

コンパクトリーマン葉の特性類

阪大. 教養 大和健二 (Kenji Yamato)

多様体 M 上の, 自明なノーマルバンドルを持つ余次元 k リーマン葉 Σ に対する Lazarov-Pasternack ([1]), 森田 ([2]) の特性類について, その幾何学的意味, 又は, 定性的性質に及ぼす影響について考えた。

ここでは, 最も簡単な $\dim M = 3$, $\text{codim } \Sigma = 2$ の場合に得られた結果 (定理 2-1) について述べる。また, 一般の場合には, Σ がコンパクトであるとして考察する。(定理 3-1, 3-2)。

§1. 準備.

向きづけ可能な n -次元閉多様体 M 上の, 余次元 k リーマン葉 Σ を考える。即ち, Σ は次の様な横断的リーマン構造 τ により定義される葉である。

$$\tau = \{ (U_\alpha, f_\alpha), \delta_{\alpha\beta}, (R_\alpha^g, g_\alpha) \}$$

1.

そこで, $f_\alpha: U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^g (= \mathbb{R}^g)$ submersion,

g_α は $\mathbb{R}^g (= \mathbb{R}^g)$ のリーマン計量,

$\gamma_{\alpha\beta}: (\mathbb{R}^g_\beta, g_\beta) \longrightarrow (\mathbb{R}^g_\alpha, g_\alpha)$ 等長変換

$$\text{s.t. } f_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} \circ f_\beta$$

この時, π のノーマルバンドル $\nu(\pi)$ 上の bundle-like 計量 g が局所的に, $g = f_\alpha^* g_\alpha$ で定まるので, $(\nu(\pi), g)$ の正規直交束を $\pi: P \longrightarrow M$ とする。

以下, 我々は, π を上の様な横断的リーマン構造 τ を持つ余次元 g リーマン葉層とし, $\pi: P \longrightarrow M$ は, 切断 $\Delta: M \longrightarrow P$ を持つものとし, これらを固定して, 組 (π, τ, Δ) として考察する。また, 以下で, リーマン葉層と言えは, 組 (π, τ, Δ) の事であるとする。

今, P_α を $(\tau(\mathbb{R}^g_\alpha), g_\alpha)$ の正規直交束とし, $\theta^\alpha = (\theta^\alpha_i)_{i=1, \dots, g}$, $\omega^\alpha = (\omega^\alpha_{ij})_{i,j=1, \dots, g}$ を各々 P_α 上の標準1次微分形式, リーマン接続形式とする。この時, P 上の, $\mathbb{R}^g$ -値1次微分形式 $\theta = (\theta_i)_{i=1, \dots, g}$ (resp. 接続形式 $\omega = (\omega_{ij})_{i,j=1, \dots, g}$) が局所的に,

$$\theta_i = f_\alpha^* \theta^\alpha_i, \quad i=1, \dots, g$$

$$(\text{resp. } \omega_{ij} = f_\alpha^* \omega^\alpha_{ij}, \quad i,j=1, \dots, g)$$

によって定まる。また, $\Omega = (\Omega_{ij})$ を ω の曲率形式とする。

リーマン葉層 (π, τ, Δ) に対する Lazarov-Pasternack 森田の特性類は, 余次元 g の時, その一部として次の様に略記されるものがある ([1], [2])。

$$I = \begin{cases} \{2, 4, \dots, g-2, g\} & ; g = \text{偶数} \\ \{2, 4, \dots, g-1\} & ; g = \text{奇数} \end{cases}$$

とする時, $\forall J \subset I$ に対して, $H_{DR}^*(M)$ の元として,

$$(1-1) \quad (\pi_J \cdot \chi)(\pi, \tau, \Delta) \quad (\text{但, } g = \text{偶数}, J \neq \emptyset)$$

$$(\pi_J \cdot \psi)(\pi, \tau, \Delta).$$

これらの定義は省略するが, 例え, 余次元 2 の時は, 次の 3 つの特性類を持つ。

$$(1-2) \quad (\pi_\chi \cdot \chi)(\pi, \tau, \Delta) = \left[\frac{1}{4\pi^2} \Delta^*(\omega_{12} \wedge \Omega_{12}) \right] (\in H_{DR}^3(M))$$

$$(\pi_\chi \cdot \psi)(\pi, \tau, \Delta) = \left[\frac{1}{2\pi} \Delta^*(\omega_{12} \wedge \theta_1 \wedge \theta_2) \right] (\in H_{DR}^3(M))$$

$$\psi(\pi, \tau, \Delta) = \left[\Delta^*(\theta_1 \wedge \theta_2) \right] (\in H_{DR}^2(M)).$$

