

コホモロジーの自己同型の実現について

東工大理 岩佐純巨 (Junkyo Iwasa)

§0. 序 M を向きづけられた可微分(C^∞)閉多様体とする。 M のコホモロジー環の自己同型写像 (graded ring automorphisms) 全体のなす群を $\text{Aut } H^*(M)$ と表す。また, M の向きを保つ自己ホモトピー同値写像全体のなす群を $\mathcal{E}(M)$ とし, それらの中で PL-同相写像にホモトピックなもの全体のなす部分群を $\mathcal{E}_{PL}(M)$ とする。 $\Phi: \mathcal{E}(M) \rightarrow \text{Aut } H^*(M)$ は, $f: M \rightarrow M$ に対して, その誘導写像 $f^*: H^*(M) \rightarrow H^*(M)$ を対応させる準同型とする。

ここでは, M が $2m$ 球面上の $2m$ 球面バンドルの 2 つの連結和の場合について, $\text{Aut } H^*(M)$, $\Phi(\mathcal{E}_{PL}(M))$, $\Phi(\mathcal{E}(M))$ の群構造に関する計算結果を報告する。

定理. B_{α_i} を特性類 (characteristic element) $\alpha_i \in \pi_{2m-1}(SO_{2m+1})$ をもつ $2m$ 球面上の $2m$ 球面バンドル ($i=1, 2$) とし, $M = B_{\alpha_1} \# B_{\alpha_2}$ とする。 $m \neq 1, 2, 4$ と仮定する。

$$(1) \quad \text{Aut } H^*(M) \cong \left\{ \frac{GL_2(\mathbb{Z}) \times GL_2(\mathbb{Z})}{\mathbb{Z}_2} \right\} \times_{\neq} \mathbb{Z}_2 \quad (\text{半直積}).$$

(2) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ の場合,

$$\Phi(\mathcal{E}_{PL}(M)) \cong \Phi(\mathcal{E}(M)) \cong \left\{ \frac{SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})}{\mathbb{Z}_2} \right\} \times_{\phi} (\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2) \quad (\text{半直積})$$

(3) $m \equiv 1 \pmod{4}$, $m \neq 1$ で, $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ の場合,

$$\Phi(\mathcal{E}_{PL}(M)) \cong \Phi(\mathcal{E}(M)) \cong \left\{ \frac{\mathcal{C}(2, 1) \times \mathcal{C}(2, 1)}{\mathbb{Z}_2} \right\} \times_{\phi} (\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2) \quad (\text{半直積})$$

$$\text{ここに, } \mathcal{C}(2, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{2} \right\}.$$

(4) $m \equiv 0, 2 \pmod{4}$, $m \neq 2, 4$ で, $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ の場合,

$$\Phi(\mathcal{E}_{PL}(M)) \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times_{\phi} (\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2) \quad (\text{半直積}).$$

§1. 準備 M を $(n-1)$ 連結 $2n$ 次元閉多様体とする (多様体は, 向きづけられた可微分 C^∞ なものを考える)。

$\lambda: H_n(M) \times H_n(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ を intersection pairing, $\alpha: H_n(M) \rightarrow \pi_{n-1}(SO_n)$ を, $x \in H_n(M)$ に対して, それを表現する embedded sphere $S^n \subset M$ の normal bundle の特性類 (characteristic element) を対応させる写像とする。Wall [4] により, 次の結果が示されている:

M' をもう一つの $(n-1)$ 連結 $2n$ 次元閉多様体とし, $\lambda': H_n(M') \times H_n(M') \rightarrow \mathbb{Z}$, $\alpha': H_n(M') \rightarrow \pi_{n-1}(SO_n)$ を同様に定義する。

