

塑性体の記憶効果: 連続体力学によるアプローチ

鳥取大 (工) 応用数理 大信田 丈志 (OOSHIDA Takeshi)
Dept. Appl. Math & Phys., Fac. Engineering, Tottori Univ.

1 はじめに

近年「ソフトマター」「やわらかいガラス」などと呼ばれる非結晶物質の塑性的挙動 [1, 2] が物理学者の注目を集めるなか、中原と松尾により、興味深い実験結果が報告された [3–6]。粉末状の炭酸カルシウム (CaCO_3) を水に混ぜて泥状にしたもの (ペースト) を作り、浅い容器に入れて静置乾燥させる。乾燥によって生じる亀裂パターンは、通常は等方的なセルパターンとなるのだが、中原らは、乾燥以前の“初期条件”を通じて、亀裂パターンに顕著な異方性を導入できることを発見した。具体的には、ペーストを容器に注いだ直後に水平に揺すってやると、その外力の記憶が何らかの形で刷り込まれ、割れるべき方向が決まる、というものである。

中原らは、系統的な実験により、このようなペーストの記憶効果には塑性が本質的であることを明らかにした。加えられた振動の強さがある閾値を下回ると記憶効果は観察されず、しかもこの閾値はちょうどペーストの降伏応力に対応している。加振強度が閾値をわずかに上回る場合には塑性流動が生じ、その記憶によって加振方向に垂直な亀裂ができる (第 1 種 Nakahara 効果 [4, 7])。振動が強すぎたり水が多すぎたりすると、波が立ったり大域的な流れが生じたりして、炭酸カルシウムペーストの記憶は失われる。異なる種類のペースト (炭酸水酸化マグネシウムなど) での実験結果 [6] はより複雑で、炭酸カルシウムと同じく加振方向に垂直な亀裂を生じるだけでなく、水が多い条件においては、加振による流れに平行に亀裂が生じるという、異なるタイプの記憶効果 (第 2 種 Nakahara 効果) をも示す。ただし、この場合も、強すぎる振動は乱流的あるいはカオス的な流れを生じ^{*}、記憶喪失をひきおこす。

本講演では、第 1 種 Nakahara 効果に着目し、この現象が連続体力学の枠内で説明できる可能性を示す理論的解析 [7, 8] を紹介する。この解析では、Lagrange 変数による流体記述および変分による弾性体力学を用いているので、Euler に関係のある話題が少なくとも 2 つ登場することになる。解析の結果、流れの方向に張力が作りだされ、その張力がペーストに残留することが示される。残留張力があるということは、乾燥後のペーストはその方向に割れやすいということだから、この結果は第 1 種 Nakahara 効果の説明となり得る。

2 物理方面の準備

2.1 Maxwell モデル

ペーストは、黙って放置するとやわらかい固体となり、ある閾値以上の力を加えると液体となって流れるという性質をもつ。この性質をモデル化することが重要である。そのための出発点として、まず、レオロジーでよく知られた Maxwell の粘弾性モデル [2, 9–14] についてまとめておこう。

Maxwell モデルは、しばしば離散要素の形で、バネとダッシュポットを図 1 のように直列につないだものとして描かれる [9, 10]。バネは Hooke 弾性体、ダッシュポットは Newton 粘性流体に相当し、Maxwell モデルは両者の性質を併せもつ粘弾性流体の記述を意図している。この描像で、張力 T と全長 x の関係を求めると

$$T = \kappa (x_S - x_S^h) = \mu \frac{dx_D}{dt}, \quad x = x_S + x_D \quad (1)$$

^{*} 中原氏 (私信) によると、この場合の典型的な Reynolds 数は、基準長さとして層の厚さ H をとるなら $R_H = 100$ 程度、容器の水平方向長さ L をとるなら $R_L = 2000$ であるという。通常の乱流遷移から考えると $R_H = 100$ という値は小さすぎるようにも思えるが、水平方向加振によって通常の乱流とは異なる種類のカオス的な流れが生じている可能性もある。