一方, E 上, $\{\theta_i = \omega_{ij} = 0; i, j = 1, \dots, g\}$ によって定義される葉層が存在する。これを $\pi^{(1)}$ とかく。

$\pi^{(1)}$ は次の様な性質を持つ, である ([3])。

(1-3) (1) 木口ノミ-を持つ。かつ, ファイバーの $SO(g)$ -作用で不変。

(2) $\pi: (E, \pi^{(1)}) \rightarrow (M, \pi)$ は葉を保つ。

(3) $F^{(n)}$ を $F^{(n)}$ の葉とし, $F = \pi(F^{(n)})$ とする。

この時, $\pi|_{F^{(n)}}: F^{(n)} \rightarrow F$ は被覆空間で, その被覆度は, 葉 F のホロノミー群の位数に等しい。

一般に, 葉層 $\mathcal{F}$ の全ての葉がコンパクトの時, 葉層 $\mathcal{F}$ は コンパクト であるという。

今, リーマン葉層 (π, τ, Δ) がコンパクトである時, 葉空間 M/π は自然に V -多様体 ([4]) となり, M 上の g -次外微分形式 $\chi(\Omega)$ (但し χ は Euler 形式), $\psi = \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_g$ は, 各々, 自然に M/π 上の g -次外微分形式と見做せるので, それらの M/π 上での積分が考えられるから,

$$(1-4) \quad \chi_v(M/\pi) := \int_{M/\pi} \chi(\Omega) \quad (\text{但し } g = \text{偶数})$$

$$\text{vol}(M/\pi) := \int_{M/\pi} \psi \quad \text{と置く。}$$

$\chi_v(M/\pi)$ を V -多様体としての Euler 数という ([4])。

例えば, 余次元 2 の時, $\chi_v(M/\pi)$ は, M/π が種数 g の閉曲面と同相で, π のホロノミー群を持つ全ての葉が $F_1, \dots, F_r$ で, 各々のホロノミー群の位数が $N_1, \dots, N_r$ であるとすると,

$$(1-5) \quad \chi_v(M/\pi) = 2(1-g) + \sum_{i=1}^r (1/N_i - 1)$$

となる。

π がコンパクトの時, π^u について, 以下に次の事が判る。

(1-6) (1) π^u はコンパクトで, その葉空間 $E/\pi^u (= B \text{ とかく})$ は, 向きづけ可能な閉多様体 ($\dim B = g + \dim SO(g)$) で, 商写像 $g: E \rightarrow B$ は π^u の葉をファイバーとするファイバー束となる。

(2) E 上のファイバーの $SO(g)$ -作用は, 商写像 g によって B に射影され, その軌道も葉とする余次元 g 葉層 π_B が存在するが, それは, 自然に, リーマン葉層 $(\pi_B, \tau_B, \Delta_B)$ となる。

(3) M/π と B/π_B は自然に対応して V -多様体として同型。従って, 特に, $\chi_V(M/\pi) = \chi_V(B/\pi_B)$ 。

また, $\text{vol}(M/\pi) = \text{vol}(B/\pi_B)$ も成立する。

(4) E 上の2つのコンパクトリーマン葉層 $(\pi^*\pi, \pi^*\tau, \pi^*\Delta)$, $(g^*\pi_B, g^*\tau_B, g^*\Delta_B)$ について,

$$\pi^*\pi = g^*\pi_B, \quad \pi^*\tau = g^*\tau_B$$

しかし, $\pi^*\Delta \neq g^*\Delta_B$ である。

これらの事, 特に (1-6) が, 一般の場合に特性類を計算するのに役立つ。

§2. $\text{codim } \pi = 2$ の場合.

