

## 経路積分と超準解析

駿台予備学校 中村 徹 (Toru Nakamura)

Dirac 方程式の基本解が経路にわたる積分として構成できることをはじめに指摘したのは R. P. Feynman である ([1]). その数学的合理化については関数解析の方向から ([2], [3]), あるいは測度論の方向から ([4], [5]) など, 現在に至るまでいろいろな研究がなされている.

ここでは超準解析の方向からのアプローチとして, 経路積分の無限小 random walk 表現を考える. 結果として Feynman の主張がそのままの形で合理化され, 登場する  $\ast$ -測度は  $2 \times 2$  行列値ではあるが, 純虚数 parameter の Poisson 過程に対応するものである. ([6], [7] 参照) とくに電磁場がない場合の基本解は 0 次の Bessel 関数に共役 Dirac 作用素を作用させたものであることが知られているが, それも簡単な計算によって導かれる.

## § 1 定義

2次元時空で、電磁場  $(A_0(t, x), A_1(t, x))$  の中の電子は Dirac 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = \left[ -\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} - ie A_1(t, x) \right) - im\beta - ie A_0(t, x) \right] \psi(t, x) \quad (1)$$

に従って運動する。ここには  $\alpha, \beta$  は  $\alpha^2 = \beta^2 = 1, \alpha\beta + \beta\alpha = 0$  をみたす  $2 \times 2$  エルミット行列で、ここでは

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を選ぶことにする。

2次元時空  $\mathbb{R}^2$  のかわりに無限小間隔の正方格子空間  $\mathbb{L}$  をとり、その上の径路  $X_\omega(\cdot)$  を考える。

定義 1.  $H \in {}^*N \setminus N$  を 1 つ固定し、 $\varepsilon = \frac{1}{H}$  とする。

$$(1) \quad \mathbb{L} = T \times X, \quad T = X = \varepsilon {}^*\mathbb{Z}$$

$$(2) \quad N \in {}^*N \text{ に対し } T_N = \{0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots, N\varepsilon\}, \quad \Omega_N = \{-1, 1\}^{T_N}$$

(3)  $\omega \in \Omega_N$  に対し、 $\mathbb{L}$  の点  $(0, y)$  から  $(N\varepsilon, X_\omega(N\varepsilon))$  へ至る径路  $X_\omega(\cdot)$  を次式で定義する。

$$X_\omega(k\varepsilon) = y + \sum_{l=0}^{k-1} \varepsilon \omega(l\varepsilon) \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

各径路に配分すべき行列値の  $*$ -測度を求めるために、 $A_0 = A_1 = 0$  とした上で次の方針に従って、Dirac 方程式を無限小差分方程式に書き換える。

- (i)  $\frac{\partial}{\partial x}$  が  $\psi$  の第 1 成分に作用するときには後退差分に  
 (ii)  $\frac{\partial}{\partial x}$  が  $\psi$  の第 2 成分に作用するときには前進差分に  
 (iii)  $\frac{\partial}{\partial t}$  はつねに前進差分におきかえる。

その結果,

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t+\varepsilon, x) \\ \psi_2(t+\varepsilon, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(t, x-\varepsilon) \\ \psi_2(t, x-\varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(t, x+\varepsilon) \\ \psi_2(t, x+\varepsilon) \end{pmatrix} - im\beta \begin{pmatrix} \psi_1(t, x) \\ \psi_2(t, x) \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる。式(3)の右辺の第 1 項と第 2 項から

点  $(t, x-\varepsilon)$  と点  $(t+\varepsilon, x)$  を結ぶ線分には  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  を,

点  $(t, x+\varepsilon)$  と点  $(t+\varepsilon, x)$  を結ぶ線分には  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  を

それぞれ配置すればよいことがわかる。したがって質量  $m$  が 0 の場合, 1 つの径路に対してそれを形成している各線分の上の規則で行列  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  もしくは  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  を配置しておき, それらを順に掛け合せて得られる行列をこの径路に配置することになる。

