

正の核関数と Bergman 空間

東北大学教養部 望月 望 (Nozomu Mochizuki)

はじめに.

7月29日の講演の概要を §1—§4 に述べ, §5 に, その後にわかったことを若干言及しよう.

Hardy と Littlewood が次を示した (1928, 1932).

U は $\mathbb{D}$ における単位円板, $|z| < 1$, を表す:

定理 A. $f \in H^p(U)$, $0 < p < +\infty$, に対して次が成り立つ:

(1) $p \leq q \leq +\infty$ のとき

$$M_q(f; r) \leq C \cdot \|f\|_p (1-r)^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \quad (0 \leq r < 1).$$

(2) $p < q \leq +\infty$, $p \leq \lambda < +\infty$ のとき

$$\left(\int_0^1 M_q(f; r)^\lambda (1-r)^{\lambda(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1} dr \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq C \cdot \|f\|_p.$$

すなわち, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ は最良の指数である.

John (1970) が, 定理 A の別証明, 及び $\mathbb{R}_+^{n+1}$ における (局) 調和関数に対する類似の結果を与えた. この方法がすぐれている, 以後踏襲されることになる. これは, Poisson 核の評価によって (1) を導いておいて, 次に Marcinkiewicz interpolation theorem を応用して (2) を導くというものである.

$\mathbb{C}^n$ の単位球 B 上の $H^p(B)$ に対して, Mitchell と Hahn (1976), Graham (1981) が次のような定理 A の拡張を行なった (Mitchell-Hahn は, もっと一般の領域で). 以下, $n \geq 1$ とする.

定理 B. $f \in H^p(B)$, $0 < p < +\infty$, に対して次が成り

立つ: $p < q \leq +\infty$, $p \leq \lambda < +\infty$ のとき

$$\left(\int_0^1 M_q(f; r)^\lambda (1-r)^{2(\frac{n}{p} - \frac{n}{q}) - 1} dr \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq C \cdot \|f\|_p.$$

これは更に拡張されたが, その為には定義するのである.

B 上の連続関数 f をとる. $B_k \subset \mathbb{C}^k$ の単位球 ($1 \leq k \leq n$) とする. $z' \in B_k$ のとき $(z', 0'') \in B$ である.

$$M_\infty(f, k; r) := \max_{\zeta' \in \partial B_k} |f(r\zeta', 0'')|, \quad 0 \leq r < 1.$$

$$M_g(f, k; r) := \left(\int_{\partial B_k} |f(r\zeta', 0'')|^g d\sigma_k(\zeta') \right)^{\frac{1}{g}}, \quad 0 < g < +\infty,$$

とする. 二二二, $d\sigma_k$ は ∂B_k 上の測度を表す.

$k=n$ のときは, 単に $M_g(f; r)$ と記すことにする.

Thietz 氏の注意を次に加える ([7]).

定理 C. $f \in H^p(B)$, $0 < p < +\infty$, に対し次が成り立つ:

$p \leq g \leq +\infty$ ($k=n$ のときは $p < g$), $p \leq \lambda < +\infty$ のとき

$$(3) \quad \left(\int_0^1 M_g(f, k; r)^\lambda (1-r)^{\lambda(\frac{n}{p} - \frac{k}{g}) - 1} dr \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq C \cdot \|f\|_p.$$

二二二, $\frac{n}{p} - \frac{k}{g}$ は最良の指数である.

