

STRONGLY REDUCTIVE OPERATORS について

富山大学 理学部 北野孝一

Hilbert space H 上の operator T が reductive である $\Leftrightarrow$
任意の closed subspace $M \subset H$, $TM \subset M \Rightarrow T^*M \subset M \Leftrightarrow$
 $(1-P)TP = 0$ for $\forall P: P^2 = P = P^* \Rightarrow PT = TP$.

Hermitian operator は reductive であり、non-Hermitian operator で reductive なものは多く知られているが、non-normal operator で reductive な operator は知られていない。このような事実にもとづいて次の予想が考えられる。

Reductive operator conjecture

Every reductive operator is normal.

30年以上にわたって、operator theory の中でも最も困難な問題である。

Invariant subspace conjecture

Every operator on a Hilbert space has a non-trivial invariant subspace.

この2つの問題が同値であることが証明された [DPP].
normal operator との関連では, "Which normal operators are reductive?" という問題は, Wermer (1952) 以後多くの研究がある.

THEOREM [W] normal operator T に対して, T の spectrum, $\sigma(T)$, が複素平面を分けない ($\sigma(T)$ の complement が connected) で, 内点も持たない $\Rightarrow T$ は reductive である.

THEOREM [S:1] normal operator T に対して, T が reductive である $\Leftrightarrow T^* \in$ the closure, with respect to the weak operator topology, of the set of polynomials in T .

reductivity の spectral criterion については,

THEOREM [S:2] normal operator T に対して, μ を a finite positive measure in the plane which is mutually absolutely continuous w.r.t spectral measure of T とするとき, T が reductive である $\Leftrightarrow$ the set of polynomials is weak-star dense in $L^\infty(\mu)$.

Reductive operator に関連して, Harrison は strong reductivity の概念を導入した [Har].

DEFINITION operator T が strongly reductive である $\Leftrightarrow$ for $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \|PTP - TP\| < \delta \Rightarrow \|TP - PT\| < \varepsilon$

for all $P : P^2 = P = P^* \iff \varepsilon_T(\delta) = \sup \{ \|(I-P)T^*P\| : \|(I-P)TP\| < \delta \} \rightarrow 0 \text{ for } \delta \searrow 0$. 但し P は $P^2 = P = P^*$ を満たして動くものとする。 (簡単にいえば "almost invariant" under $T \Rightarrow$ "almost reduces" T ということ。)

この報告では、次の定理を目標に話を進める。

THEOREM [AFV:2] Every strongly reductive operator is normal.

Strongly reductive operators の性質 [Har]

1. Hermitian operators は strongly reductive である。
2. Strongly reductive operators は reductive である。
3. Strongly reductive operator の adjoint は strongly reductive である。

(i) $\forall T, \forall \text{proj. } P$ に対して, $Q = I - P$ とおけば $\|PT^* - T^*P\| = \|QT - TQ\|$, $\|(I-P)T^*P\| = \|(I-Q)TQ\|$ であることより。

4. T^* が the uniform limit of sequence of polynomials in $T \Rightarrow T$ は strongly reductive である。

(i) $\forall \varepsilon > 0, q : \text{any polynomial} \Rightarrow \exists \delta > 0 : \|(I-P)q(T)P\| < \varepsilon$
 ことに P は orthogonal proj. で $\|(I-P)TP\| < \delta$ である。これを polynomial の degree についての induction で証明する。
 q が constant polynomial なら自明 ($(I-P)q(T)P = 0$ より)。次

に degree of polynomial = k のとき成り立つとする. q の degree = $k+1$ とする. $r(z) = (q(z) - q(0))z^{-1}$ とおけば, r の degree = k . 従って $\|(1-P)q(T)P\| = \|(1-P)(q(T) - q(0)1)P\|$
 $= \|(1-P)T(1-P+P)r(T)P\| \leq \|(1-P)T(1-P)r(T)P\| + \|(1-P)TPr(T)P\|$
 $\leq \|T\| \|(1-P)r(T)P\| + \|(1-P)TP\| \|r(T)\|$ 従って q に対して成り立つ.