$m$  と  $A_0, A_1$  が 0 でない場合, 径路上の各頂点でその情報

$$\begin{aligned} V(P_k) &= \exp [-i\varepsilon (e^* A_0(P_k) - e\alpha^* A_1(P_k) + m\beta)] \\ &\simeq 1 - i\varepsilon (e^* A_0(P_k) - e\alpha^* A_1(P_k) + m\beta) \end{aligned}$$

を捨てることとなるので, まとめて次の定義を得る。

## 定義 2

- (1) 径路  $X_\omega$  の上の頂点  $(k\varepsilon, X_\omega(k\varepsilon))$  を  $P_k$  とし, 2 点  $P_k, P_{k+1}$

を結ぶ線分を  $l_k$  とするとき,

$$V_0(P_k) = \begin{cases} 1 & (k \in K_1) \\ -i\varepsilon m \beta & (k \in K_2) \end{cases},$$

$$L(l_k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (l_k \text{ の傾きが } 1 \text{ のとき}) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (l_k \text{ の傾きが } -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし

$K_1 = \{k : \text{径路 } X_\omega \text{ が点 } P_k \text{ で向きを変えない}\}$

$K_2 = \{k : \text{径路 } X_\omega \text{ が点 } P_k \text{ で向きを変える}\}$

(2) 点  $P_0, P_1, \dots, P_N$  をつなぐ径路  $X_\omega$  に対して, その  $*$ -測度

$\mu(X_\omega)$  を

$$\mu(X_\omega) = L(l_{N-1}) V_0(P_{N-1}) L(l_{N-2}) V_0(P_{N-2}) \cdots V_0(P_1) L(l_0) \quad (4)$$

で定める.

ここには  $V_0(P_k)$  の定義を  $k \in K_1$  と  $k \in K_2$  でわけたのは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (1 - i\varepsilon m \beta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (1 - i\varepsilon m \beta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (1 - i\varepsilon m \beta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -i\varepsilon m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (1 - i\varepsilon m \beta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -i\varepsilon m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

が成り立つからで, これからわかるように質量  $m$  は径路の向きを変えるという役割を果たしている.

こうして得られた径路空間上の  $2 \times 2$  行列値の  $*$ -有限加法的測度による  $*$ -有限和 ( $*$ -積分) として, Dirac 方程式の解  $\psi$

を次のように構成することができ.

### 定義 3

- (1)  $V(P_k) = 1 - i\varepsilon (e^* A_0(P_k) - e\alpha^* A_1(P_k) + m\beta)$  とし,  $K(X_\omega)$  を
- $$K(X_\omega) = L(l_{N-1}) V(P_{N-1}) L(l_{N-2}) V(P_{N-2}) \cdots V(P_1) L(l_0) \quad (5)$$

で定義する.

- (2) 初期関数  $f_i(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ( $i=1, 2$ ) が与えられたとき

$$\begin{pmatrix} \Psi_1(t, x) \\ \Psi_2(t, x) \end{pmatrix} = \sum_{X_\omega} K(X_\omega) \begin{pmatrix} f_1(X_\omega(0)) \\ f_2(X_\omega(0)) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi_1(t, x) \\ \psi_2(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0\Psi(t, x) \\ {}^0\Psi(t, x) \end{pmatrix} \quad (6)$$

とする. ただし  $t \in T$ ,  $x \in X$  は  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  から

$$t \leq t < t + \varepsilon, \quad x \leq x < x + \varepsilon$$

で定める. また, 和  $\sum_{X_\omega}$  は  $X_\omega(t) = x$  をみたすすべての  $X_\omega$

にわたる和とする. これは\*-有限和である.