以下, $\delta > -1$ を固定しておく. B 上の可測関数 f が

$$\|f\|_{p, \delta} := \left(\int_B |f(\omega)|^p (1-|\omega|^2)^\delta d\omega \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

を満たすとき, $f \in L^{p, \delta}(B)$ と記す ($d\omega$ は, $\mathbb{R}^{2n}$ 上の Lebesgue 測度). f が B 上の正則関数で

$L^{p, \delta}(B)$ に属するときは, $f \in A^{p, \delta}(B)$ とし,

weighted Bergman space $A^{p,\delta}(B)$ を定義する. Hardy 空間 H^p とこの $A^{p,\delta}$ とは密接な関係と有するので, $A^{p,\delta}$ の関数 f に対して (3) の形の不等式が成り立つのではないかと考えた. その証明を Littlewood の方法で与えようとしたが, これには, Poisson 核の働きをする正の核関数が必要となる. §1 でそのような核関数を定義し, §2 で Hardy-Littlewood 不等式について述べる. §3 で, その応用として $A^{p,\delta}(B)$ の Mackey 位相について述べる. §4 では, 多重円板 U^n の場合に言及する.

§1. Kernel H_δ

B 上の Cauchy 核 $C(z, s) = \frac{C(n)}{(1 - \langle z, s \rangle)^n}$ ($\langle z, s \rangle \neq 1$)
 がい,

$$P(z, s) := \frac{C(z, s) C(s, z)}{C(z, z)} = \frac{C(n) (1 - |z|^2)^n}{|1 - \langle z, s \rangle|^{2n}}$$

$$((z, s) \in B \times B)$$

とあって Poisson 核 $P(z, s)$ が得られる. P は周知の様に, H^p において本質的な役割を演ずる. これと同様のこと $A^{p,\delta}$ で考へるために, まず

次の核(関)数 K_δ を考へる. これは, 1変数 125812
は以前から知られてゐたが, n 変数では Forelli-
Rudin (1974) が言つてゐる.

$$K_\delta(z, w) := A_0 \frac{(1-|w|^2)^\delta}{(1-\langle z, w \rangle)^{n+1+\delta}} \quad ((z, w) \in B \times B),$$

$$すなはち, \quad A_0 = \left(\int_B (1-|w|^2)^\delta d\omega \right)^{-1} \quad \text{とする.}$$

これにより K_δ の定義を与へる:

$$\begin{aligned} \text{定義.} \quad H_\delta(z, w) &:= \frac{K_\delta(z, w) K_\delta(w, z)}{K_\delta(z, z)} \\ &= \frac{A_0 (1-|z|^2)^{n+1+\delta} (1-|w|^2)^\delta}{|1-\langle z, w \rangle|^{2(n+1+\delta)}} \quad ((z, w) \in B \times B). \end{aligned}$$

B 上の関数 f に対して, 積分の意味を持つとす

$$H_\delta[f](z) = \int_B H_\delta(z, w) f(w) d\omega \quad (z \in B)$$

と表すことにする. これに対して, K_δ が基本的で

ある. 特に, (4) が

$$H_\delta[1](z) = 1 \quad (z \in B)$$

であるが, これは $H_\delta[f]$ に関する Jensen の

不等式が成立するので、計算上好都合である。

定理1. $1 \leq p < +\infty$ とする。

(4) $f \in A^{p,\delta}(B)$ に対し, $f(z) = H_\delta[f](z)$ ($z \in B$)

(5) $u \in L^{p,\delta}(B)$, 多重調和, に対し,

$$u(z) \leq H_\delta[u](z) \quad (z \in B).$$

証明は [8] をみ下す。

[注] これは講演では述べなかったが、附記した。

$D = \{(z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \mid \operatorname{Im} z_1 - |z'|^2 > 0\}$ を $\mathbb{C}^n$ 上半平面とす。Cayley 変換 $\Phi(z) = w$:

$$w_1 = \frac{z_1 - i}{z_1 + i}, \quad w_j = \frac{z z_j}{z_1 + i} \quad (2 \leq j \leq n), \quad \text{によって変換}$$

