

ある微分作用素の準楕円性と微準楕円性について

阪大理 森岡達史 (Tatsushi Morioka)

§0. 序

P をなめらかな係数を持つ $\mathbb{R}^n$ 上の微分作用素とする。 P が準楕円型 (Hypoelliptic) であるとは、

$$\text{sing supp } u = \text{sing supp } Pu \quad \text{for } u \in \mathcal{D}'$$

が成り立つことをいう。また、 P が微準楕円型 (Microhypoelliptic) であるとは、

$$\text{WF } u = \text{WF } (Pu) \quad \text{for } u \in \mathcal{D}'$$

が成り立つことをいう。 $\pi: T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を自然な射影とすると、 $\text{sing supp } u = \pi(\text{WF } u)$ だから、微準楕円型作用素は必ず準楕円型になる。しかし、逆は必ずしも成り立たない。次の微分作用素を考えよう。

$$L = D_x^{2\ell} + x^{2k} D_y^{2m} \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

ここで $D_x = -i\partial_x$, k, ℓ, m は正の整数である。谷口 [6] は、

L は準楕円型になることを示した。Parenti-Rodino [5] は

$k \geq m - \ell$ のとき、かつそのときに限って L は微準楕円型に

なることを示した。彼らの結果より、 $k < m - \ell$ のとき、 L は準楕円型であって厳準楕円型でない。本文では、次の微分作用素

$$L = D_x^{2\ell} + g(x) D_y^{2m} \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

$$g(x) \in C^\infty, \quad g(0) = 0, \quad g(x) > 0 \quad \text{for } x \neq 0$$

の準楕円性と厳準楕円性について考える。 $g(x)$ が無限次で消える場合も含めた結果を報告する。

§1. 結果

論理は同じなので、次元を一般にして結果を述べる。 L を次の微分作用素とする。

$$(1.1) \quad L = a(x, y, D_x) + g(x) b(x, y, D_y)$$

$$\text{in } \mathbb{R}^n = \mathbb{R}_x^{n_1} \times \mathbb{R}_y^{n_2}, \quad n_1 \geq 1, \quad n_2 \geq 1.$$

(A.1) $a(x, y, D_x)$ は 2ℓ 次の微分作用素で、ある定数

$C > 0$ が存在して、

$$\operatorname{Re} a(x, y, \xi) \geq C |\xi|^{2\ell}, \quad |\xi| : \text{十分大}$$

が成り立つ。

(A.2) $b(x, y, D_y)$ は $2m$ 次の微分作用素で、ある定数

$C > 0$ が存在して、

$$\operatorname{Re} b(x, y, \eta) \geq C |\eta|^{2m} \quad |\eta| : \text{十分大}$$

が成り立つ。

$$(A.3) \quad g(0) = 0, \quad g(x) > 0 \quad \text{for } x \neq 0$$

注. $a(x, y, D_x) = D_x^{2\ell}$, $b(x, y, D_y) = D_y^{2m}$ とする.

a, b は (A.1), (A.2) をみたす.

定理 1. (A.1) – (A.3) のもとで、 L は準楕円型になる.

森本[1]は (A.1) – (A.3) とさらに次の条件 (G) を仮定して L の準楕円性を証明した.

(G) ある正の定数 C と $\tau: 0 < \tau < (2\ell m + 2m - 2\ell)^{-1}$

が存在して、任意の α に対して

$$|D^\alpha g(x)| \leq C g(x)^{1-\tau|\alpha|}$$

が $x=0$ の近傍で成り立つ. $\blacksquare$

定理 1 は (G) を仮定していないので、森本[1]の改良になっている. L の厳準楕円性については次のことが言える.

定理 2. L は (A.1) – (A.3) をみたすとする.

(i) $\ell \geq m$ のとき、 L は厳準楕円型である.

(ii) $\ell < m$ のとき

$$z_0 = (x^0, y^0; \xi^0, \eta^0) \in T^*\mathbb{R}^n \quad (x^0, \xi^0 \in \mathbb{R}^{n_1}, y^0, \eta^0 \in \mathbb{R}^{n_2}),$$

$|\eta^0| \neq 0$ とする. 次の条件 (A.4) を仮定する.

(A.4) ある正の定数 C とある $\tau : 0 < \tau < (2m-2\ell)^{-1}$ が存在して、任意の $\alpha : |\alpha| \leq 2m-2\ell$ に対して

$$|D^\alpha g(x)| \leq C |g(x)|^{1-\tau|\alpha|}$$

が $x=0$ の近傍で成り立つ。□

このとき、 $u \in \mathcal{D}'$ 、 $z_0 \notin \text{WF}(Lu)$ ならば、 $z_0 \notin \text{WF } u$ が成り立つ。□

(A.4) は (G) よりも弱い条件になつてゐる。 $n_1=1$ 、 $g(x)=x^{2k}$ のとき、(A.4) は $k \geq m-\ell$ と同値である。したがつて (A.4) は、

$$L = D_x^{2\ell} + x^{2k} D_y^{2m} \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

が厳準楕円型になるための必要十分条件になつてゐる。(§0 を参照。) $g(x)$ が無限次で消える場合も条件 (A.4) は一般には除けない。その例として、森本-森岡[2]は次の微分作用素を考察した。

$$\left\{ \begin{array}{l} L_k = D_x^{2\ell} + g_k(x) D_y^{2m} \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \\ g_k(x) = e^{-1/|x|} \sin^{2k}(\pi/|x|) + e^{-1/|x|^2} \\ k=1, 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

$m \geq \ell+2$ 、 $k \leq m-\ell-1$ のとき、 $z_0 = (0,0;0,1) \in T^*\mathbb{R}^2$ に対してある $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ が存在し、 $z_0 \notin \text{WF}(L_k u)$ かつ $z_0 \in \text{WF } u$ が成り立つ。しかし、定理 1 より L_k は任意の k に対して準楕円型である。

文献表

- [1] Y. Morimoto, J. Math. Soc. Japan 30 (1978),
327 - 358
- [2] Y. Morimoto - T. Morioka, to appear in Publ.
RIMS. Kyoto Univ.
- [3] T. Morioka, Osaka J. Math 28 (1991),
563 - 578
- [4] T. Morioka, to appear in Publ. RIMS. Kyoto
Univ.
- [5] C. Parenti - L. Rodino, Boll. Un. Mat. 17-B
(1980), 390 - 409
- [6] K. Taniguchi, Osaka J. Math 11 (1974),
221 - 238