命題 1.1 (Wall). $n \geq 3$ とするとき,

(i) 同型 $h: H_n(M) \rightarrow H_n(M')$ で, 次の図式を可換にするもの

が存在するとき，そのときに限り，（向きを保つ）PL-同相写像 $f: M \rightarrow M'$ で， $f_* = h$ を満たすものが存在する；

$$\begin{array}{ccc} H_n(M) \times H_n(M) & \xrightarrow{h \times h} & H_n(M') \times H_n(M') \\ \lambda \searrow & & \swarrow \lambda' \\ & \mathbb{Z} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H_n(M) & \xrightarrow{h} & H_n(M') \\ \alpha \searrow & & \swarrow \alpha' \\ & \pi_{n-1}(SO_n) & \end{array}$$

(ii) 同型 $h: H_n(M) \rightarrow H_n(M')$ で，次の図式を可換にするものが存在するとき，そのときに限り，（向きを保つ）ホモトピー同値写像 $f: M \rightarrow M'$ で， $f_* = h$ を満たすものが存在する；

$$\begin{array}{ccc} H_n(M) \times H_n(M) & \xrightarrow{h \times h} & H_n(M') \times H_n(M') \\ \lambda \searrow & & \swarrow \lambda' \\ & \mathbb{Z} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H_n(M) & \xrightarrow{h} & H_n(M') \\ J\alpha \searrow & & \swarrow J\alpha' \\ & \pi_{2n-1}(S^n) & \end{array}$$

ここに， $J: \pi_{n-1}(SO_n) \rightarrow \pi_{2n-1}(S^n)$ は， J -homomorphism。

M の不変量 $\lambda: H_n(M) \times H_n(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ ， $\alpha: H_n(M) \rightarrow \pi_{n-1}(SO_n)$ の間には，次の関係が成り立つ：

$$(1) \quad \lambda(x, x) = p_* \alpha(x)$$

$$(2) \quad \alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y) + \lambda(x, y) \partial l_n$$

ここに， $p_*: \pi_{n-1}(SO_n) \rightarrow \pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ は，fibration $SO_n \rightarrow S^{n-1} = SO_n / SO_{n-1}$ の射影の誘導写像， $\partial: \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(SO_n)$ は，fibration $SO_{n+1} \rightarrow S^n = SO_{n+1} / SO_n$ のホモトピー完全系列における境界準同型， $l_n \in \pi_n(S^n)$ は orientation generator を表す。

n が偶数のとき, suspension $S: \pi_{n-1}(SO_n) \rightarrow \pi_{n-1}(SO_{n+1}) \cong \pi_{n-1}(SO)$ に対して,

$$S \oplus p_*: \pi_{n-1}(SO_n) \rightarrow \pi_{n-1}(SO) \oplus \mathbb{Z}$$

は単射であるから, 命題1.1の(i)において, α のかわりに

$$\hat{\alpha} = S\alpha: H_n(M) \rightarrow \pi_{n-1}(SO)$$

を用いることができる。また, 図式

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_{n-1}(SO_n) & \xrightarrow{S} & \pi_{n-1}(SO_{n+1}) \\ & \nearrow \partial & \downarrow J & & \downarrow J^0 \\ \pi_n(S^n) & & & & \\ & \searrow p & \pi_{2n-1}(S^n) & \xrightarrow{E} & \pi_{2n}(S^{n+1}) \end{array}$$

を考えることにより, 命題1.1の(ii)において, $J\alpha$ を $J^0\hat{\alpha}$ におきかえることができる。明らかに, $\hat{\alpha}, J^0\hat{\alpha}$ は準同型である。

さて, $(n-1)$ 連結 $2n$ 次元閉多様体に対しては, $\text{Aut } H^*(M)$ と, n 次元ホモロジー群 $H_n(M)$ の自己同型写像で λ を保つもの全体とは同型である。また, 命題1.1より, $\phi(E_{PL}(M)), \phi(E(M))$ は $H_n(M)$ の自己同型写像で (λ, α) あるいは $(\lambda, J\alpha)$ を保つものとそれぞれ同型である。 n が偶数のとき, $\alpha, J\alpha$ を準同型 $\hat{\alpha}, J^0\hat{\alpha}$ におきかえることができる。