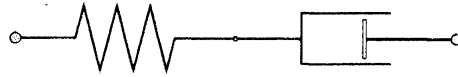


図 1: 離散要素としての Maxwell モデルの象徴的図示。

となる。ここで κ はバネ定数, μ は抵抗係数, x_S と x_D はそれぞれバネの部分とダッシュポットの部分の長さ, x_S^0 はバネの自然長をあらわす。通常, 式 (1) から, いわゆる内部変数 (x_S , x_D および x_S^0) を消去し,

$$\left(\mu^{-1} + \kappa^{-1} \frac{d}{dt} \right) T = \frac{dx}{dt} \quad (2)$$

という形にすることが多い。式 (2) には, 応力緩和の時間スケール μ/κ が現れている。

さてここで Maxwell モデルに対し, さらに 2 つの要素を考慮する必要がある。ひとつは塑性を含めること, もうひとつは n_d 次元での連続体記述である。最初の点に関しては, 既存の研究の多くは式 (1) の直接的拡張である弾塑性分解 [15, 16] に基づいているが, このアプローチには, 特に有限変形の場合, 不用心に内部変数を用いることによる危険性がつきまとう。そこで我々は, 内部変数 x_D への直接的な参照を避けるべく, 通常の弾塑性分解とは異なる, むしろ式 (2) に近いアプローチをとることにする。

考え方の要点は, 緩和を自然長 x^0 に担わせる点にある。ここでいう自然長 x^0 とは, 張力 T を完全に弾性的なバネによるものと見なした場合の自然長のことで,

$$T = \kappa (x - x^0) \quad (3)$$

のように T と関係づけられる。自然長 x^0 は, “内部変数” を用いて $x^0 = x_S^0 + x_D$ のように書けるが, この関係式を陽に用いることはせず, 緩和の存在は dx^0/dt を通じて扱うものとする。式 (3) を式 (2) に代入し,

$$\frac{dx^0}{dt} = \frac{\kappa}{\mu} (x - x^0) \quad \text{すなわち} \quad \left(1 + \tau \frac{d}{dt} \right) x^0 = x \quad \left(\text{ここで } \tau = \frac{\mu}{\kappa} \right) \quad (4)$$

という, 自然長 x^0 の緩和の式が得られる。この式 (4) が第 4 章の塑性モデルの雛型となる。

2.2 曲線上の質点力学

続いて Maxwell モデルの連続体版を考えたいが, そのためには, 微分幾何学の知識が必要となる。筆者を含めて多くの物理学者にとって, 微分幾何学 [17] は力学から入るのが分かりやすいと思われるので, そのための例題として, 図 2(a) のような, なめらかな曲線上に拘束された質点の運動を考えよう。曲線の形が具体的に定まっていたほうが話がしやすいので, ここでは

$$\theta \mapsto \mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \sin \theta \\ -H \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5)$$

とする。鉛直上向きを $+y$ 方向に取り, 重力加速度ベクトルを $\mathbf{G} = (0, -G)$ とする。

初等的な力学では, 曲線 (5) の単位法線ベクトル $\mathbf{e}_n$ を用いて束縛力 $N\mathbf{e}_n$ を導入し, 運動方程式を

$$m\ddot{\mathbf{r}} = N\mathbf{e}_n + m\mathbf{G} \quad (m\mathbf{G} = -\nabla\Phi) \quad (6)$$

すなわち

$$m\ddot{\theta} \begin{bmatrix} L \cos \theta \\ H \sin \theta \end{bmatrix} + m\dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} -L \sin \theta \\ H \cos \theta \end{bmatrix} = \frac{N}{\sqrt{L^2 \cos^2 \theta + H^2 \sin^2 \theta}} \begin{bmatrix} -H \sin \theta \\ L \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mG \end{bmatrix} \quad (7)$$