## § 2 定理と証明

定理 1  $t \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t = N\varepsilon \in T_N$  とする.  $\omega \in \Omega_N$  からつくられる径路  $X_\omega$  の全体を  $D$ , そのうちでちょうど  $n$  回だけ向きを変える径路の全体を  $D_n$  とする. 各  $X_\omega \in D$  に対する \*-測度  $\mu(X_\omega)$  は

$$\mu(X_\omega) = (\text{スカラー}) \times (\text{行列}), \quad (\text{行列}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形をしているので, このスカラー部分を  $\tilde{\mu}(X_\omega)$  とする.

このとき,  $\tilde{\mu}(D_n) = \sum_{\omega \in D_n} \tilde{\mu}(X_\omega)$  と  $\tilde{\mu}(D) = \sum_{\omega \in D} \tilde{\mu}(X_\omega)$  について

$$\frac{\tilde{\mu}(D_n)}{\tilde{\mu}(D)} \simeq e^{\frac{imt}{n!} (-imt)^n} \quad (7)$$

が成り立つ.

証明.  $X_\omega \in D_n$  のとき  $\tilde{\mu}(X_\omega) = (-im\varepsilon)^n$ ,  $\varepsilon = \frac{t}{N}$  であるから

$$\tilde{\mu}(D_n) = \binom{N}{n} (-im\varepsilon)^n = \frac{(-im\varepsilon)^n}{n!} \frac{N!}{(N-n)! N^n}$$

であるが,  $N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ならば

$$\frac{N!}{(N-n)! N^n} = (1 - \frac{n-1}{N}) (1 - \frac{n-2}{N}) \cdots (1 - \frac{1}{N}) \simeq 1$$

となる. したがって

$$\tilde{\mu}(D_n) \simeq \frac{(-im\varepsilon)^n}{n!} \simeq \frac{(-imt)^n}{n!}$$

である. これを

$$\tilde{\mu}(D) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} (-im\varepsilon)^n = (1 - im\varepsilon)^N \simeq e^{-imt}$$

を用いて (7) を得る.

(証明終)

通常, parameter  $m$  の Poisson 過程  $X(t)$  に対する確率測度  $\mu^m$  とは,  $X(0) = 0$  を出発する非減少かつ右連続な階段径路  $X: [0, t] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  の上に定義された確率測度であって

$$\int_{X(t)=n} d\mu^m(X) = e^{-mt} \frac{(mt)^n}{n!} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

をみたす. この式と (7) を比べると, 定理 1 は我々の  $\mu$ -測度が純虚数 parameter  $-im$  の Poisson 過程に対応していることを示している.

定理 2  $A_1, A_2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R})$  つまりそれぞれ 2 階までの連続な (偏) 導関数をもつとすると, 定義 3 (6) 式で与えられる  $\psi(t, x) = \begin{pmatrix} \psi_1(t, x) \\ \psi_2(t, x) \end{pmatrix}$  は 2 次元時空の Dirac 方程式 (1) の初期条件  $\begin{pmatrix} \psi_1(0, x) \\ \psi_2(0, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$  をみたす古典解となる.

証明. 長くなるので概略を述べるにとどめる. 詳しくは, [8], [9] 参照.

(i)  $X_\omega$  が向きを変える回数を  $l$  とすると

$$\|K(X_\omega)\| \leq (1 + 2c\varepsilon)^{N-l} (m\varepsilon)^l \leq c'(m\varepsilon)^l, \quad c, c' \in \mathbb{R} \quad (8)$$

という評価式が成り立つので,  $X_\omega(N\varepsilon) = \pm$  をみたす  $X_\omega$  について

$$\sum_{X_\omega} \|K(X_\omega)\| \leq \sum_{l=0}^N c'(m\varepsilon)^l \binom{N}{l} \leq c' e^{m\varepsilon N}$$

となり,  $\Psi(t, \pm)$  が近標準, つまりその標準部分が存在する.