今, $H_n(M)$ の base $\{e_1, \dots, e_r\}$ を固定することにより, $H_n(M)$ の自己同型全体と $GL_r(\mathbb{Z})$ とを同一視し, λ を行列 $V = (\lambda(e_i, e_j))$ で表現することができる。また, 準同型 $\hat{\alpha}, J^0\hat{\alpha}$ もベクトル

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}(e_1) \\ \vdots \\ \hat{\alpha}(e_r) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} J^0 \hat{\alpha}(e_1) \\ \vdots \\ J^0 \hat{\alpha}(e_r) \end{pmatrix}$$

として表現できる。

$$\pi_{n-1}(SO) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{if } n \equiv 2 \pmod{8} \\ \mathbb{Z} & \text{if } n \equiv 0, 4 \pmod{8} \\ 0 & \text{if } n \equiv 6 \pmod{8} \end{cases}$$

$$\text{Im } J^0 \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{if } n \equiv 2 \pmod{8} \\ \mathbb{Z}_{m(\frac{n}{2})} & \text{if } n \equiv 0, 4 \pmod{8}, n \neq 4, 8 \\ 0 & \text{if } n \equiv 6 \pmod{8} \end{cases}$$

($m(\frac{n}{2})$ は $B_{\frac{n}{2}}/n$ の分母, $B_{\frac{n}{2}}$ は $\frac{n}{4}$ -th Bernoulli number) であるから, 代表元をとることにより, $\hat{\alpha}, J^0 \hat{\alpha}$ を表現するベクトルは整数を成分にもつとしてよい。

整数を成分にもつ行列 V 及びベクトル v に対して,

$$\tilde{A}(V) = \{ K \in GL_r(\mathbb{Z}) \mid KVK^t = \pm V \}$$

$$A(V) = \{ K \in GL_r(\mathbb{Z}) \mid KVK^t = V \}$$

$$A(V, v) = \{ K \in A(V) \mid Kv = v \}$$

$$A(V, v, m) = \{ K \in A(V) \mid Kv \equiv v \pmod{m} \}$$

とおく。以上のことから, 次の補題が得られる。

補題1.2. M を $(n-1)$ 連結 $2n$ 次元閉多様体とし, M の不変量 $\lambda: H_n(M) \times H_n(M) \rightarrow \mathbb{Z}$, $\hat{\alpha}: H_n(M) \rightarrow \pi_{n-1}(SO)$ を表現する行

列及びベクトルを V , v とする (n は偶数)。このとき, 次が成り立つ:

$$(i) \quad \text{Aut } H^*(M) \cong \tilde{A}(V)$$

$$(ii) \quad \Phi(\varepsilon_{PL}(M)) \cong \begin{cases} A(V, v, 2) & \text{if } n \equiv 2 \pmod{8} \\ A(V, v) & \text{if } n \equiv 0, 4 \pmod{8} \\ A(V) & \text{if } n \equiv 6 \pmod{8} \end{cases}$$

$$(iii) \quad \Phi(\varepsilon(M)) \cong \begin{cases} A(V, v, 2) & \text{if } n \equiv 2 \pmod{8} \\ A(V, v, m(\frac{n}{2})) & \text{if } n \equiv 0, 4 \pmod{8}, n \neq 4, 8 \\ A(V) & \text{if } n \equiv 6 \pmod{8} \end{cases}$$

§2. 2次形式を保つ同型写像

この節では,

$$V = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の場合について, $\tilde{A}(V)$ 及び $A(V)$ を計算する。

$$E = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma(2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ とし,}$$

$P, Q \in GL_2(\mathbb{Z})$ に対して

$$K_0(P, Q) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \sigma(2, 3) \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \sigma(2, 3) \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}^t$$

$$K_1(P, Q) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \sigma(2, 3) \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}^t$$

