

Combinatorial Prebundle

都立大

加藤 十吉

1. Prebundle.

定義: P を多面体, $p \in P$ の一点とする. (P, p) が prebundle とは, 次から成る triple $E = \{E, K, \Sigma\}$ のことである.

- (1) E ; 多面体 (全空間)
- (2) K ; 複体 (底複体)
- (3) Σ ; 次の4つの条件 (a)~(d) をみたす対 (A, f) の集まり. (A 上の自明化とよばれる)
 - (a) 各対 (A, f) は K の単体 A と, PL embedding f ; $A \times P \rightarrow E$ から成る.
 - (b) 各単体 $A \in K$ に対し, 少なくとも1つの対 (A, f) が存在し, $\bigcup_{(A, f) \in \Sigma} f(A \times P) = E$ となる.
 - (c) $(A, f), (B, g) \in \Sigma$ で, $A \cap B$ が空でない単体 C なら, $f(C \times P) = g(C \times P)$ かつ $f|_{C \times \{p\}} = g|_{C \times \{p\}}$.

(d) Σ は (c) に関して最大である。

もう1つの (P, p) prebundle $E' = \{E', K, \Sigma'\}$ が、 E に同型とは、PL 同相写像 $h: E \rightarrow E'$ が存在し、 $\forall (A, f) \in \Sigma, \forall (A, g) \in \Sigma'$ に対して $h \circ f(A \times P) = g(A \times P)$ かつ、 $h \circ f|_{A \times \{p\}} = g|_{A \times \{p\}}$ となることをいう。(詳しくは [5] 参照のこと)

(例) 積 prebundle.

積多面体 $|K| \times P$ は、 $(\forall A \in K) A \times P \subset |K| \times P$ なる包含写像をとれば、これを A 上の目明化として、prebundle の構造をもつことになる。これを積 prebundle と呼び単に、 $K \times (P, p)$ と表わす。

P prebundle という概念も、 (P, p) prebundle と同様に (但し、 p に関する条件をとり去って) 定義される。上の例からわかるように、prebundle とは積多面体の抽象である。以前から考えられていた fibre bundle は fibre structure (即ち、projection) をも抽象しているが、prebundle ではそれまで抽象しない。むしろ prebundle は常に fibre bundle となるかという点に興味がある。念のため、PL-category の fibre bundle を次に定義しておく。 (P, p) bundle とは、図式 $B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B$ で、

(i) E, B は多面体で、全空間、底空間と呼ばれ、

(2) PL 写像 $j; E \rightarrow B$ は PL 写像 $i; B \rightarrow E$ に関し

て次の局所自明条件を満たす。

B の各点 x_0 に対し, x_0 の B における近傍 U 及び

PL 同相写像 $f; U \times P \rightarrow j^{-1}(U)$ が存在し, $j \circ f($

$x, y) = x, \quad f(x, p) = i(x) \quad (\forall x \in U, \forall y \in P)$

(P, p) bundle の理論では, induced bundle, covering homotopy theorem 等の general theory が成立している。とくに, B のある単体分割 K に関して, その underlying prebundle が得られる。この逆が可能か? 即ち, いかなる (P, p) prebundle もある (P, p) bundle の underlying prebundle となるか? という問題は後でわかるように否定される。

(P, p) bundle の主 bundle の作り方は, Milnor の microbundle の C.S.S. 主 bundle の作り方と全く同様にして,

(isomorphism germ を isomorphism そのものにおきかえて) 定義される。prebundle の主バンドルは, C.S.S. bundle ではなく, 抽象複体の bundle (a.s. bundle) を考えることによって定義される。

定義; (P, p) prebundle の構造群 $PR(P, p)$.

$PR(P, p)$ の k simplex とは, 積 prebundle $\Delta_k \times (P, p)$ の同型写像 $h; \Delta_k \times (P, p) \rightarrow \Delta_k \times (P, p)$ であり, Δ_k の

face Δ' に対し対応する face $k|\Delta' \times (P, p)$ をもつとする。
 但し, Δ_k は標準的な単体および, それを cover する複体を表
 わすとする。この様にして, $PR(P, p)$ は抽象複体の構造を
 もつ。しかし, degeneracy operator は自然には決らぬ。
 ふうのやり方では, standard mistake により PL cate-
 gory を出してしまうからである。幸いなことに, $PR(P, p)$
 の特殊性から, homotopy group $\pi_k(PR(P, p))$ が定義で
 きる。即ち, Kan の combinatorial method を模倣すれば
 良い [4]。そのとき, Kan の拡大条件が $PR(P, p)$ に対し
 成立し, Kan が degeneracy operator を使っているところ
 が初等的な trick によって PL 同相写像の性質で書きか
 えられぬのを見ればよい。

prebundle の主 bundle は a.s. $PR(P, p)$ bundle とし
 て定義される。そして, prebundle を trivialize するた
 めの障害の理論が係数群 $\pi_k(PR(P, p))$ で論じられる。