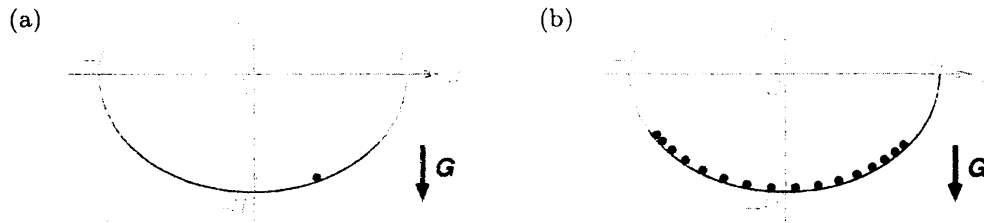


図 2: (a) なめらかな拘束を受けて曲線上を運動する質点。(b) 同じく曲線上に拘束された質点系。

のように書き下す[†]。曲線にとって、法線方向というのは“外の世界”のものであって、自分に内在する方向ではない。そういうものを用いているという意味で、式 (7) は“外の世界”から見た運動方程式である。

束縛力 N を消去するため、運動方程式 (7) の両辺に対し、接線ベクトル $d\mathbf{r}/d\theta = \sqrt{L^2 \cos^2 \theta + H^2 \sin^2 \theta} \mathbf{e}_t$ と内積をとる (ここで $\mathbf{e}_t$ は単位接線ベクトル)。結果を整理すると

$$M(\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta}^2) = f \quad (8)$$

となり、ここで

$$M = m \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = m \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \right|^2 = m (L^2 \cos^2 \theta + H^2 \sin^2 \theta), \quad M\gamma = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\theta^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{dM}{d\theta}$$

$$f = (-\nabla \Phi) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (mGH \cos \theta) = -mGH \sin \theta$$

である。

他方、我々は解析力学というものを知っており、そのおかげで“中の世界”の運動方程式 (8) を直接に書き下すことができる。言わずと知れた Euler-Lagrange 方程式である。質点の位置は一般化座標 $\theta(t)$ で表示され、その時間微分 $\dot{\theta}$ は一般化速度、 $p = M\dot{\theta}$ は一般化運動量、また式 (8) の右辺は一般化力と呼ばれる。ところで速度も運動量も力もベクトルだったはずだが、“中の世界”の運動方程式において、これらの基底は何だろうか？

速度とは $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ のことであり、連鎖則を用いて $\mathbf{v} = \dot{\theta} d\mathbf{r}/d\theta$ と書ける。この式では、接ベクトル[‡] $d\mathbf{r}/d\theta$ が基底の役割を果たしている。他方、“外の世界”の運動方程式 (7) の右辺を $\mathbf{F} = F_t \mathbf{e}_t + F_n \mathbf{e}_n$ とすると、“中の世界”にとって、 $F_n \mathbf{e}_n$ は (拘束がなめらかである限り) 意味がなく、意味があるのは $F_t \mathbf{e}_t$ のほうである。このように“中の世界”にとって意味がある情報を抽出する手続きを明確にするには、双対基底 $\nabla \theta$ および射影演算子 $\hat{P}$ を導入し[§]、“外の世界”の運動方程式 (7) を曲線 (5) の接空間 (接線ベクトルで張られる空間) に射影してみるのがよい。今の場合、簡単な計算により

$$\nabla \theta = \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \right|^{-2} \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}, \quad \hat{P} = (\nabla \theta) \otimes \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \right|^2 \nabla \theta \otimes \nabla \theta \quad (9)$$

となる。式 (7) に $\hat{P}$ を作用させると、左辺は $(\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta}^2) d\mathbf{r}/d\theta$ 、右辺は $-f \nabla \theta$ となり、これから式 (8) を得る。

2.3 曲線上の連続体力学

続いて、図 2(b) のように曲線上に多数の小質点がある系を考え、その連続極限として曲線上の連続体力学について考察する。位置ベクトルは式 (5) のように“Euler 変数” θ でパラメータ表示され、他方、それぞれの小

[†] 加速度項のうち $\dot{\theta}^2$ の項は $\mathbf{e}_n$ に平行ではないことに注意。なお、円軌道の場合の式は $L\theta$ が弧長に等しいという特殊事情による。