とおく。初等的な計算により次が得られる：

補題2.1. $KVK^t = \pm V$ が成り立つのは, $P, Q \in GL_2(\mathbb{Z})$ 及び $i=0, 1$ に対して, $K = K_i(P, Q)$ と表わされるとき, そのときに限る。特に, $KVK^t = V$ が成り立つためには, $|P|=|Q|$ となることが必要十分である。さらに, $K_i(P, Q) = K_{i'}(P', Q')$ が成り立つのは, $i=i'$ かつ $(P', Q') = \pm(P, Q)$ のときに限る。

$P \in GL_2(\mathbb{Z})$ に対して,

$$K(P) = K_1(E, P) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \sigma(2, 3) \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \\ & T \end{pmatrix}^t$$

とおく。明らかに,

$$K_0(P, Q) = K(P)K(Q)$$

$$K_1(P, Q) = K(E)K(P)K(Q)$$

が成り立つ。つまり, $\tilde{A}(V)$ の元は

$$K(E)^{\xi} K(P)K(Q), \quad P, Q \in GL_2(\mathbb{Z}), \quad \xi = 0, 1$$

と表わされる。また, $|P|=|Q|$ を要請するとき, $|P|=|Q|=-1$ ならば, $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対して,

$$P = JP', \quad Q = JQ', \quad P', Q' \in SL_2(\mathbb{Z})$$

と書け,

$$K_0(P, Q) = K(JP')K(JQ') = K(J)K(E)K(P')K(Q')$$

$$K_1(P, Q) = K(E)K(JP')K(JQ') = K(J)K(P')K(Q')$$

が成り立つ。つまり, $A(V)$ の元は

$$K(J)^{\eta} K(E)^{\xi} K(P)K(Q), \quad P, Q \in SL_2(\mathbb{Z}), \quad \xi, \eta = 0, 1$$

と表わされる。 $K(E)^2 = K(J)^2 = 1$ を注意しておく。

Δ を $(-E, -E)$ で生成される $SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z}) \subset GL_2(\mathbb{Z}) \times GL_2(\mathbb{Z})$ の部分群とする。明らかに, $\Delta \cong \mathbb{Z}_2$ である。

$$\tilde{\kappa} : \frac{GL_2(\mathbb{Z}) \times GL_2(\mathbb{Z})}{\Delta} \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \tilde{A}(V)$$

を, $\tilde{\kappa}(P, Q, \xi) = K(E)^{\xi} K(P) K(Q)$ と定義し,

$$\kappa : \frac{SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})}{\Delta} \times (\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2) \rightarrow A(V)$$

を, $\kappa(P, Q, \xi, \eta) = K(J)^{\eta} K(E)^{\xi} K(P) K(Q)$ と定義する。補題

2.1 より, $\tilde{\kappa}, \kappa$ は集合としての同型写像であることがわかる。

$$K(P_1) K(Q_1) K(E) K(P_2) K(Q_2) = K(E) K(Q_1 P_2) K(P_1 Q_2)$$

$$K(P_1) K(Q_1) K(J) K(P_2) K(Q_2) = K(J) K(J Q_1 J P_2) K(J P_1 J Q_2)$$

であるから, $\mathbb{Z}_2$ の $GL_2(\mathbb{Z}) \times GL_2(\mathbb{Z})$ への action ϕ を,

$$\phi(1) \cdot (P, Q) = (Q, P)$$

と定義し, $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$ の $SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})$ への action ϕ を,

$$\phi(1, 0) \cdot (P, Q) = (Q, P)$$

$$\phi(1, 1) \cdot (P, Q) = (J P J^{-1}, J Q J^{-1})$$

と定義することにより, 次の結果を得る:

定理 2.2. 群としての次の同型が成り立つ:

$$(i) \quad \tilde{A}(V) \cong \frac{GL_2(\mathbb{Z}) \times GL_2(\mathbb{Z})}{\Delta} \times_{\phi} \mathbb{Z}_2 \quad (\text{半直積})$$

$$(ii) \quad A(V) \cong \frac{SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})}{\Delta} \times_{\phi} (\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2) \quad (\text{半直積})$$

§3. 定理の証明 B_α を特性類 $\alpha \in \pi_{n-1}(SO_{n+1})$ をもつ n 球面上の n 球面バンドルとする。以下, n は偶数で, $n \neq 2, 4, 8$ と仮定する。明らかに, $H_n(B_\alpha) \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ である。今, $H_n(B_\alpha)$ の base e_1, e_2 として, section 及び fibre に対応するものをうまくとれば,

$$\lambda(e_1, e_1) = \lambda(e_2, e_2) = 0, \quad \lambda(e_1, e_2) = \lambda(e_2, e_1) = 1$$

$$\hat{\alpha}(e_1) = \alpha \in \pi_{n-1}(SO_{n+1}), \quad \hat{\alpha}(e_2) = 0$$

とできる。つまり, B_α の不変量 $\lambda, \hat{\alpha}$ に対応する行列及びベクトルとして

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとることができる。従って, n 球面上の n 球面バンドルの2つの連結和 $M = B_{\alpha_1} \# B_{\alpha_2}$ に対する行列, ベクトルとしては

$$U \oplus U = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}, \quad u_{\alpha_1} \oplus u_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとることができる。

定義. $V \in GL_4(\mathbb{Z})$ と, 整数を成分にもつ4次元ベクトルから成る system (V, v) を考える。もう1つの system (V', v') に対して, 適当な $K \in GL_4(\mathbb{Z})$ が存在して,

$$V' = KVK^T, \quad v' = Kv$$

が成り立つとき, (V, v) と (V', v') は同値であると定義する。

命題1.1より, 2つの多様体 M, M' の system (V, v) と (V', v') が同値なとき, M と M' は PL-同相であるから, $\text{Aut } H^*(M), \phi(\varepsilon_{\text{PL}}(M))$ $\phi(\varepsilon(M))$ を考えるとき, M の system (V, v) を同値な system にとりかえてもさしつかえない。

$M = B_{\alpha_1} \# B_{\alpha_2}$ の system $(U \oplus U, u_{\alpha_1} \oplus u_{\alpha_2})$ は, $\sigma(2, 3) \in GL_4(\mathbb{Z})$ により, $V = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に変換される。

以下, V は行列 $\begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}$ を表すものと約束する。

補題3.1. 整数を成分にもつ2つの4次元ベクトル $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_4 \end{pmatrix}$, $v' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_4 \end{pmatrix}$ に対して, $A(V)$ の元 K が存在して, $Kv = v'$ が成り立つための必要十分条件は, $|P| = |Q|$ である適当な $P, Q \in GL_2(\mathbb{Z})$ に対して, $\begin{pmatrix} v'_1 & v'_4 \\ v'_2 & -v'_3 \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} v'_1 & v'_4 \\ v'_2 & -v'_3 \end{pmatrix}^t$ が, $P \begin{pmatrix} v_1 & v_4 \\ v_2 & -v_3 \end{pmatrix} Q^t$ に等しくなることである。

補題3.1は, $K = K(E)^3 K(P) K(Q)$, $\mathfrak{z} = 0, 1$ に対して Kv を実際に計算することにより容易に得られる。

$\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ を整数係数 2×2 行列の全体とする。

定義. 2つの行列 $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ に対して, $|P| = |Q|$ である $P, Q \in GL_2(\mathbb{Z})$ が存在して, $B = PAQ^t$ または $B^t = PAQ^t$ が成り立つとき, A と B は同値であると定義する。