次に $\forall \varepsilon > 0$, q : Polynomial s.t. $\|T^* - q(T)\| < \varepsilon/2$, $\delta > 0$ s.t.
 $\|(1-P)q(T)P\| < \varepsilon/2$ whenever $\|(1-P)TP\| < \delta$ とするならば
 $\|(1-P)T^*P\| < \|(1-P)q(T)P\| + \varepsilon/2 < \varepsilon$ 従って T^* , 即ち T が
 strongly reductive である.

5. T を normal とするとき, $\sigma(T)$ が平面を分けないで, 内点も持っていない. $\Rightarrow T$ は strongly reductive である.

(i) 後出の $\square X$ 及び 4 より従う.

これより定理の証明に必要なことを順に述べて行く.

$\square$ T : strongly reductive operator on H , X : operator on K (some Hilbert space) s.t. $\|X - U_j T U_j^{-1}\| \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$)

ここで U_j ($j=1, 2, \dots$) は unitary op's $H \rightarrow K$ である.

$\Rightarrow X$: strongly reductive.

Proof. for $\delta > 0$, P : K 上の orthogonal proj. s.t. $\|(1-P)XP\| < \delta$
 $T_j = U_j T U_j^{-1}$ とおいて, j を十分大きくとって $\|X - T_j\| < \delta -$
 $\|(1-P)XP\|$ とする. for $P_j = U_j^{-1} P U_j$ (H 上の orthogonal proj.
 となる) $\|(1-P_j)T_j P_j\| < \delta$ である. これは $(1-P_j)T_j P_j =$

$U_j^{-1}(I-P)T_jPU_j = U_j^{-1}\{(I-P)(T_j-X)P + (I-P)XP\}U_j$ よりいえる.

$$\text{さて, } \|(I-P)X^*P\| \leq \|X^* - T_j^*\| + \|(I-P)T_j^*P\| = \|X - T_j\| +$$

$$\|(I-P_j)T^*P_j\| \leq \|X - T_j\| + \varepsilon_T(\delta) \quad \text{よって } j \rightarrow \infty \text{ として,}$$

$$\|(I-P)X^*P\| \leq \varepsilon_T(\delta). \quad \text{よって } X \text{ が strongly reductive であるこ}$$

とがわかる.

II T : strongly reductive operator on H (separable).

$\Rightarrow T^*T - TT^*$: compact.

Proof. $\mathcal{O}$: the C^* -algebra with unity, generated by the image $\tilde{T}$ of T in the Calkin algebra $B(H)/K(H)$.

ρ : a faithful C^* -representation of $\mathcal{O}$ on a separable Hilbert space H_ρ とする. [V: Theorem 1.3] より **I** における

X として, $X = T \oplus \rho(\tilde{T}) \oplus \rho(\tilde{T})$ とおく. これは strongly reductive となり, 従って reductive となる. P は orthogonal

proj. $H \oplus H_\rho \oplus H_\rho \xrightarrow{\text{onto}} \{0 \oplus h \oplus \rho(\tilde{T})h : h \in H_\rho\}$ とすると,

$$(I-P)XP = 0 \quad \text{従って } \|(I-P)X^*P\| = 0. \quad \text{よって } \rho(\tilde{T})^*\rho(\tilde{T})h =$$

$$\rho(\tilde{T})\rho(\tilde{T})^*h \quad \text{for } \forall h \in H_\rho \quad \text{よって } \rho(\tilde{T}^*\tilde{T} - \tilde{T}\tilde{T}^*) = 0. \quad \text{faithful}$$

$$\text{であるから } \widetilde{T^*T - TT^*} = \tilde{T}^*\tilde{T} - \tilde{T}\tilde{T}^* = 0.$$

Strongly reductive operator の spectrum の性質 [Har]

$B(H)$: the algebra of all operators on H . $\mathcal{L}(H) = B(H)/K(H)$: the Calkin algebra ($K(H)$: the ideal of compact operators on H).