すると、次の容易に得られる。

$$\rho(z, w) = i(\bar{w}_1 - z_1) - 2\langle z', w' \rangle \quad \text{と} \quad (2,$$

$$H_\delta(\zeta, \xi) d\xi = \frac{2^{n-1} A_0 \rho(z, z)^{n+\delta} \rho(w, w)^\delta}{|\rho(z, w)|^{2(n+\delta)}} dw.$$

$$\zeta = z,$$

$$H_\delta^*(z, w) := \frac{2^{n-1} A_0 \rho(z, z)^{n+\delta} \rho(w, w)^\delta}{|\rho(z, w)|^{2(n+\delta)}}$$

と定義する. また, D 上の f に対し

$$\|f\|_{p,\delta} := \left(\int_D |f(z)|^p \rho(z,z)^\delta dz \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

のとき $f \in L^{p,\delta}(D)$ とし, 正則で $L^{p,\delta}(D)$ に属する関数の族を $A^{p,\delta}(D)$ と定義する. このとき, 定理 1 と同様の結果がおりた. また, 次の定理 2 と類似の結果が得られる. 詳細は [8] をみて下さい.

§ 2. $A^{p,\delta}(B)$ に対する Hardy-Littlewood 不等式:

定理 2. $f \in A^{p,\delta}(B)$, $0 < p < +\infty$, に対し 次のとおり:

$p \leq \delta \leq +\infty$, $1 \leq k \leq n$, $p \leq \lambda < +\infty$ のとき,

$$\left(\int_0^1 M_\delta(f, k; r)^\lambda (1-r)^{\lambda \left(\frac{n+1+\delta}{p} - \frac{k}{\delta} \right) - 1} dr \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq C \cdot \|f\|_{p,\delta}.$$

すなわち, 指数 $\frac{n+1+\delta}{p} - \frac{k}{\delta}$ は最良である.

[注] C は f に無関係な定数 (n, k, p, δ, λ には関係する. 同様のことは, 定理 A, B, C についても同じ).

以下, 定理 2 の証明の概略について述べるが, $k=n$

としておく (一般の n のときは, 少しだけ余計に計算する). $\varepsilon = 2$. $M_\delta(f; r)$ と記す.

補題 1. $1 \leq p < +\infty$ とする. $h \in L^{p, \delta}(B)$ に対し

$u = H_\delta[h]$ とおくと, $p \leq q \leq +\infty$ に対して

$$(6) \quad M_\delta(u; r) \leq C \cdot \|h\|_{p, \delta} (1-r)^{-\left(\frac{n+1+\delta}{p} - \frac{n}{q}\right)} \quad (0 \leq r < 1)$$

が成り立つ.

証明. H_δ が具体的にわかっているのて, 評価するのはよい. 詳細は [8] をおこなう.

補題 2. 上と同じ h と u をとると,

$1 < p < q \leq +\infty$, $p \leq \lambda < +\infty$ に対して成り立つ:

$$(7) \quad \left(\int_0^1 M_\delta(u; r)^\lambda (1-r)^{\lambda \left(\frac{n+1+\delta}{p} - \frac{n}{q} \right) - 1} dr \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq C \cdot \|h\|_{p, \delta}.$$

証明. $1 < q < +\infty$ をとっておく ($q = +\infty$ のときも同様).

$[0, 1)$ 上の測度 $d\nu$ を $d\nu(r) = (1-r)^{n+\delta} dr$ で

定める. (当然 $1 \leq p \leq q$ なる p をとる.)

$h \in L^{p, \delta}(B)$ に対し $u = H_\delta[h]$ とし,

$$(Th)(r) := M_\delta(u; r) (1-r)^{-\frac{n}{q}} \quad (0 \leq r < 1)$$

とかく T , operator T ,

$$T: L^{p,\delta}(B) \rightarrow \{[0,1] \text{ 上の可測関数} \}$$

が定義されて, Minkowski 不等式から T は

$$\text{subadditive, } T(h_1+h_2)(r) \leq (Th_1)(r) + (Th_2)(r),$$

なることが分る. 次に, 後に見る様に

$$\text{任意の } \delta > 0 \text{ に対して, } G_\delta := \{r \mid (Th)(r) > \delta\}$$

とかくとき

$$(8) \quad \nu(G_\delta) \leq (C \cdot \|h\|_{p,\delta} \delta^{-1})^p$$

である.