Notation :

J^n : n -cube ($[-1, 1] = J$ の n 重積)

$0 = (0, \dots, 0) \in J^n$

とおき, prebundle の構造群を次の様にかく。

$$PR(J^n, 0) = PR_n$$

$$PR(\dot{J}^n, 0) = \dot{PR}_n$$

$$PR(j^n, (0^{n-1}, 1)) = \dot{PR}_{*n}$$

$$PR(\dot{j}^n, 0) = \dot{PR}_n$$

(j^n は J^n の境界 $(n-1)$ sphere, $\dot{j}^n$ は J^n の内部 (R^n と PL 同相))

これらの間に次の関係がある。

$$PR_n \simeq \dot{PR}_n \quad (\simeq \text{は weak homotopy equivalence})$$

これは, join extension argument で示される。

$$\dot{PR}_{*n} \simeq PR_{n-1}$$

これは, relative regular neighborhood の一意性により示される。

$\pi_k(\dot{PR}_n, \dot{PR}_{*n}) \cong 0 \quad (k \leq n-2)$ がすべての n についていえる。この場合は $n \geq 4$ or $k \geq 2$ のときは, Zeeman の unknotting theorem で, $k=1, n=3$ のときは Gluck の結果 [1] による。

かくて, 安定定理

$$\pi_k(PR_n) \cong \pi_k(PR_{k+2}) \quad (\forall n \geq k+2)$$

が得られる。

2. 法 prebundles

$(J^n, 0)$ prebundle を n prebundle と呼ぼう。PL-embedding $f: M \rightarrow W$ (M, W ; PL-manifolds) が M の単体分割 K に対して法 prebundle をもつとは, n prebundle

$N; K \xrightarrow{f} N(\Sigma)$ (f の K 上の法 prebundle) が, N が $f(M)$ の W における近傍となる様に存在するときをいう。このとき, N は $f(M)$ の W における regular neighborhood で, f は locally flat である。次の法 prebundle の存在定理 theorem 1 は locally flat PL manifold pair の regular neighborhood の dual cell pair decomposition に目をつけ, 更に, relative regular neighborhood の理論から出る球面上の法 prebundle の一意性定理 theorem 2 を使って証明される。

Theorem 1.

PL-embedding $f: M \rightarrow W$ (M, W ; PL-manifolds) がいかなる M の単体分割に対しても法 prebundle をもつための必要十分条件は, f が locally flat であることである。

Theorem 2.

K を PL- m sphere S^m の任意の単体分割とする。いかなる PL embedding $f: S^m \rightarrow W$ も, 次の意味で高々一意的に法 prebundle をもつ。

もし, $N_i; K \xrightarrow{f} N_i(\Sigma_i)$, $i=1, 2$ が f の K 上の法 prebundle なら, PL ambient isotopy $F: W \rightarrow W$ が存在して, F/N_1 は N_1 から N_2 への同型写像となる。

theorem 1 により, locally flat PL embedding に対す

る法 prebundle の存在は、係数群 $\pi_k(PR_n, \pi L_n)$ の障害の理論で論じられる。(但し、 πL_n は $(J^n, 0)$ bundle の構造群を表わす。)

次の対 $(PR_n, \pi L_n)$ の homotopy exact sequence を眺めながら、theorem 2 を使うと、 $k+1$ sphere の locally flat embedding に対する法 prebundle の存在および一意性の判定条件が準同型写像 $i_k; \pi_k(\pi L_n) \rightarrow \pi_k(PR_n)$ により記述できる。

$$\cdots \xrightarrow{j_{k+1}} \pi_{k+1}(PR_n, \pi L_n) \xrightarrow{\partial_{k+1}} \pi_k(\pi L_n) \xrightarrow{i_k} \pi_k(PR_n) \xrightarrow{j_k} \pi_k(PR_n, \pi L_n) \rightarrow \cdots$$

Theorem 3.

$k+1$ sphere S^{k+1} の $k+1+n$ sphere S^{k+1+n} の standard PL embedding は trivial な法 cell bundle しか持たない。 $\Leftrightarrow \text{Ker}(i_k) = 0$

Theorem 4.