$B(H)$ から $\mathcal{L}(H)$ の上への canonical map π による T の image を $\tilde{T}$

即ち, $\tilde{T} = T + K(H)$ とする. T の spectrum を $\sigma(T)$, left spectrum or approximate point spectrum を $\sigma_{\ell}(T)$, T の essential spectrum を $\sigma_e(T) (= \sigma(\tilde{T}))$, left essential spectrum を $\sigma_{\ell e}(T) (= \sigma_{\ell}(\tilde{T}))$ で表わす. これらは non-empty compact subset of the plane 上の関係が成り立っている. $\sigma(T) = \sigma_{\ell}(T) \cup \sigma_{\ell}(T^*)$, $\sigma_e(T) = \sigma_{\ell e}(T) \cup \sigma_{\ell e}(T^*)$. ここで $\bar{}$ は complex conjugate を表わす.

left spectra については, 次が成立つ (bounded below という概念で特徴づけられる).

(1) [例: Hal:1] $\lambda \in \sigma_{\ell}(T) \iff \exists \{\varphi_n\}$: seq. of unit vectors s.t. $\|(T - \lambda)\varphi_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

(2) [FSW] $\lambda \in \sigma_{\ell e}(T) \iff \exists \{\varphi_n\}$: orthogonal seq. of unit vectors s.t. $\|(T - \lambda)\varphi_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

III T : strongly reductive, $\{\varphi_n\}$: seq. of unit vectors s.t. $\|(T - \lambda)\varphi_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) for some $\lambda \implies \|(T^* - \bar{\lambda})\varphi_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Proof. P_n : orthogonal proj. onto span φ_n とする. $P_n\psi = (\psi, \varphi_n)\varphi_n$ for $\forall \psi$. 故に $\|(1 - P_n)T P_n\| = \|(1 - P_n)T\varphi_n\| = \|(1 - P_n)(T - \lambda)\varphi_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であり, T が strongly reductive であるから $\|(1 - P_n)T^* P_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を得る. 即ち $\|T^*\varphi_n - P_n T^*\varphi_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) とこ
 るから $P_n T^*\varphi_n = (T^*\varphi_n, \varphi_n)\varphi_n = (\varphi_n, T\varphi_n)\varphi_n$, $(\varphi_n, T\varphi_n) \rightarrow \bar{\lambda}$ ($n \rightarrow \infty$) であるから $\|(T^* - \bar{\lambda})\varphi_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を得る.

IV T : strongly reductive $\implies \sigma(T) = \sigma_{\ell}(T)$, $\sigma_e(T) = \sigma_{\ell e}(T)$.

Proof. $\sigma_\ell(\cdot)$ の characterization 及 $\square$ より $\sigma_\ell(T) = \sigma_\ell(T^*)^-$,
 $\sigma_{\ell^e}(T) = \sigma_{\ell^e}(T^*)^-$ と $\exists$ τ $\sigma(T) = \sigma_\ell(T) \cup \sigma_{\ell^e}(T^*)^- = \sigma_\ell(T)$, $\sigma_e(T)$
 $= \sigma_{\ell^e}(T) \cup \sigma_{\ell^e}(T^*)^- = \sigma_{\ell^e}(T)$ τ であることがわかる。

$\square$ T : strongly reductive $\Rightarrow \sigma(T)$: the union of $\sigma_e(T)$
 and isolated normal eigenvalues of finite multiplicity.

Proof. $\square$ より $\sigma(T) = \sigma_\ell(T)$, $\sigma_e(T) = \sigma_{\ell^e}(T)$, 且 $\sigma_{\ell^e}(T) \subset \sigma_\ell(T)$
 τ であるから、 $\lambda \in \sigma_\ell(T) \setminus \sigma_{\ell^e}(T)$ とする。 $\lambda \notin \sigma_e(T)$ より $\ker(T-\lambda)$
 は finite dimensional しかも $(T-\lambda)$ は bounded below on
 $\ker(T-\lambda)^\perp$, $\lambda \in \sigma_\ell(T)$ より $\ker(T-\lambda)$ は non-trivial τ である。
 従って λ は T の finite multiplicity な eigenvalue τ であること
 かわかる。 T が strongly reductive τ であるから、 $\square$ から λ が
 normal eigenvalue. 且 $T\varphi = \lambda\varphi \Rightarrow T^*\varphi = \bar{\lambda}\varphi$ もわかる。