よって, Marcinkiewicz の定理により,

$$1 < p \leq \delta \text{ に対して } \|Th\|_{L^p(\nu)} \leq C \cdot \|h\|_{p,\delta} \text{ である}$$

これは,

$$\left(\int_0^1 M_\delta(u;r)^p (1-r)^{-\frac{p}{\delta}n} (1-r)^{n+\delta} dr \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \|h\|_{p,\delta}$$

というとき, 即ち, (7) が $\lambda = p$ のとき成立するときは

示している. $p < \lambda$ のときは, (6) を使って

$$\begin{aligned} M_\delta(u;r)^\lambda &= M_\delta(u;r)^{\lambda-p} \cdot M_\delta(u;r)^p \\ &\leq \left(C \cdot \|h\|_{p,\delta} (1-r)^{-\left(\frac{n+\delta}{p} - \frac{n}{\delta}\right)} \right)^{\lambda-p} \cdot M_\delta(u;r)^p \end{aligned}$$

とすればよい.

さて (8) を示す. (6) から, $r \in G_\delta$ のとき

$$\delta < C \|h\|_{p,\delta} (1-r)^{-\frac{n+1+\delta}{p}} \quad \text{よって,}$$

$$1 - (C \|h\|_{p,\delta} \delta^{-1})^{\frac{p}{n+1+\delta}} < r < 1 \quad \text{とあるが故,}$$

$$\begin{aligned} V(G_\delta) &\leq \int_{1 - (C \|h\|_{p,\delta} \delta^{-1})^{\frac{p}{n+1+\delta}}}^1 (1-r)^{n+\delta} dr \\ &= \frac{1}{n+1+\delta} (C \|h\|_{p,\delta} \delta^{-1})^p. \end{aligned}$$

さて、定理2の証明 は次の様にある。 $p < q \leq +\infty$ とする。 $|f(z)|^{\frac{p}{2}} \in L^{2,\delta}(B)$ で多重調和故、定理1, (5) から次を得る:

$$|f(z)|^{\frac{p}{2}} \leq H_\delta[|f|^{\frac{p}{2}}](z) =: u(z).$$

$p \leq \lambda < +\infty$ なる λ に對して,

$$M_q(f; r)^\lambda \leq M_{\frac{2q}{p}}(u; r)^{\frac{2\lambda}{p}}$$

であるから 補題2 にあて

p の代りに 2 , q の代りに $2 \cdot \frac{q}{p}$, λ の代りに $2 \cdot \frac{\lambda}{p}$ とおけば 定理2 が得られる。

$p=q$ のときは少し別の計算を必要とする。

(証明終り)

§3. $A^{p,\delta}(B)$ ($0 < p < 1$) の位相.

一般の p に対して

$$|f(z)| \leq C \|f\|_{p,\delta} (1-r)^{-\frac{n+\delta}{p}} \quad (|z| \leq r)$$

であるから, $A^{p,\delta}$ は F -space で $(A^{p,\delta})^*$ は

$A^{p,\delta}$ の ε 分離 1- ε となる. さて,

Shapiro (1976) は, $n=1$ に対して次のようにした:

定理 D. $0 < p < 1$ とする.

$$(9) \quad A^{p,\delta}(U) \subset A^{1, \frac{2+\delta}{p}-2}(U) \text{ で,}$$

$$\|f\|_{1, \frac{2+\delta}{p}-2} \leq C \|f\|_{p,\delta} \quad (f \in A^{p,\delta}).$$

$$(10) \quad \|*\|_{1, \frac{2+\delta}{p}-2} \text{ による } A^{p,\delta} \text{ の位相が,}$$

$(A^{p,\delta}, \|*\|_{p,\delta})^*$ に関する Mackey topology である.