ここでは, 向きづけ可能な閉多様体 M 上の, 余次元 2 リーマン葉層 (π, τ, Δ) について考える。

一般に, 多様体 N 上の p -次元葉層 $\mathcal{F}$ が r -拡張 を持つとは, N 上の $p+r$ -次元葉層 $\mathcal{H}$ が存在して, $\tau(\mathcal{H}) \supset \tau(\mathcal{F})$ である事と定義する。

定理 2-1. $\dim M = 3$, $\text{codim } \pi = 2$ の時, 次の同値である。

$$(1) (\chi_X \cdot \chi)(\pi, \tau, \Delta) = 0$$

(2) $\pi^{(1)}$ がファイバーに横断的なコンパクト 2-拡張を持つ。

(3) 有被覆空間 $p: \hat{M} \rightarrow M$ が存在して, $p^*\pi$ が $(\hat{M})$ 1-拡張をもつ。

$$(4) (\pi \text{ がコンパクトの時}), \chi_v(M/\pi) = 0$$

また, 上の定理は, π がコンパクトであるという条件の下で次の様に一般化できる。

定理 2-2. π はコンパクト, $\text{codim } \pi = 2$ とする。

さらに, π のホロノミーのなり葉 F に対して,

$i_*: H_{n-3}(F; \mathbb{R}) \rightarrow H_{n-3}(M; \mathbb{R})$ は単射

(但, $n = \dim M (\geq 3)$) とする。この下で, 定理 2-1 の 4 条件 (1) ~ (4) は同値である。

以下, 定理 2-1 について, 証明の概略を述べる。

まず, 我々は, [5] で次の事が判っていた。

(2-1). (π, τ, Δ) について,

(1) π がコンパクトの時,

$$(\chi_x \cdot \chi)(\pi, \tau, \Delta) = 0 \Leftrightarrow \chi_v(M/\pi) = 0$$

(2) π がコンパクトでない葉を持つ時,

$$(\chi_x \cdot \chi)(\pi, \tau, \Delta) = 0 \Leftrightarrow \pi \text{ は } 1\text{-拡張をもつ。}$$

定理 2-1 で, (2) と (3) は, 一般に $\dim M \geq 3$ で, 同値である事はすぐ判るので, 我々は, (1) と (2) について, π がコンパクトの時考えればよい。

コンパクトリーマン葉層 (π, τ, Δ) に対応して決る, コンパクトリーマン葉層 $(\pi_B, \tau_B, \Delta_B)$ (cf. (1-6)) について, 次の事が判る。

(2-2) (1) B は π_B の葉をファイバーとする, Seifert ファイバー空間で, その Euler 数 $e(B \rightarrow B/\pi_B)$ ([6]) は $\chi_v(B/\pi_B)$ と一致する ([5])。

(2) ([6]) $e(B \rightarrow B/\pi_B) = 0$ である必要十分

条件は, π_B が横断的なコンパクト二次葉層 $\mathcal{H}_B$ を持つ事である。

ここで, (1-6)(3) より, $\chi_V(M/\pi) = \chi_V(B/\pi_B)$ である事、に注意すれば, もし $(\pi_X \cdot \chi)(\pi, \tau, \Delta) = 0$ であれば上の事より π_B が横断的なコンパクト二次葉層 $\mathcal{H}_B$ を持ち, 従って $\pi^{(1)}$ はファイバーに横断的なコンパクト 1-葉層 $\mathcal{H} = \pi^* \mathcal{H}_B$ を持つ事となり, (1) から (2) を得る。また, これを, 逆にたどれば (2) から (1) を得る。

定理 2-2 の証明の概略は与える。述べらる。

与える。 π がコンパクトで, $\text{codim } \pi \geq 2$ の場合。

ここでは, 向きづけ可能な n 次元閉多様体 M 上の, 余次元 $q (\geq 2)$ コンパクトリーマン葉層 (π, τ, Δ) について考える。

定理 3-1. $F, F^{(1)}$ も各々 π の木口ノミーのないう葉, $\pi^{(1)}$ の葉とする。この時, 次の (1), (2) において (i) と (ii) とは同値である。

$$(1) (i) \quad \forall J \in \pi, (\pi_J \cdot \chi)(\pi, \tau, \Delta) = 0$$

$$(ii) \quad \Delta_*([F]) = \varepsilon [F^{(1)}] \quad (\in H_*(\mathbb{P}; \mathbb{R}))$$