次に、 λ が isolated point of $\sigma_\ell(T)$ を示そう。 $\ker(T-\lambda)$
 は invariant under T τ あり、 T が strongly reductive より
 $\ker(T-\lambda)$ は reduces T τ である。 且 $T' = T|_{\ker(T-\lambda)^\perp}$ と
 するとき、 $\lambda \notin \sigma_\ell(T')$, $\sigma_\ell(T')$ compact set τ であるから $\exists \delta > 0$
 s.t. $\mu \notin \sigma_\ell(T')$ for $|\mu - \lambda| < \delta$ と $\exists$ τ $\sigma_\ell(T) = \{\lambda\} \cup \sigma_\ell(T')$
 τ であるから λ が isolated in $\sigma_\ell(T)$ が得られる。

$\square$ [AFV:1] operator T が quasitriangular τ である。

$$\Leftrightarrow \{ \lambda \notin \sigma_{\ell^e}(T); \dim \ker(T-\lambda) < \dim \ker(T^*-\bar{\lambda}) \} = \emptyset$$

(T : quasitriangular $\Leftrightarrow \exists \{P_n\}$: proj's of finite rank which

conv. to 1 in the strong topology s.t. $\{\|P_n T P_n - T P_n\|\} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

Ⅴより T : strongly reductive $\Rightarrow T$: quasitriangular であることがわかる (∵ Ⅳ, Ⅴより $\lambda \notin \sigma_{\text{le}}(T)$ に対して $\dim \ker(T - \lambda) = \dim \ker(T^* - \bar{\lambda})$ であるから).

Ⅶ [AF] T : strongly reductive, $\mathcal{O}(T)$ (= the uniformly closed, inverse closed algebra generated by $\{T, 1\}$): contains an operator S s.t. $\|S\| \neq \|\tilde{S}\| \Rightarrow \exists$ proper invariant subspace for all operators $\in \mathcal{O}(T)$.

先ず, Ⅶの証明に必要な準備をする.

Ⅷ T : quasitriangular, $\mathcal{O}(T) \ni S$ s.t. $\|S\| \neq \|\tilde{S}\|$
 $\Rightarrow \exists \{P_n\}_{n=1}^\infty$: finite rank proj's s.t.

(1) $\|(1 - P_n) L P_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ for $\forall L \in \mathcal{O}(T)$.

(2) $P_n \rightarrow A$ weakly $(n \rightarrow \infty)$.

(3) $A \neq \lambda 1$ (not a scalar multiple of 1 ということ).

Proof. E : spectral measure of $(S^* S)^{1/2}$, fix some $\rho > 0$ s.t. $\|\tilde{S}\| < \rho < \|S\|$ に対して $S_\rho = SE([P, \|S\|])$ とおく. このとき, $\|S\| \in \sigma_p\{(S^* S)^{1/2}\}$ point spectrum, S_ρ : finite rank としても $S^* S_\rho = S_\rho^* S$ である. fix $\alpha > 0$ s.t. $\alpha < (\|S\| - \rho)^{-1} \|S\|$, $\forall e \in H$ unit vector, 1-に対して T は quasitriangular より (see cf. [CF: P. 179-182]) $\exists$ two sequences $\{P'_n\}_{n=1}^\infty, \{P''_n\}_{n=1}^\infty$ s.t. finite rank proj's $P'_n \leq P''_n$, rank $R_n = 1$ (即ち $R_n = P''_n - P'_n$ とする)

$(P'_n e, e) \leq \alpha \leq (P''_n e, e)$, $\|(1-P'_n)TP'_n\| \rightarrow 0$ かつ
 $\|(1-P''_n)TP''_n\| \rightarrow 0$. 従って $\|(1-P'_n)L P'_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) かつ
 $\|(1-P''_n)L P''_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) for $\forall L \in \mathcal{O}(T)$. 今 e_n : unit
 vector $\in$ image of R_n とする. 必要ならば部分列を選べばよい
 から $\{e_n\} \xrightarrow{w} e_0$, $\{P'_n\}$, $\{P''_n\}$: conv. in the weak operator
 topology としてよい. 以下 $\{P'_n\}$ or $\{P''_n\}$ が求まる
 seq. であることを示す. 求まる seq. がないと仮定して.