[‡] 単位接線ベクトル $\mathbf{e}_t$ ではないことに注意。接ベクトルの長さも $\mathbf{v}$ と $\dot{\theta}$ の関係を知るための情報を担っているということだ。

[§] なお、解析力学も現代的微分幾何学も曲線内部の量だけで完結できる以上、本来は $\hat{P}$ などは無用の存在であり、外部の世界に頼るのは軟弱者である。しかしたとえば我々が道を歩くには、理論上、測度ゼロのスペースを残してすべての地面を奈落の底まで掘り下げても良いはずだが、そのような綱渡りに耐えられる人が何人いるだろうか？ 莊子の言う「無用の用」を地でいく話である。

質点（微小要素）は ξ というラベル変数で表示されたとすると、微小要素の位置は

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta), \quad \theta = \theta(\xi, t) \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta(\xi, t)) = \mathbf{r}(\xi, t) \quad (10)$$

のようにあらわせる。以下、独立変数を (ξ, t) とする、いわゆる Lagrange 記述 [18–20] を一貫して採用し、特に ∂_t は常に Lagrange 記述での時間微分（Lagrange 微分）を意味するものとする[¶]。これにより、速度は $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, t)$ の時間微分として $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{r}$ のように与えられる。接空間の基底として $\partial_\xi \mathbf{r}$ をとり、考えている連続体の微小要素の Euclid 長さを Δs とすると、 Δs と $\Delta \xi$ を関係づけるものとして、 ξ 空間上の誘導計量 g が

$$\Delta s = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right| = \sqrt{g(\Delta \xi)^2}, \quad g = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \quad (11)$$

のように自然に導入される。密度を $\rho = \rho(\xi, t)$ とすると、質量保存則は

$$\partial_t(\rho \Delta s) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \rho = \frac{\rho_0(\xi)}{\sqrt{g}} \quad (12)$$

と書ける（1次元系で非圧縮だとあまりにつまらないので、ここでは ρ は時間変化し得るものとしている）。

運動学から力学の考察に進もう。とりあえず、この系は弾性的であるものとし、運動方程式を

$$\delta \iint (\mathcal{K} - \Phi - \mathcal{E}) \, ds \, dt = 0 \quad (ds = \sqrt{g} \, d\xi) \quad (13)$$

とする。ここで $\mathcal{K} = \frac{1}{2} \rho v^2$ は（長さあたりの）運動エネルギー、 $\Phi = -\rho G y$ は重力のポテンシャル、 $\mathcal{E}$ は弾性歪みエネルギーである。基底 $\partial_\xi \mathbf{r}$ に関する速度 $\mathbf{v}$ の成分 v ($\neq |\mathbf{v}|$) を $\mathbf{v} = v \partial_\xi \mathbf{r}$ により導入し（微分幾何学でいう“反変成分”）、また式 (12) を用いると

$$\int \mathcal{K} ds = \frac{1}{2} \int \rho \left| v \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right|^2 \sqrt{g} \, d\xi = \frac{1}{2} \int \mathcal{M} v^2 d\xi, \quad \int \Phi ds = \int \rho G y ds = \int \rho_0 \varphi d\xi$$

となり、ここで $\mathcal{M} = \rho_0 g$ 、 $\varphi = G y$ である。続いて、弾性歪みエネルギーの表式を得るために、各要素の“自然長” $\Delta s^h = \sqrt{g^h(\Delta \xi)^2}$ を導入して、伸長率 λ を $\lambda^2 = (\Delta s / \Delta s^h)^2 = g / g^h$ によって定め、 $\mathcal{E}$ は λ の関数として与えられるとする。次元を合わせるため、線張力の次元をもつ弾性定数 k を導入し、

$$\int \mathcal{E} ds = k \int \varepsilon(\lambda) \sqrt{g} \, d\xi, \quad \lambda^2 = \frac{g}{g^h} \quad (14)$$