(ii)  $X_\omega$  を空間軸  $X$  方向に  $\pm\varepsilon$  だけ平行移動した経路を  $X_\omega^\pm$  とするとき,

$$\|K(X_\omega) - K(X_\omega^\pm)\| \leq c\varepsilon (m\varepsilon)^l \quad (9)$$

$$\|K(X_\omega^+) + K(X_\omega^-) - 2K(X_\omega)\| \leq c\varepsilon^2 (m\varepsilon)^l \quad (10)$$

という評価式が (8) から得られる ( $c \in \mathbb{R}$  は  $(t, x)$  がコンパクト集合を動く限り  $X_\omega, \pm, \pm$  に依存しない定数).

同様に  $X_\omega$  を時間軸  $T$  方向に  $\varepsilon, 2\varepsilon$  だけ平行移動した経路  $X_{\omega, +}, X_{\omega, 2+}$  についても

$$\|K(X_\omega) - K(X_{\omega,+})\| \leq c\varepsilon (m\varepsilon)^l, \quad \|K(X_\omega) - K(X_{\omega,2+})\| \leq c\varepsilon (m\varepsilon)^l \quad (11)$$

$$\|K(X_{\omega,2+}) + K(X_{\omega,+}) - 2K(X_\omega)\| \leq c\varepsilon^2 (m\varepsilon)^l \quad (12)$$

が成り立つ。

$$(iii) \quad D_T \Psi(t, x) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \Psi_1(t+\varepsilon, x) - \Psi_1(t, x) \\ \Psi_2(t+\varepsilon, x) - \Psi_2(t, x) \end{pmatrix}$$

$$D_X \Psi(t, x) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \Psi_1(t, x) - \Psi_1(t, x-\varepsilon) \\ \Psi_2(t, x+\varepsilon) - \Psi_2(t, x) \end{pmatrix}$$

とすると

$$D_T \Psi(t, x) = -\alpha D_X \Psi(t, x) - i(e^* A_0 - e \alpha^* A_1) \begin{pmatrix} \Psi_1(t, x-\varepsilon) \\ \Psi_2(t, x+\varepsilon) \end{pmatrix} \\ - i m \beta \begin{pmatrix} \Psi_1(t, x+\varepsilon) \\ \Psi_2(t, x-\varepsilon) \end{pmatrix} \quad (13)$$

が成り立つ。ただし、 $A_0, A_1$  の中の  $T$  座標,  $X$  座標の値はそれらがスカラーとして掛かる  $\Psi_i$  の中のものと一致するとする。

(9) ~ (12) を用いると  $D_X \Psi, D_T \Psi$  が近標準であること及び

$$\|D_X \Psi(t, x+\varepsilon) - D_X \Psi(t, x)\| < c\varepsilon \quad (14)$$

$$\|D_T \Psi(t+\varepsilon, x) - D_T \Psi(t, x)\| < c\varepsilon \quad (15)$$

がいえろ。

(iv) (14), (15) を用いると直ちに,  $k \in \mathbb{N}, k\varepsilon \simeq 0$  のとき

$$\frac{1}{k\varepsilon} (\Psi(t, x+k\varepsilon) - \Psi(t, x)) \simeq D_X \Psi(t, x) \quad (16)$$

$$\frac{1}{k\varepsilon} (\Psi(t+k\varepsilon, x) - \Psi(t, x)) \simeq D_T \Psi(t, x) \quad (17)$$

であることが導かれる。



(V)  $\psi(t, x)$  の  $t$ -偏微分可能性を証明する.