即ち, $(A^{p,\delta}, \tau)^* = (A^{p,\delta})^*$ とある位相 τ のうち,
一番強い, locally convex topology が $\|*\|_{1, \frac{2+\delta}{p}-2}$
による位相である.

この結果を $n \geq 2$ の場合に示したわけに, (10) は
Shapiro の方法を n 次元に翻訳すればその

存在する。しかし、(9)は難しいと思われる。 $n=3$ かつ、定理 2 によればこれは簡単である。

即ち、 $f \in A^{p, \delta}(B)$, $0 < p < +\infty$, $c \geq 1$ とすると、定理 2 の $k=n$ とし、極座標で積分し

$$\begin{aligned} & \left(\int_B |f(z)|^{cp} (1-|z|^2)^{c(n+\delta)-n-1} dz \right)^{\frac{1}{cp}} \\ & \leq C \left(\int_0^1 M_{cp}(f; r)^{cp} (1-r)^{cp(\frac{n+\delta}{p} - \frac{n}{cp})-1} dr \right)^{\frac{1}{cp}} \\ & \leq C \cdot \|f\|_{p, \delta} \end{aligned}$$

から、

$$\|f\|_{cp, c(n+\delta)-n-1} \leq C \cdot \|f\|_{p, \delta},$$

よってまた

$$A^{p, \delta}(B) \subset A^{cp, c(n+\delta)-n-1}(B)$$

となる。故に、特に $0 < p < 1$ のとき $C = \frac{1}{p}$

とある。

$$\|f\|_{1, \frac{n+\delta}{p}-n-1} \leq C \cdot \|f\|_{p, \delta}$$

$$A^{p, \delta}(B) \subset A^{1, \frac{n+\delta}{p}-n-1}(B)$$

を得る。したがって (9) の n 次元版である。

定理 3. $0 < p < 1$ とする.

$(A^{p,\delta}, \|\cdot\|_1, \frac{n+1+\delta}{p} - n - 1)$ が $A^{p,\delta}$ の Mackey topology である.

§4. $A^{p,\delta}(U^n)$ の場合.

Frazier (1972) が次を示した. ただし, 以下の記号を用いる. $I = [0, 1)$, $r = (r_1, \dots, r_n) \in I^n$ に対して $(1-r)^a = \prod_{j=1}^n (1-r_j)^a$ ($a \in \mathbb{R}$), $dr = dr_1 \cdots dr_n$.

定理 E. $f \in H^p(U^n)$, $0 < p < +\infty$, に対して 2 次がある.

かつ: $p < q \leq +\infty$, $p \leq \lambda < +\infty$ のとき

$$\left(\int_{I^n} M_\delta(f; r)^\lambda (1-r)^{\lambda(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - 1} dr \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq C \|f\|_p.$$

$H^p(U^n)$ の代りに $A^{p,\delta}(U^n)$ を考えれば, 上の定理が次の定理 4 (?) の形で成り立つと知られる. ことに, $\delta > -1$ とし

$$d\mu(z) := \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^\delta dz_1 \cdots dz_n$$

により $L^{p,\delta}(U^n)$ を考え, 定理 2. $L^{p,\delta}(U^n)$ に

属する関数の族として $A^{p,\delta}(U^n)$ を定義する.