としよう。応力緩和はないとすれば、 g^h は ξ だけの関数であり、 $\partial_t g^h = 0$ または $\partial_t(1/g^h) = 0$ と書ける。

こうして運動方程式 (13) の内容が定まったので、 $\theta \mapsto \theta + \delta\theta$ として変分を計算しよう。作用積分の各項は、 g や v を通じて $\theta = \theta(\xi, t)$ の汎関数となっている。式 (11) および $v = \mathbf{v} \cdot \nabla \xi = (\partial_t \theta) / (\partial_\xi \theta)$ より

$$\delta g = 2(\partial_\xi \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \delta\theta \right), \quad \delta v = \delta \left(\frac{\partial_t \theta}{\partial_\xi \theta} \right) = \frac{\partial_t \delta\theta - v \partial_\xi \delta\theta}{\partial_\xi \theta}$$

であることを用いて変分を計算すると

$$\delta \int \mathcal{K} ds = - \int \rho_0 (\partial_t \mathbf{v}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \delta\theta \, d\xi + [t \text{ で積分すると消える項}] \quad (15)$$

$$\delta \int \Phi ds = - \int \rho_0 \frac{d\varphi}{d\theta} \delta\theta \, d\xi = - \int \rho_0 \mathbf{G} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \delta\theta \, d\xi \quad (16)$$

$$\delta \int \mathcal{E} ds = - \int \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sigma \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\xi} \right|^2 \mathbf{e}_t \right) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \delta\theta \, d\xi \quad \left[\text{ここで } \sigma = \sigma(g, g^h) = k \left(\frac{\varepsilon'(\lambda)/\lambda}{g^h} - \frac{\varepsilon}{g} \right) \right] \quad (17)$$

[¶] 通常、Euler 記述での時間微分と区別して D/Dt と書くことが多いが、これは (ξ, t) を独立変数としたときの t での偏微分にはかならないのだから、Lagrange 記述では ∂_t と書けば十分である。

となり、張力 σ は (g, g^b) の -1 次の同次関数となる。さらに、式 (17) の被積分関数中にある ξ 微分の項は

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sigma \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\xi} \right|^2 \mathbf{e}_t \right) = \sqrt{g} (\nabla \xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \otimes \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right) = \sqrt{g} \operatorname{div} \vec{\sigma} \quad \left(\vec{\sigma} = \sigma \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \otimes \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right) \quad (18)$$

のように書き直せる。結果は、射影演算子 $\hat{P} = (\nabla \xi) \otimes \partial_\xi \mathbf{r} = g (\nabla \xi) \otimes (\nabla \xi)$ を用いて

$$\rho \hat{P} \partial_t \mathbf{v} = \hat{P} (\operatorname{div} \vec{\sigma} + \rho \mathbf{G}) \quad (19)$$

のようにまとめられる。以上のとおり、弾性体力学を曲線上で定式化することができた。ここでは変形が微小という仮定は全く用いていないことに注意しよう。すなわち、式 (14) で λ が微小である必要はない。

ここで Maxwell モデルに戻り、さきほど式 (4) の直後に記した 2 つの課題を思い出そう。ひとつめの課題は塑性を導入することで、そのためには式 (4) のような形で緩和を導入すればよい。離散要素の場合の式 (4) における x^b に相当するのは、1 次元の連続体力学の場合、式 (14) の直前で導入された g^b である。このことと、2 番目の課題が n_d 次元の連続体力学としての定式化であることを考えると、 g や g^b の n_d 次元版を考えれば良いことになる。次の第 3 章で、そのための数学的な準備をおこなうことにしよう。

3 数学方面の準備

第 2 章で考えたような曲線 (5) 上の力学の場合、“外の世界” の次元と“中の世界” の次元が異なるために、射影演算子 $\hat{P}$ の導入が必要であった。しかし第 4 章で考察するペーストのモデルでは、“中の世界” の次元が上がり、外の世界と同じ次元になる。これにより、Label 変数が n_d 成分の量になるという意味では面倒になるが、その代わり、射影演算子 $\hat{P}$ は恒等演算子となり、その面ではかえって簡単になる。