次も初等的な結果である：

補題3.2. 任意の $A \in M_2(\mathbb{Z})$ は, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a \geq 0$, $a|b$ の形の行列に同値である。特に, 行列 $\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ v_2 & 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に同値である。ここに, k は v_1 と v_2 の最大公約数を表す。

補題3.1, 3.2より, $\text{system} \left(V, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ は, $\text{system} \left(V, \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ に同値である。 k は α_1 と α_2 の最大公約数を表す。従って, $M = B_{\alpha_1} \# B_{\alpha_2}$ の場合, $\phi(\mathcal{E}_{PL}(M))$, $\phi(\mathcal{E}(M))$ の計算は,

$$V = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k = \text{G.C.D.}(\alpha_1, \alpha_2)$$

に対する $A(V, v)$ または $A(V, v, m)$ の計算に帰着される。

$v = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の形のベクトルは, $K(E), K(J)$ の作用で不変である。従って, $K(P)K(Q)v \equiv v \pmod{m}$, $m \geq 0$ をみたす $P, Q \in SL_2(\mathbb{Z})$ を求めればよい。 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくとき,

$$K(P)K(Q)v \equiv v \pmod{m}$$

が成り立つための必要十分条件は,

$$ak \equiv sk \pmod{m}, \quad ck \equiv 0 \pmod{m}, \quad rk \equiv 0 \pmod{m}$$

が成り立つことである。

$k \neq 0$, $m=0$ の場合, $a=s$, $c=r=0$ 。従って,

$$P = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^q, \quad Q = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^b \quad (\text{複号同順})$$

の場合しかあり得ない。

$k \neq 0$, $m=2$ の場合, $k=1$ としてよいから, $a \equiv s \pmod{2}$, $c \equiv r \equiv 0 \pmod{2}$ 。しかるに, P, Q は $SL_2(\mathbb{Z})$ の元であるから

$c \equiv r \equiv 0 \pmod{2}$ ならば, $a \equiv d \equiv p \equiv s \equiv 1 \pmod{2}$ となり, 条件 $a \equiv s \pmod{2}$ は自動的に満たされなければならない。

以上のことと, 定理2.2より, 定理が完全に証明された。

§4. 簡単な応用 M, M' を invariant system $(U, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix})$, $(U, \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{pmatrix})$ をもつ $(n-1)$ 連結 $2n$ 次元閉多様体 (n : 偶数) とする。
ここに, $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。

Corollary. $M \# S^m \times S^n$ と $M' \# S^m \times S^n$ とが PL-同相になるための必要十分条件は, $\alpha_1 \alpha_2 = \alpha'_1 \alpha'_2$ かつ $\text{G.C.D}(\alpha_1, \alpha_2) = \text{G.C.D}(\alpha'_1, \alpha'_2)$ が成り立つことである。

証明. $M \# S^m \times S^n, M' \# S^m \times S^n$ は system $(V, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}), (V, \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ 0 \end{pmatrix})$ をもつ。ここに, $V = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}$ 。命題1.1より, $M \# S^m \times S^n$ と $M' \# S^m \times S^n$ とが PL-同相になるためには, invariant systems が同値になることが必要十分である。従って, 補題3.1, 3.2 から求める結果を得る。

〈 文 献 〉

- [1] Ishimoto, H., Homotopy classification of connected sums of sphere bundles over spheres, I, Nagoya Math. J. 83 (1981),

15-36.

- [2] Kahn, P.J., Self-equivalences of $(n-1)$ -connected $2n$ -manifolds,
Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 562-566.
- [3] Levine, J., Self equivalences of $S^n \times S^k$, Trans. Amer. Math.
Soc. 143 (1969), 523-543.
- [4] Wall, C.T.C., Classification of $(n-1)$ -connected $2n$ -manifolds,
Ann. of Math. 75 (1962), 163-189.
- [5] Yoshida, J. and H. Ishimoto, Classification of certain manifolds
with sufficient connectedness, Sci. Rep. Kanazawa Univ. 24 (1979),
61-71.