$k+1$ sphere の codimension n をもついかなる locally flat PL embedding に対しても法 cell bundle が存在する。

$$\Leftrightarrow \text{Coker}(i_k) = 0.$$

例 1. (N.H. Kuiper and R.K. Lashof)

Kuiper-Lashof より、準同型写像 $t_k^n; \pi_k(O_n) \rightarrow \pi_k(\pi L_n)$ は $\forall k; n \leq 4$ に対して monomorphism

である。[7]. - 5, J. Levineにより differentiable knots χ_k in $\mathbb{H}^{k+4, k}$, $k = 7, 8, 9, 11$ で $\partial'_k(\chi_k) \neq 0$ となるものが存在する。(但し, $\partial'_k(\chi_k) = \chi_k$ の法 vector bundle) χ_k を smooth triangulate し, Zeeman の unknotting theorem, および theorem 2 を使って, $(\Delta_{k+1}, \partial \Delta_{k+1})$ 上の relative $(PR_4, \pi L_4)$ bundles σ_k , $k = 7, 8, 9, 11$ が得られる。 σ_k は $\pi_k(PR_4, \pi L_4)$ の元とみなしたとき, $\partial_k(\sigma_k) = t_k^+ \partial'_k(\chi_k)$ となっている。 t_k^+ は monic だから, $\partial'_k(\chi_k) \neq 0$ より, $\partial_k(\sigma_k) \neq 0$, よって $\text{Ker } i_{k-1} \neq 0$ for $k = 7, 8, 9, 11$ かくて, S^k ($k = 7, 8, 9, 11$) の S^{k+4} の中への standard な PL embedding は non trivial 法 cell bundle をもつ。

例 2. (M. W. Hirsch) [2]

或る種の differentiable knot χ_7 in $\mathbb{H}^{11, 7}$ を smooth triangulate し, relative $(PR_4, \pi L_4)$ bundle σ over $(\Delta_8, \partial \Delta_8)$ で, $\sigma \neq 0$ in $\pi_7(PR_4, \pi L_4)$ だが, $\partial_7(\sigma) = 0$ となるものが得られる。よって, $\text{Ker } \partial_7 = \text{Coker } i_7 \neq 0$. かくて, S^8 上の 4 prebundle で, cell bundle の underlying prebundle とならぬものが存在する。(勿論この prebundle a zero-section は法 cell bundle の存在しない locally flat embedding の例でもある。)

3. $S^p \times S^q$ の pseudo-isotopy group の応用.

$PL(S^p \times S^q) = \{f: S^p \times S^q \rightarrow S^p \times S^q, PL \text{ homeomorphism}\}$
とおく。 $f, g \in PL(S^p \times S^q)$ が pseudo-isotopic とは、
 $\exists h \in PL(I \times S^p \times S^q)$ such that

$$h(0, x) = (0, f(x)), \quad h(1, x) = (1, g(x))$$

($\forall x \in S^p \times S^q$) のときをいう。 pseudo-isotopy という関係は同値関係で、 pseudo-isotopy 類の全体は、群 $\pi PL(S^p \times S^q)$ をなす。このとき、 $p > q \geq 2$, 或いは、 $p > 4, q = 1$ のとき、集合として $\pi PL(S^p \times S^q)$ は、 $\pi_p(PR_{q+1}) \times \pi_q(PR_{p+1}) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ と 1対1 に対応する。とくに、 $\pi PL(S^p \times S^1) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ($p \geq 4$) がいえるので、 Gluck の結果 [1] を pseudo-isotopy の意味で拡大できたことになる。 [6].

参考文献

- [1] H. Gluck, the embedding of two sphere in the four sphere, Trans. Amer. Math. Soc. 104. (1962) 303 - 333
- [2] M.W. Hirsch, On tubular neighborhoods of manifolds I, II, Proc. London. Math. Soc.

62 (1966) 177-181, 183-185.

- [3] J.F.P. Hudson, Concordance and isotopy of PL embeddings, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 534-535
- [4] D.M. Kan, A combinatorial definition of homotopy groups. Ann. of Math., 67 (1958) 282-312
- [5] M. Kato, Combinatorial prebundles, Part 1 (to appear)
- [6] M. Kato, A pseudo isotopy classification of PL automorphisms of $S^p \times S^q$, (to appear)
- [7] N.H. Kuiper and R.K. Lashof, Microbundles and bundles, Part C, (mimeographed)