但, $[F], [F'']$ は各々 F, F'' の表わす実木モロジークラスで, ε はそれらの向きづけにのみ依存する数で $\varepsilon = \pm 1$ 。

$$(2). (i) \quad \forall J \neq \emptyset, \quad (\alpha_J \cdot \chi)(\tau, \tau, \Delta) = 0$$

$$(ii) \quad \chi_V(M/\tau) \cdot [F''] = 0 \quad (\in H_*(P; \mathbb{R}))$$

また, 定性的性質への影響として, 次を得る。

定理 3-2. F を τ の任意の葉とし, $[F]$ をその実木モロジークラスを表わすものとする。この時,

$$(1) \quad \chi_V(M/\tau) \cdot [F] = 0 \quad (\in H_*(M; \mathbb{R})) \quad (\text{但, } g = \text{偶数})$$

$$(2) (i) \quad \exists J \neq \emptyset, \quad (\alpha_J \cdot \chi)(\tau, \tau, \Delta) \neq 0 \quad \text{又は}$$

$$(ii) \quad \psi(\tau, \tau, \Delta) = 0, \quad \text{であれば,} \quad [F] = 0 \quad (\in H_*(M; \mathbb{R}))$$

となる。従って, 特に, τ の全ての葉の Euler 数, 及び Pontryagin 数は全て零である。

定理 2-2, 3-1, 3-2 の証明は, 以下の命題 1~3 より得られる。

F, F'' を 定理 3-1 のように, 各々, τ の木ロノミーの有り葉, τ'' の葉とする。

まず, $H^*(SO(g); \mathbb{R}) \cong \wedge(\gamma_j)_{j \in I}$ (但, I は ≤ 1 と同じもの) において, γ_j は Pontryagin 形式, 又は, Euler 形式に対応する生成元としてとる。 $\forall J = \{j_1 < \dots < j_k\}$

$\subset I$ に対して, $y_J := y_{j_1} \wedge \cdots \wedge y_{j_k}$ とおく。

また, $\pi: P \rightarrow M$ に対する F 上の切断 σ で, 葉方向に沿って射影可能なもの $\sigma|_U$ とし, 写像 $\sigma: F \rightarrow SO(k)$
 $\in \sigma(x) = \Delta(x) \cdot \sigma(x) (x \in F)$ により定義する。

この時, 次の事が判る。

命題 1. 切断 Δ によつて $P = M \times SO(k)$ と見做した時,

$$\varepsilon[F^{(1)}] = [F] \times 1 + \sum_{J \neq \emptyset} i_*(\Phi^* y_J \wedge [F]) \times (y_{J^c} \wedge [SO(k)])$$

命題 2. $Z = \chi$ (resp. ν), $Z = \chi_\nu$ (resp. ν_{rel}) とし
 $\varepsilon, \forall J \subset I$ に対して ($J = \emptyset$ も許す)。

$$(\pi_J \cdot Z)(\pi, \tau, \Delta) \wedge [M] = \varepsilon Z(M/\pi) \cdot i_*(\Phi^* y_J \wedge [F])$$

(但, 上で, $i: F \rightarrow M$ 包含写像, ε は $F, F^{(1)}$ 等の向きづけにのみよる数で $\varepsilon = \pm 1$)

命題 3. $\text{codim } \pi = 2$ の時,

$$\Phi^* y_\chi \wedge [F] = 0 \quad (\in H_{n-3}(F; \mathbb{R})) \text{ ならば } \chi_\nu(M/\pi) = 0$$

定理 2-2 の証明.

条件 (2), (3), (4) が同値である事は, 与えて述べた事と全く同じである。従つて (1) と (4) が同値である事を示せばよいが, それは, 命題 2 と 3 及び仮定より明らかである。

定理 3-1 の証明.