$P'_n \xrightarrow{w} \beta 1$ 及び $P''_n \xrightarrow{w} \gamma 1$, z : unit vector $(z, e_0) = 0$,
 $\beta \leq \alpha \leq \gamma$ とする. $\lim (R_n z, z) = \lim ((z, e_n) e_n, z) =$
 $\lim |(z, e_n)|^2 = |(z, e_0)|^2 = 0$ 及び $\lim (R_n z, z) = \lim (P''_n z, z)$
 $= \lim (P'_n z, z) = \gamma - \beta$ 従って $\alpha = \beta = \gamma$. 今 $z = z''$. u :
 unit vector of $(S^*S)^{1/2}$ belonging to the eigenvalue $\|S\|$ とする.
 $\|S_p u\| = \|S\|$, $\lim \|P'_n x\| = \sqrt{\alpha} \|x\|$ 及び $\lim \|S_p P'_n x - \alpha S_p x\|$
 $= 0$ for $\forall x \in H$. 尤もから $(P'_n S P'_n u, S_p u) = (S P'_n u, S_p u)$
 $+ ((P'_n S P'_n - S P'_n) u, S_p u) \rightarrow \alpha (S u, S_p u) = \alpha (u, S^* S_p u)$
 $= \alpha \|S_p u\|^2 = \alpha \|S\|^2$ また $(P'_n S_p P'_n u, S_p u) =$
 $(S_p P'_n u, P'_n S_p u) \rightarrow \alpha^2 \|S\|^2$ 従って $(P'_n (S - S_p) P'_n u, S_p u)$
 $\rightarrow (\alpha - \alpha^2) \|S\|^2$ 一方 $(P'_n (S - S_p) P'_n u, S_p u) =$
 $|((S - S_p) P'_n u, P'_n S_p u)| \leq \|S - S_p\| \|P'_n u\| \|P'_n S_p u\| \leq \rho \|P'_n u\| \|P'_n S_p u\|$
 $\rightarrow \rho \sqrt{\alpha} \|u\| \cdot \sqrt{\alpha} \|S_p u\| = \rho \alpha \|S\|$ ゆえに $(\alpha - \alpha^2) \|S\|^2 \leq \rho \alpha \|S\|$
 or $\alpha \|S\| \geq \|S\| - \rho$ これは α のとり方に矛盾する.

Proof of VII T は strongly reductive であるから IV, V, VI より、 T は quasitriangular となる。VIII で選んだような finite rank の proj's $\{P_n\}$ で、 $P_n \xrightarrow{w} A$, A は non-scalar Hermitian operator とできる。ここで $\|P_n T P_n - T P_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)、 T : strongly reductive より、 $\|T P_n - P_n T\| \rightarrow 0$ 従って $TA = AT$ であり $LA = AL$ for $\forall L \in \mathcal{O}(T)$. A : Hermitian であるから $\exists$ $\forall$ non-trivial spectral subspace of A reduces all the operator in $\mathcal{O}(T)$.

REMARK [St:1] $\|T\| \neq \|\tilde{T}\| \Rightarrow M_T = \{x \in H : (T^*T)^{1/2}x = \|T\|x\} = \{x \in H : \|Tx\| = \|T\|\|x\|\}$ is a non-trivial, finite dimensional space. $\therefore T$ は hyponormal ならば M_T は invariant under T となる。

IX T : strongly reductive, $\dim H > 1 \Rightarrow \exists$ non-trivial invariant subspace for T (reducing subspace for T となる)。

Proof. $\dim H < \infty$: T は normal operator になってしまう。
 $\dim H > \aleph_0$: T は reduce される subspace として separable subspace が作れる。 $\dim H = \aleph_0$ の場合を片づければよい。
 $\mathcal{O}(T)$ についての V. それと VI より、 T は quasitriangular operator となることわかる。場合を分けて、

(1) for some polynomial $p(\lambda)$: $\|p(T)\| \neq \|\tilde{p}(T)\|$
 $\Rightarrow$ VII より、 $\exists$ non-trivial reducing subspace of T .

(2) for any polynomial $p(\lambda)$: $\|p(T)\| = \|\widetilde{p(T)}\| = \|p(\widetilde{T})\|$ のとき.

Ⅱより, $\widetilde{T}$ は normal in Calkin algebra, $\|p(T)\| = \|p\|_{C(\sigma(\widetilde{T}))}$
 $(= \max \{ |p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(\widetilde{T}) \})$ とする. $\sigma(\widetilde{T}) \subset \sigma(T)$ であり.