ラベル変数の式 (10) の n_d 次元版で、 t を固定したものを考えよう。すなわち、任意の時刻 t において、 n_d 個の変数の組 ξ から n_d 次元 Euclid 空間の位置 $\mathbf{r}$ への写像が与えられているとする。たとえば $n_d = 3$ の場合

$$\xi = (\xi, \eta, \zeta) \mapsto \mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi) = \begin{bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix}_{\text{Cartesian}} \quad (20)$$

のように書ける。式 (10) の場合と同じく、 ξ を「ラベル変数」と呼ぶことにする。

3.1 反変ベクトル成分

写像 (20) は十分になめらかで可逆だとすると、たとえば $n_d = 3$ の場合、ベクトルの組 $\{\partial_\xi \mathbf{r}, \partial_\eta \mathbf{r}, \partial_\zeta \mathbf{r}\}$ は、 $\mathbf{r}$ 空間の各点における局所的な基底となる。これにより、任意のベクトル場 $\mathbf{f}$ を

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^\xi \\ f^\eta \\ f^\zeta \end{bmatrix} = f^\xi \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} + f^\eta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} + f^\zeta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} = f^i \partial_i \mathbf{r} \quad (21)$$

のように成分表示できる。なお、Einstein の総和規約に従い、 $i \in \{\xi, \eta, \zeta\}$ に関する和の記号を省略している。式 (21) の係数 (f^i) を、ベクトル場 $\mathbf{f}$ の反変成分という。微分幾何学の慣習に従い、反変成分は上つき添字で示される。

ラベル変数を ξ から $\bar{\xi}$ に変数変換すると、基底ベクトルは $\{\partial \mathbf{r} / \partial \xi^i\}$ から $\{\partial \mathbf{r} / \partial \bar{\xi}^i\}$ に変化する。同時に、 (f^i) から $(\bar{f}^i)$ への変化が基底の変化を打ち消すように生じ（だから“反変成分”という）、 $\mathbf{f}$ 自体は不変となる。物理量のあいだの関係を記述する式は、ラベル変数の選択からは独立でなければならないので、このことを保証するために、方程式の両辺が変数変換に関して同一の挙動を示すこと（すなわち“スカラー”とか“反変ベクトル成分”とかいった変換則による分類が同じであること）が要求される。そういうわけで、たとえば $a^i = 2b^i$ は良いが、 $a^i = b^i + 2$ はダメだ（スカラーである 2 を反変ベクトル成分 b^i に足してはいけな

2 階のテンソルの成分表示は、たとえば $P = P^{ij}(\partial_i \mathbf{r}) \otimes (\partial_j \mathbf{r})$ のようになる¹¹。反変成分 (P^{ij}) はふたつの反変ベクトル成分の積と同じ変換則に従い、したがって P 自体は ξ 空間での変数変換に対して不変となる。ついでながら、上つき添字をもつ Kronecker デルタ δ^{ij} は、正しい変換則に従わず、したがって物理的に意味のあるテンソルとはならない。このあと示すように、等方テンソルの反変成分は (δ^{ij}) ではなく (g^{ij}) である。

3.2 計量テンソル

ラベル ξ をもつ流体要素 (“粒子”) と、ラベル $\xi + d\xi$ をもつ近傍の要素との Euclid 距離を ds とすると、

$$ds^2 = |(\partial_i \mathbf{r}) d\xi^i|^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j, \quad g_{ij} = (\partial_i \mathbf{r}) \cdot (\partial_j \mathbf{r}) \quad (22)$$

のように書ける。式 (22) は、 $\mathbf{r}$ 空間の Euclid 距離を持ち込むことで ξ 空間上に誘導計量テンソル (g_{ij}) を定義している。個々の成分を意識しない場合、この “Euclid(誘導) 計量テンソル” を g と書くことにする。