(1) は、命題 1, 2 より明らかである。

(2) については、 $\chi(\tau, \tau, \Delta)$ (即ち、 $(\tau_J \cdot \chi)(\tau, \tau, \Delta)$ で $J = \emptyset$ の場合) は、切断 $\Delta: M \rightarrow L$ が存在する事より常に零であるので、この事に注意すれば、命題 1, 2 より、明らかである。

定理 3-2 の証明.

F_0 を木ロノミーのない木の葉とし、 F の木ロノミー群の位数を n とすると、 $H_*(M; \mathbb{R})$ の元として、 $[F] = \frac{\pi i}{n} [F_0]$ である。この事に注意すれば、 $\chi(\tau, \tau, \Delta) = 0$ より、命題 2 から (1) を得る。また、(2) も同様で、 $\chi_v(M, \tau)[F] = 0$ と命題 2 より、 $[F] = 0$ を得る。

以下で、命題 1, 2 について、証明のう針を述べる。

命題 1 について.

まず、 F に対して、 $F^{(1)}$ を $F^{(1)} \subset \pi^+(F)$ ととり、 $F^{(1)}$ は、 $F^{(1)}$ の微分同相写像である事に注意して計算すればよい。

命題 2 について.

(τ, τ, Δ) に対応する、(1-6) のような、 $(\tau_B, \tau_B, \Delta_B)$ を考える。これについて、

$$(3-1) \quad (\tau_I \cdot Z)(\tau_B, \tau_B, \Delta_B) \cap [B]$$

$$= \pm \sum (B/\pi_B)$$

$$= \pm \sum (M/\pi) \quad ((1-b)(3)).$$

従って、ファイバー束 $f: E \rightarrow B$ に対して、

$$\begin{aligned} (3-2) \quad & (f^*(\alpha_I \cdot Z)(\pi_B, \tau_B, \Delta_B)) \cap [E] \\ &= \pm \sum (M/\pi) \cdot [F^{(1)}] \end{aligned}$$

と置くで、(1-b)(4)より、特性類の自然性から、

$$\begin{aligned} (3-3) \quad & f^*(\alpha_I \cdot Z)(\pi_B, \tau_B, \Delta_B) \\ &= (\alpha_I \cdot Z)(f^*\pi_B, f^*\tau_B, f^*\Delta_B) \\ &= (\alpha_I \cdot Z)(\pi^*\pi_B, \pi^*\tau, f^*\Delta_B) \end{aligned}$$

及び、 $\forall J \subset I$ に対して、

$$(3-4) \quad \pi^*(\alpha_J \cdot Z)(\pi_B, \tau, \Delta) = (\alpha_J \cdot Z)(\pi^*\pi_B, \pi^*\tau, \pi^*\Delta)$$

であるが、(1-b)(4)における、 $f^*\Delta_B$ と $\pi^*\Delta$ との違いにより、

$$\begin{aligned} (3-5) \quad & (\alpha_I \cdot Z)(\pi^*\pi_B, \pi^*\tau, f^*\Delta_B) \\ &= \sum_{J \subset I} (\alpha_J \cdot Z)(\pi^*\pi_B, \pi^*\tau, \pi^*\Delta) \cup \forall J \subset I \end{aligned}$$

となる。

以上により、命題1とあわせれば、命題2を得る。

文献

- [1] C.Lazarov, J.Pasternack : Secondary characteristic classes for riemannian foliations.
J. Differential Geometry 11 (1976) 365-385.
- [2] S.Morita : On characteristic classes of riemannian foliations.
Osaka J.Math., 16 (1979) 161-172.
- [3] P.Molino : Etude des feuilletages transversalement complets et applications. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 10 (1977) 289-307.
- [4] I.Satake : The Gauss-Bonnet theorem for V-manifolds.
J. math. Soc. Japan. 9 (1957) 464-492.
- [5] K.Yamato : Sur la classe caractéristique exotique de Lazarov-Pasternack en codimension 2 II.
Japan J. Math., 7 (1981) 227-256.
- [6] D.Eisenbud, U.Hirsch, W.Neumann : Transverse foliations of Seifert bundles and self homeomorphism of the circle. Comment. Math. Helvetici 56 (1981) 638-660.