T が strongly reductive より、後で示す Ⅳより $\sigma(T)$ は平面
 を含めない (complement が connected という = と) し、かつ
 内点も持たない. Laurentiev's theorem [G: p48]: (Let K
 be a compact plane set. Then $P(K) = C(K)$ if and only if K
 is nowhere dense and the complement of K is connected.)

より the map: $p|_{\sigma(\widetilde{T})} \mapsto p(T)$ は $C(\sigma(\widetilde{T})) \rightarrow B(H)$
 の map. $\|\cdot\|$ isometric, algebraic $\|\cdot\|$ extend してやる.

(1) $\sigma(\widetilde{T}) = \{\lambda\}$ single point $\Rightarrow \widetilde{T} = \lambda 1$ i.e. $T = \lambda 1 + K$,
 K は compact operator となるから定理が成立する.

(2) $\sigma(\widetilde{T}) \neq$ Single point のとき. f, g : continuous
 functions on $\sigma(\widetilde{T})$ not vanishing identically s.t. $fg=0$
 $\Rightarrow f(T) \neq 0, g(T) \neq 0, f(T)g(T)=0$ であるから T は $f(T)$,
 $g(T)$ の non-trivial null spaces を invariant にする.

Proof of THEOREM. H は separable としてよい (see. Ⅳ
 の Proof.) $M \subset H$: $T|_M$: normal となる largest reducing
 subspace M を除いて考えればよい [例は, A]. 従って、
 for $\forall$ subspace $M \subset H$; reducing T に対して $T|_M$: not
 normal と仮定して進めればよい. $\dim M = \aleph_0$. となるから

(finite dimension は normal と な、てしなう). $\square$ より、
 存在性がいえるのです。for $\forall$ maximal totally ordered
 family $\mathcal{F}$ of invariant subspaces K for T and for $\forall K_0$
 $\in \mathcal{F}$, the continuity properties i.e. $\bigvee \{K : K \subseteq K_0, K \in \mathcal{F}\}$
 $= K_0 = \bigcap \{K : K \supseteq K_0, K \in \mathcal{F}\}$ が成り立つ。 $\{0\}, H \in \mathcal{F}$ で
 ある。 T strongly reductive より $K \in \mathcal{F}$ は reduce T である
 から、 $C = T^*T - TT^*$ を reduce する。仮定から T not normal
 従って $C \neq 0$ 。一先 $\square$ より C は compact operator である。よって
 finite dimensional non-zero eigen-subspace E が存在する。
 対応する orthogonal proj. P_E は reduced by $\forall K \in \mathcal{F}$ 従って
 $\mathcal{F}' = \{K \cap E : K \in \mathcal{F}\}$ は same continuity properties as
 $\mathcal{F}$ をもつ。これは E が finite dimensionality に矛盾。

Wermer's theorem を先に証明なしで挙げたが、次の定理
 の special case になっている。(証明は省略)

$\square$ t : an element of a C^* -algebra とする。次は同
 値である。

- (1) t が normal で、 $\sigma(t)$ が 平面を含まないし、内点も
 持っていない。
- (2) t^* が the limit in norm of a sequence of polynomials
 in t .

ⓧⅪ N : normal, T : strongly reductive, $\sigma(N) \subset \sigma_e(T)$
 $\Rightarrow N$: reductive.