3.3 双対基底と共変ベクトル成分

すでに述べたとおり、 ξ から $\mathbf{r}$ への写像は滑らかかつ可逆であると仮定しているの、 $\nabla \xi^i = \partial \xi^i / \partial \mathbf{r}$ が問題なく定義できる。連鎖則により $(\partial_i \mathbf{r}) \cdot \nabla \xi^j = \delta_i^j$ が成り立ち、 $\{\nabla \xi^i\}$ は $\{\partial_i \mathbf{r}\}$ の双対基底となる。さらに、外側の空間である $\mathbf{r}$ 空間が、埋め込まれている ξ 空間と等しい次元をもつため、

$$(\nabla \xi^i) \otimes \partial_i \mathbf{r} = \mathbf{1} \quad (= [\mathbf{r} \text{ 空間における単位テンソル}]) \quad (23)$$

も成立する (すなわち $\hat{P}$ は恒等演算子となる)。双対基底を用いれば、任意に与えられたベクトル場の反変成分が具体的に計算できる。たとえば $\mathbf{f}$ の反変成分は $f^i = \mathbf{f} \cdot \nabla \xi^i$ である。この式を式 (21) の右辺に代入すると、式 (23) のおかげで確かに $\mathbf{f}$ に戻る。

ベクトル場 $\mathbf{f}$ の反変成分 (f^i) の対照概念として、共変成分 (f_i) を $\mathbf{f} = f_i \nabla \xi^i$ で定義する。容易に確認できるように、 $f_i = (\partial_i \mathbf{r}) \cdot \mathbf{f} = g_{ij} f^j$ が成り立つ。

式 (22) および (23) から、(g_{ij}) は単位テンソル $\mathbf{1}$ の共変成分であること、また、 $\mathbf{1}$ の反変成分は、(g^{ij}) の逆行列 (g^{ij}) となることが分かる：

$$g_{ij} (\nabla \xi^i) \otimes (\nabla \xi^j) = g^{ij} (\partial_i \mathbf{r}) \otimes (\partial_j \mathbf{r}) = \mathbf{1}, \quad g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k. \quad (24)$$

3.4 共変微分

連続体の運動方程式のように空間微分を含む方程式を一般的な曲線座標で成分表示するには、 ∇_j という演算子が必要になる [21]。演算子 ∇_j は**共変微分**と呼ばれ、一般には $\partial_j = \partial / \partial \xi^j$ とは別のものである (ただしスカラー場に対しては $\nabla_j = \partial_j$)。空間自体が曲がっている場合には、共変微分を適切に定義する方法は自明ではないが、今の場合、幸いなことに、空間自体は平坦なので、通常の勾配演算子 $\nabla = \partial / \partial \mathbf{r}$ を利用し、 ∇_j を勾配の共変成分として定義できる。反変成分 (f^i) を通じて与えられた任意のベクトル場 $\mathbf{f}$ に対し、勾配は

$$\text{grad } \mathbf{f} = \nabla \otimes \mathbf{f} = ((\nabla \xi^i) \partial_i) \otimes (f^j \partial_j \mathbf{r}) = (\nabla \xi^i) \otimes \partial_j (f^i \partial_i \mathbf{r})$$

となるので、その共変成分によって、共変微分 $\nabla_j f^i$ を

$$\partial_j (f^i \partial_i \mathbf{r}) = (\nabla_j f^i) \partial_i \mathbf{r} \quad \text{すなわち} \quad \text{grad } \mathbf{f} = (\nabla_j f^i) ((\nabla \xi^i) \otimes \partial_i \mathbf{r}) \quad (25)$$

¹¹ ここで $\otimes$ は $\mathbf{r}$ 空間におけるテンソル積で、 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$ を満たす。