$(t, x)$  を固定する. 各  $a \in \mathbb{R}$  ( $a > 0$ ) に対して internal な集合

$$M_a = \{ u \in {}^*\mathbb{R}^+ : (|k\varepsilon| < u \text{ かつ } k \in {}^*\mathbb{Z}) \text{ ならば}$$

$$\left\| \frac{1}{k\varepsilon} (\Psi(t+k\varepsilon, x) - \Psi(t, x)) - D_T \Psi(t, x) \right\| < a \}$$

を考えると (17) より  $M_a$  は正の無限小数をすべて含む. したがって延長定理から  $M_a$  はある  $d \in \mathbb{R}^+$  を要素として含む.  $M_a$  の定め方と (17) から

$$\left\| \frac{1}{k\varepsilon} (\Psi(t+k\varepsilon, x) - \Psi(t, x)) - {}^o D_T \Psi(t, x) \right\| < 2a \quad (18)$$

である. 一方,  $k \in \mathbb{R}^+$  のとき  $t+k = t+l\varepsilon$  とすると  $\frac{l\varepsilon}{k} \simeq 1$  なので,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} (\psi(t+k, x) - \psi(t, x)) &= \frac{1}{k\varepsilon} ({}^o \Psi(t+l\varepsilon, x) - {}^o \Psi(t, x)) \frac{l\varepsilon}{k} \\ &\simeq \frac{1}{l\varepsilon} (\Psi(t+l\varepsilon, x) - \Psi(t, x)) \quad (19) \end{aligned}$$

となる. (18) と (19) から任意の  $a \in \mathbb{R}^+$  に対して前述の  $d \in \mathbb{R}^+$  をとると,  $|k| < d$  をみたすすべての  $k \in \mathbb{R}$  に対して

$$\left\| \frac{1}{k} (\psi(t+k, x) - \psi(t, x)) - {}^o D_T \Psi(t, x) \right\| < 3a$$

となる. したがって  $\psi(t, x)$  は  $t$ -偏微分可能であって

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = {}^o D_T \Psi(t, x)$$

が成り立つ.

$x$ -偏微分についても全く同様であって, それらと (13) から  $\psi$  が Dirac 方程式の解となることは直ちにわかる. 初期条件

をみたすことは定義から明らか.

(証明終)

なお, 証明は述べないが, 次の式が成り立つことも簡単に示されることを付記しておく.

$$\|K(X_\omega) - \exp[-i \int_0^t \{e^* A_0(s, X_\omega(s)) ds - e^* A_1(s, X_\omega(s)) dX_\omega(s)\}] \mu(X_\omega)\| \leq c \varepsilon (m \varepsilon)^n, \quad c \in \mathbb{R}$$

定理 3 定義 3 で構成した経路積分は  $A_0 = A_1 = 0$  のとき Dirac 方程式の基本解

$$K_0(t, x; 0, 0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} - i m \beta \right) \{ J_0(m \sqrt{t^2 - x^2}) \theta(t - |x|) \}$$

を与える.  $J_0$  は 0 次の Bessel 関数,  $\theta(u) = \begin{cases} 1 & (u > 0) \\ 0 & (u \leq 0) \end{cases}$

とする.

証明.  $\Psi(t, x) = \sum_{\xi} \frac{1}{\varepsilon} \sum_{X_\omega} K(X_\omega) f(\xi) \cdot \varepsilon$  と分解し,

$$\frac{1}{\varepsilon} \sum_{X_\omega} K(X_\omega) = \tilde{K}(t, x; 0, \xi) \text{ とおく.}$$

$t = n\varepsilon$ ,  $x = l\varepsilon$ ,  $y = m\varepsilon$  とおくとき,  $m$  が偶数 (奇数) ならば  $l - m$  が偶数 (奇数) である  $m$  に対してのみ  $K(t, x; 0, m\varepsilon)$  が考えられ, それ以外の  $m$  に対して  $K(t, x; 0, m\varepsilon) = 0$  となるので

$$\Psi(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} \tilde{K}(t, x; 0, \xi_0 + 2k\varepsilon) * f(\xi_0 + 2k\varepsilon) \cdot 2\varepsilon$$

と変形した上で

$$\Psi(t, x) = \int K_0(t, x; 0, y) f(y) dy$$

と比較しなければならぬ。つまり

$$K_0(t, x; 0, y) = \frac{1}{2} {}^0 \left[ \tilde{K}(t, x; 0, y) + \tilde{K}(t, x; 0, y + \varepsilon) \right]$$