Proof. T, N 共に same Hilbert space H 上の operator と
 してよい. P を orthogonal projection on H s.t. $(I-P)NP=0$
 とする. $PN-NP=0$ を示そう. H^∞ : the orthogonal direct
 sum of copies of H , indexed by the non-negative integers.
 H^∞ 上の operators を次のように define. $S = T \oplus N \oplus N \oplus \dots$,
 $P_1 = 0 \oplus P \oplus P \oplus \dots$, $P_2 = 0 \oplus 0 \oplus P \oplus P \oplus \dots$, $P_3 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus P \oplus P \oplus \dots$,
 and so on. left spectrum の characterization (3.11
 Ⅲ, Ⅳより). T は "strongly normal on $\sigma_e(T)$ " in the sense
 of Stampfli [St:2] i.e. for $\forall \lambda \in \sigma_e(T)$, $\exists$ orthonormal
 sequence of vectors $\{\varphi_n\}$ s.t. $\|(T-\lambda)\varphi_n\| \rightarrow 0$ and
 $\|(T^*-\bar{\lambda})\varphi_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) である. 従って Stampfli の定
 理 [St:2] より $\exists$ isometric isomorphism $W: H \rightarrow H^\infty$,
 $\exists$ compact operator K on H^∞ s.t. $WTW^* = S + K$.
 T : strongly reductive より $S+K$ は Strongly reductive とは
 ない. $\|(I-P_n)(S+K)P_n\| \leq \|(I-P_n)SP_n\| + \|(I-P_n)KP_n\| =$
 $\|(I-P)NP\| + \|(I-P_n)KP_n\| \leq \|KP_n\|$ 故に $P_n \rightarrow 0$ strong-
 ly as $n \rightarrow \infty$, K : compact であるから $\|KP_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).
 従って $\|(I-P_n)(S+K)P_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), Strong reductivity
 より $\|P_n(S+K) - (S+K)P_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 故に 3.7.

$\|P_n(S+K) - (S+K)P_n\| \geq \|P_n S - S P_n\| - \|P_n K\| - \|K P_n\| =$
 $\|P_n - N P_n\| - \|P_n K\| - \|K P_n\|$, 先示したように $\|P_n K\| \rightarrow 0$
 But $\|K P_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ゆえに $P_n - N P_n = 0$.

XII X : compact set in the plane which either divides the plane or has interior $\Rightarrow \exists$ normal operator N which is not reductive and $\sigma(N) \subset X$.

Proof. $\hat{X}$: the union of X and all bounded components of the complement of X . $\hat{X}$ is compact $\mathbb{C}$, interior を持つ.

G : a component of the interior of $\hat{X}$, $\lambda \in G$ とする.

m : the harmonic measure on $\hat{X}$ evaluated at λ [C: p. 107].

とする. m is probability measure $\mathbb{C}$, X の support, $\text{supp } m$,

is G の boundary, ∂G , $\mathbb{C}$. the unique representing measure for the complex homomorphism "evaluation at λ "

on the Dirichlet algebra $R(\hat{X})$ [G: Chap. II] ($::= \mathbb{C}$ $R(\hat{X})$)

is the closure in $C(\hat{X})$ of the set of all rational functions with poles off $\hat{X}$). 2p. 5 for any function $f \in R(\hat{X})$,

$f(\lambda) = \int f(z) dm(z)$. $::= \mathbb{C}$ N is the normal operator of multiplication by z on the Hilbert space $L^2(m)$ とする.

$\sigma(N) = \text{supp } m = \partial G \subset \partial \hat{X} \subset \partial X \subset X$. 今 $H^2(m)$ is the closure in $L^2(m)$ of the set of polynomials とすると.

$H^2(m)$ is invariant under N $\mathbb{C}$. constant function $1 \in H^2(m)$,

But $((N-\bar{\lambda})1)(z) = \bar{z} - \bar{\lambda}$ である. 更に $\|\bar{z} - \bar{\lambda}\|^2 = \int |z - \lambda|^2 dm(z) \geq \text{dist}(\lambda, \partial G)^2 > 0$ 従って $H^2(m)$ は N に reduce し得ない. ゆえに N は not reductive である.

XIII T : strongly reductive $\Rightarrow \sigma(T)$: neither divides the plane nor has interior.

Proof. **V** より, $\sigma_e(T)$ neither divides the plane nor has interior をいえる. これは **XI**, **XII** より従う.

XIV T : normal operator とするとき、次は同値である.

- (1) T : strongly reductive.
- (2) $\sigma(T)$: neither divides the plane nor has interior.
- (3) T^* : the uniform limit of a sequence of polynomials in T .

Proof. **XIII** より, (1) $\Rightarrow$ (2), Strong reductive operator の性質 5. より, (2) $\Rightarrow$ (1), **X** より, (2) $\Leftrightarrow$ (3).

次に algebra の strong reductivity について若干述べておくことにする.