定理 4 (?) $f \in A^{p,\delta}(U^n)$, $0 < p < +\infty$, とする.
 $p \leq q \leq +\infty$, $p \leq q < +\infty$ のとき

$$\left(\int_{I^n} M_\delta(f; r)^\lambda (1-r)^{\lambda(\frac{2+\delta}{p} - \frac{1}{8}) - 1} dr \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq C \cdot \|f\|_{p,\delta}.$$

ここで, M_δ の定義は どうも 旨く行かぬ. 定理
 E の場合でも 言うて あらう, $h \in L^p(T^n)$ に対し

$u = P[h]$: Poisson 積分, とし, (6) に相当
 するものは 得られる. ($A^{p,\delta}(U^n)$ についても H_δ の $n=1$
 の場合の積分をついて 得られる kernel を使って
 同様). I^n に dv を 適当に 定め, Th を
 適当に 定め (目的とする不等式の 指数から
 逆算して 定める), $\delta > 0$ に対し

$$G_\delta = \{ r \in I^n \mid (Th)(r) > \delta \}$$

とすると, $\nu(G_\delta) \leq C \cdot (\|h\|_p \cdot \delta^{-1})^p$ とある

へは C が $+\infty$ とある.

これが 大変面白いが, 定理 4 (?) は, どう
 証明して いるのか わからぬ.

§ 5. 補遺

その後、泉池氏により、定理 2 は定理 C から積分の計算のみで導かれることが示された。従って定理 2 に代りては、 H^p 及び Marcinkiewicz は要らぬことになる。また、氏はこれと同様な方法で定理 4(?) が成り立つことを示した。

ところで、定理 2 と定理 C については、上のことと逆に定理 2 から定理 C が導かれる。実際、 $p < \infty$ のときは $C > 1$, $Cp < \infty$ なる C をとると [7, Theorem 1, (2)] によつて、

$H^p(B) \subset A^{Cp, Cn-n-1}(B)$; $\|f\|_{Cp, Cn-n-1} \leq C \|f\|_p$
 $(\forall f \in H^p(B))$ となる。よつて、 $A^{Cp, Cn-n-1}$ に対して定理 2 を使えばよい。また、 $p = \infty$, $1 \leq k \leq n-1$ のときは再び [7, Thm. 4, (2)] により

$R_{k,n} f \in A^{p, n-k-1}(B_k)$, $\|R_{k,n} f\|_{p, n-k-1} \leq C \|f\|_p$
 $(\forall f \in H^p(B))$ であつたとき、 B の代りに B_k とし $R_{k,n} f$ に定理 2 を適用すればよい。

このことは、まあどうでもよいことであつた、同様に $1 \leq p \leq \infty$ (D) に対する Hardy-Littlewood の不等式 ([8, Thm. 3]) から、 $H^p(D)$ に関する Hardy-Littlewood が導かれることを附記

しておく. D の場合, $H^p(D)$ に対する Hardy-Littlewood は, B のときと違って 少し面倒だ" と思うので $\alpha = 0$ は若干意味があると思う. (以上)

文 献

- [1] F. Forelli and W. Rudin, Projections on spaces of holomorphic functions in balls, Indiana Univ. Math. J. 24 (1974), 593-602.
- [2] A. P. Frazier, The dual space of H^p of the polydisc for $0 < p < 1$, Duke Math. J. 39 (1972), 369-379.
- [3] J. Graham, The radial derivative, fractional integrals, and the comparative growth of means of holomorphic functions on the unit ball in $\mathbb{C}^n$, Ann. Math. Stud. 100, Princeton Univ. Press, 1981, 171-178.

- [4] J. H. Hardy and J. E. Littlewood, A convergence criterion for Fourier series, *Math. Z.* 28 (1928), 612-634.
- [5] J. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals. II, *Math. Z.* 34 (1932), 403-439.
- [6] J. Mitchell and K. J. Hahn, Representation of linear functionals in H^p spaces over bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$, *J. Math. Anal. Appl.* 56 (1976), 379-396.
- [7] N. Mochizuki, Inequalities of Fejér-Riesz and Hardy-Littlewood, *Tohoku Math. J.* (to appear).
- [8] N. Mochizuki, Positive kernel functions and Bergman spaces, *Tohoku Math. J.* (to appear).

- [7] J. H. Shapiro, Mackey topologies, reproducing kernels, and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces, *Duke Math. J.* 43 (1976), 187-202.