である。この右辺の第1項か第2項のいずれかは0である。

以下、簡単のため  $n$  と  $l$  の偶奇性が一致しているとして

$$K_0(t, x; 0, 0) = {}^0 \left\{ \frac{1}{2} \tilde{K}(t, x; 0, 0) \right\} = {}^0 \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{\substack{X_\omega \\ (X_\omega(0)=0, X_\omega(t)=x)}} K(X_\omega) \right\}$$

について考える。

定義から明らかに

$$\tilde{K}(t, x; 0, 0) = \tilde{K}^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \tilde{K}^{(2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \tilde{K}^{(3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \tilde{K}^{(4)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形をしていて、各  $\tilde{K}^{(i)}$  はそれぞれ

(i) はじめ右上り、最後も右上りの径路

(ii) はじめ右下り、最後は右上りの径路

(iii) はじめ右上り、最後は右下りの径路

(iv) はじめ右下り、最後は右下りの径路

からの寄与である。

$\tilde{K}^{(1)}$  を求める。(i)の形の径路で向きを2回変えるものから  $(-im\varepsilon)^{2k}$  が係数としてでるので

$$\tilde{K}^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_k (-im\varepsilon)^{2k} \times (\text{そのような径路の総数})$$

である。経路の総数を  $N_k$  とすると、 $N_k$  は

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = n_1 \\ y_1 + y_2 + \dots + y_k = n_2 \end{cases} \quad (n_1 + n_2 = n, n_1 - n_2 = l)$$

をみたす 1 以上の整数の組  $(x_1, \dots, x_{k+1}, y_1, \dots, y_k)$  の総数に一致するので

$$N_k = \frac{(n_1-1)!}{k! (n_1-1-k)!} \frac{(n_2-1)!}{(k-1)! (n_2-k)!} = \frac{A}{k! (k-1)!}, \quad A = \frac{(n_1-1)! (n_2-1)!}{(n_1-1-k)! (n_2-k)!}$$

である。(8) を用いると折れ曲がる回数  $k$  を 1 つの固定した無限大数以下に制限してもよいことがいえるので、それを  $P$  にしておく。  $T$  に対し  $P < \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$  にとる。

$(t, x)$  が光円錐上にない場合、つまり、 $t^2 - x^2 > 0$  のときを考えると、 $n_1 = \frac{1}{2\varepsilon} (t+x)$ ,  $n_2 = \frac{1}{2\varepsilon} (t-x)$  はいずれも  $\frac{1}{\varepsilon}$  つまり  $n$  や  $l$  と同じ order の無限大数である。したがって、 $A$  を  $n_1^k n_2^{k-1}$  に置きかえることができる。実際

$$\left| \log \frac{A}{n_1^k n_2^{k-1}} \right| \leq \left| \log \left( 1 - \frac{1}{n_1} \right) \right| + \dots + \left| \log \left( 1 - \frac{k}{n_1} \right) \right| + \left| \log \left( 1 - \frac{1}{n_2} \right) \right| + \dots + \left| \log \left( 1 - \frac{k-1}{n_2} \right) \right|$$

について、 $k$  の限界  $P$  を  $n_1, n_2$  に比べて充分小さくしてあるので、この右辺は

$$2 \left( \frac{1}{n_1} + \dots + \frac{k}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{k-1}{n_2} \right) < \frac{(P+1)^2}{n_1} + \frac{P^2}{n_2}$$

でおさえられる。したがって

$$n_1^k n_2^{k-1} \exp \left[ -\frac{(P+1)^2}{n_1} - \frac{P^2}{n_2} \right] < A \leq n_1^k n_2^{k-1}$$

が成り立ち、この式から  $A$  を  $\eta_1^k \eta_2^{k-1}$  に置きかえたときの  $\tilde{K}^{(1)}$  の値は高々