DEFINITION [AFV:3] algebra $\mathcal{O}$ of operators on H が Strongly reductive である $\Leftrightarrow \mathcal{O}^* = \{T^*: T \in \mathcal{O}\} \subset \text{Appr. Alg}[\text{Appr. Lat}(\mathcal{O})] := \mathcal{O}$ for a set $\mathcal{O} \subset B(H)$,
 $\text{Appr. Lat}(\mathcal{O})$: the family of all sequences $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ of

orthogonal projections on H s.t. $\|(I - P_n)TP_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)
for $\forall T \in \mathcal{A}$. それから for a arbitrary family $\mathcal{F}$
of sequences $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ of orthogonal projections on H ,

Appr. Alg ($\mathcal{F}$): the set of all $T \in B(H)$ s.t. $\|(I - P_n)TP_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) for all $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$. この表現を用いると

T が "strongly reductive" である $\Leftrightarrow \mathcal{A}_T = \{p(T) : p = \text{polynomial}\}$ が "strongly reductive algebra" である. と

いうことになる. 先に示したように, Strongly reductive operator は normal であるから $\square{XIV}$ より, 次の成り立つ.

$\square{XV}$ T : strongly reductive $\Rightarrow$ the norm-closure $\overline{\mathcal{A}_T}$ of $\mathcal{A}_T$ in $B(H)$ is already the C^* -algebra generated by T and 1 .

これはもっと一般化できる. (証明なしで挙げておく).

$\square{\text{THEOREM}}$ [AFV:3] $\mathcal{A} \subset B(H)$ is a norm separable strongly reductive commutative algebra containing 1 ($=1_H$) $\Rightarrow$ the norm-closure $\overline{\mathcal{A}}$ of $\mathcal{A}$ = the C^* -algebra generated by $\mathcal{A}$.

参考文献

- [A] C. Apostol, Sur la partie normale d'un ensemble d'opérateurs de l'espace de Hilbert, Acta Math. Hungar., 17(1966), 1-4.

- [AF] C. Apostol and C.-K. Fong, Invariant subspaces for algebras generated by strongly reductive operators, *Duke Math. J.*, 42(1975), 495-498.
- [AFV:1] C. Apostol, C. Foias and D. Voiculescu, Some results on non-quasitriangular operators, IV, *Rev. Roum. Math. Pure. Appl.*, 18(1973), 487-514.
- [AFV:2] C. Apostol, C. Foias and D. Voiculescu, Strongly reductive operators are normal, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 38(1976), 261-263.
- [AFV:3] C. Apostol, C. Foias and D. Voiculescu, On strongly reductive algebras, *Rev. Roum. Math. Pure. Appl.*, 21(1976), 633-641.
- [C] G. Choquet, *Lectures in Analysis, III*, Benjamin, New York, 1969.
- [CF] I. Colojoara and C. Foias, *Theory of generalized spectral operators*, Gordon and Breach, New York, 1968.
- [DP] R. G. Douglas and C. Pearcy, A note on quasitriangular operators, *Duke Math. J.*, 37(1970), 177-188.
- [DPP] J. A. Dyer, E. A. Pederson and P. Porcelli, An equivalent formulation of the invariant subspace conjecture, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78(1972), 1020-1023.
- [FSP] P. A. Fillmore, J. G. Stampfli and J. P. Williams, On the essential numerical range, the essential spectrum, and a problem of Halmos, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 33(1972), 179-192.
- [G] T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- [Hal:1] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, van Nostrand, Princeton, 1967.
- [Hal:2] P. R. Halmos, Capacity in Banach algebras, *Indiana Univ. Math. J.*, 20(1971), 855-863.
- [Har] K. J. Harrison, Strongly reductive operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 37(1975), 205-212.
- [S:1] D. Sarason, Invariant subspaces and unstarred operator algebras, *Pacific J. Math.*, 17(1966), 511-517.
- [S:2] D. Sarason, Weak star density of polynomials, *J. reine angew. Math.*, 252(1972), 1-15.

- [St:1] J. G. Stampfli, Hyponormal operators, Pacific J. Math., 12(1962), 1453-1458.
- [St:2] J. G. Stampfli, Compact perturbations, normal eigenvalues, and a problem of Salinas,
- [W] J. Wermer, On invariant subspaces of normal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 3(1952), 270-277.
- [V] D. Voiculescu, A non-commutative Weyl-von Neumann theorem, Rev. Roum. Math. Pure. Appl., 21(1976), 97-113.