の定義は次の statement と同値
 である:

irreducible algebraic set $\Lambda \subset \mathbb{P}^N$ とその alg. subset Σ
 が存在して、 $\pi: \pi^{-1}(\Lambda - \Sigma) \rightarrow \Lambda - \Sigma$ は smooth な fiber
 bundle になり、 C_1 には $\Lambda - \Sigma$ の点に対応し、 C_0 には Λ の点

が対応する。とくに $\# \Sigma C_0 > \# \Sigma C_1$ ならば C_0 は Σ の実
が対応する。つまり、 C_0 は $\Lambda - \Sigma$ に属する curves の“極限”
である。

Prop. 1. C_0 が C_1 に deform されるとき、

$$\mathbb{P}^2 - C_1 \simeq (\mathbb{P}^2 - C_0) \vee e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_s.$$

但し、 $s = \# \Sigma C_0 - \# \Sigma C_1$ 、 e_i は $\mathbb{P}^2 - C_0$ に attach される 2
cell である。

$C = \bigcup_{i=1}^k C_i$ とする。ここで C は n 次平面代数曲線、 ΣC は
 r 個の ordinary double point よりなる。 C_i は C の既約成分で
 $\deg C_i = n_i$ ($\sum n_i = n$) とする。また $L = \bigcup_{i=1}^r L_i$ を general
position にある $\mathbb{P}^2$ の lines の合併とする。

定理 2 $\exists n_i \geq 2$ とする。 L が C に deform されるとき

$$\mathbb{P}^2 - C \simeq M(n_1, \dots, n_k) \vee \underbrace{S^2 \vee S^2 \vee \dots \vee S^2}_v.$$

但し、 $M(n_1, \dots, n_k) = [\underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_k]^{(2)} \vee e$ 、 e は 2 cell で
attaching map は

$$[\partial e] = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z} = \pi_1([S^1 \times \dots \times S^1]^{(2)})$$

で代表されるものとする。また

$$v = (n-1)(n-2) - r - \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

これは、定理1及びProp1の C_i のattaching mapを詳しく調べることによって得られる。

系 (Zariski) 同じ仮定の下で

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathbb{P}^2 - C) &= (\mathbb{Z} + \underbrace{\cdots + \mathbb{Z}}_k) / (n_1, \dots, n_k) \\ &= \underbrace{\mathbb{Z} + \cdots + \mathbb{Z}}_{k-1} + (\mathbb{Z} / \text{g.c.m.}(n_1, \dots, n_k)).\end{aligned}$$

次に、どんな C に対し、 L から C への deformation が存在するか、ということが問題になる。

定理3 次の場合に、 L から C への deformation が存在する。

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \# \Sigma C_i > \frac{(n_i-2)^2}{2} & (\text{Popp}) \\ \text{(ii)} \quad \# \Sigma C_i < \frac{3}{2} n_i \end{cases}$$

Severiによれば、algebraic set $\Lambda_r^n \subset \mathbb{P}^N$ と alg. subset $\Sigma \subset \Lambda_r^n$ が存在して、

$$\Lambda_r^n - \Sigma = \left\{ a \in \mathbb{P}^N \mid C(a) \text{ は既約で、} \Sigma C(a) \text{ は } r \text{ 個の ordinary double points よりなる。} \right\}.$$

定理3は次のProp.の系である。

Prop.2 $r > \frac{(n-2)^2}{2}$ あるいは $r < \frac{3}{2}n$ のとき、algebraic set Λ_r^n は既約である。

($r > \frac{(n-2)^2}{2}$ の場合は Popp に よる。)

定理 4 C を既約とし, ΣC は ordinary double points からなるとする。 $\pi = \pi_1(\mathbb{P}^2 - C)$ とし, $\pi' = [\pi, \pi]$, $\pi'' = [\pi', \pi']$ とすれば $\pi' = \pi''$ である。

これは, π' に対応する $\mathbb{P}^2 - C$ の covering space X に対し, $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$ をみたすことと同値である。 $D \in \text{non-singular}$ とすると, 明らかに C は D に deform される。
 $\mathbb{P}^2 - D$ の homotopy type は定理 2 より, $\mathbb{P}^2 - D \simeq M(n) \vee S^2 \vee \dots \vee S^2$, また Prop. 1 より, $\mathbb{P}^2 - D \simeq (\mathbb{P}^2 - C) \vee e_1 \vee \dots \vee e_r$ 。
 これらの事実と, e_i の attaching map と詳しく調べることに
 より, $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$ が得られる。