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^p (-im\varepsilon)^{2k} \frac{\eta_1^k \eta_2^{k-1}}{k!(k-1)!} \left( \frac{(p+1)^2}{n_1} + \frac{p^2}{n_2} \right) \right| \\ & \leq \left( \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!(k-1)!} (m\varepsilon n_1)^k (m\varepsilon n_2)^{k-1} \right) \left( \frac{(p+1)^2}{n_1} + \frac{p^2}{n_2} \right) \\ & \leq C \left( \frac{(p+1)^2}{n_1} + \frac{p^2}{n_2} \right) \simeq 0 \end{aligned}$$

しか変化しない。以上より

$$\begin{aligned} \tilde{K}^{(1)} & \simeq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\eta_1^{k+1} \eta_2^k}{(k+1)! k!} (-im\varepsilon)^{2k+2} \\ & = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)! k!} \left( m \sqrt{n_1 \varepsilon} \sqrt{n_2 \varepsilon} \right)^{2k+1} \sqrt{\frac{\eta_1 \varepsilon}{n_2 \varepsilon}} m \\ & \simeq -m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)! k!} \left( \frac{m}{2} \sqrt{t^2 - x^2} \right)^{2k+1} \sqrt{\frac{t+x}{t-x}} \quad (p \text{ は無限大数なので}) \\ & = -m \sqrt{\frac{t+x}{t-x}} J_1(m \sqrt{t^2 - x^2}) \\ & = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) J_0(m \sqrt{t^2 - x^2}) \end{aligned}$$

同様に  $\tilde{K}^{(2)}$ ,  $\tilde{K}^{(3)}$ ,  $\tilde{K}^{(4)}$  を求めると

$$\tilde{K}^{(2)} \simeq -im J_0(m \sqrt{t^2 - x^2}), \quad \tilde{K}^{(3)} \simeq -im J_0(m \sqrt{t^2 - x^2})$$

$$\tilde{K}^{(4)} \simeq \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right\} J_0(m \sqrt{t^2 - x^2})$$

を得る。以上をまとめると  $t^2 - x^2 > 0$  のとき

$$K_0(t, x; 0, 0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} - im\beta \right) J_0(m \sqrt{t^2 - x^2})$$

となる。

$$t = |x| \text{ のときは } K_0(t, x; 0, 0) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (t=x) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (t=-x) \end{cases}$$

$t < |x|$  のときは  $K_0(t, x; 0, 0) = 0$  であるからこれらを  $\theta$  関数を用いてまとめると

$$K_0(t, x; 0, 0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} - im\beta \right) \left\{ J_0(m\sqrt{t^2 - x^2}) \theta(t - |x|) \right\}$$

と得る.

(証明終)

### References

- [1] R.P. Feynman & A. Hibbs : Quantum mechanics and path integrals, McGraw-Hill, New York (1965)
- [2] B. Simon : Functional integration and quantum physics, Academic Press (1979)
- [3] D. Fujiwara : A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation, J. D'Analyse Mathématique 35 (1979)
- [4] E. Nelson : Feynman integrals and the Schrödinger equation, J. Math. Phys. 5 (1964)
- [5] T. Ichinose & H. Tamura : Path integral approach to relativistic quantum mechanics — Two-dimensional Dirac equation —, Suppl. Prog. Theor. Phys. 92 (1987)

- [6] B. Garreau, T. Jacobson, M. Kac & L.S. Schulman : Relativistic extension of the analogy between quantum mechanics and Brownian motion, *Phy. Rev. Lett.* 53 (1984)
- [7] B. Garreau & L.S. Schulman : Dirac equation path integral : Interpreting the Grassmann variables, *Nuovo Cimento D11* (1989)
- [8] T. Nakamura : A nonstandard representation of Feynman's path integrals, *J. Math. Phys.* 32 (1991)
- [9] 中村 徹 : 「超導解析と物理」 日本評論社 (近刊)