のように定義する。今の場合, $\nabla_j f^j$ を求めるには, $\mathbf{f} = f^i \partial_i \mathbf{r}$ の Descartes 座標成分を求め, それを ξ^j で微分したものを式 (25) と見比べればよい。外側の $\mathbf{r}$ 空間に依存するのを潔しとしない人は,

$$\nabla_i f^j = \partial_i f^j + \Gamma_{ik}^j f^k \quad \left(\text{ここで } \Gamma_{ik}^j \text{ は Levi-Civita 接続} \right)$$

のような公式に基づく由緒正しい方法を用いることもできる [22]。どちらの方法でも結果は同じである。

4 ペーストの連続体モデルの構築

4.1 塑性モデルの方針

ペーストは, 固体的な挙動と流体的な挙動が閾值的に切り替わるという意味で塑性をもつ。他方, 固体的挙動と流体的挙動の二面性を記述する古典的なモデルのひとつである Maxwell モデル (2) において, この二面性を定量的に特徴づける量は, 緩和時間 $\tau (= \mu/\kappa)$ である。

Maxwell モデルを拡張してペーストの塑性を表現するには, 緩和時間 τ を変数として扱えばよい。ペースト中の応力は主に粒子間結合のネットワークで支えられるものとする, 緩和時間 τ は, 微視的には結合の寿命に相当するものと考えられる。無限大の τ は固体的な挙動を意味し, 有限の τ は流動性をもたらすので, 両方の挙動を閾值的に切り替えるようにすれば塑性が定式化できる。実験によると, 第 2 種 Nakahara 効果は粒子に異方性がある場合に限って出現するが, 第 1 種 Nakahara 効果は粒子の異方性の有無には関係しない。したがって, 第 1 種 Nakahara 効果のみを考察する場合, ペーストは等方的だとして良いはずである。等方性により, τ 自体がスカラーとなるだけでなく, τ の切り替えを支配する変数もスカラーとなる。有名な von Mises の降伏条件 [23] と, そのエネルギー論的解釈 [24] を念頭におき, 我々は, 緩和時間 τ は歪みエネルギーの関数であるものと仮定する。無次元の歪みエネルギーを ε とすると, この仮定は

$$\tau = \tau(\varepsilon) \sim \begin{cases} +\infty & (\varepsilon < \text{閾値}) \\ \tau_0 = \eta_p/S & (\varepsilon \gg \text{閾値}) \end{cases} \quad (26)$$

のように定式化され, ここで η_p は粘性係数の次元をもつ定数, S は剪断剛性率である。

4.2 運動学

Lagrange 記述により, 連続体の配位を, 時刻 t および Lagrange 変数 (ラベル変数) ξ から位置ベクトル $\mathbf{r}$ への写像として記述する。たとえば空間次元 $n_d = 3$ の場合には, $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ として,

$$(\xi, t) \mapsto \mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, t) = \begin{bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta, t) \\ y(\xi, \eta, \zeta, t) \\ z(\xi, \eta, \zeta, t) \end{bmatrix}_{\text{Cartesian}} \quad (27)$$

と書ける (時間 t を固定すれば式 (20) に帰着する)。

ラベル変数 ξ の選び方にはかなりの自由度があり, 必ずしも初期位置を選ぶのが最善とは限らない。たとえば交通流などの 1 次元圧縮流体系では, 密度を空間で積分したものが自然なラベル変数である (式 (12) で ρ_0 を定数とすることに相当)。また, 弾性体において, 応力も変形もない初期状態 (「自然状態」 [21]) が想定できる場合には, 要素の初期位置が自然なラベル変数となる。しかしこれは特別な場合であり, 一般には ξ は初期状態とは何の関係もない。実際, 曲線上の連続体力学の場合の式 (10) において, ξ が初期位置だとは仮定しなかったことを思い出そう。さらに, たとえば伸長率 λ が ξ の選択によらないことも容易に確認できる。

速度および加速度は, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, t)$ の時間微分であり,

$$\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{r}(\xi, t) = v^i \partial_i \mathbf{r}, \quad \partial_t \mathbf{v} = \partial_t (v^i \partial_i \mathbf{r}) = (\partial_t v^i + v^j \nabla_j v^i) \partial_i \mathbf{r} \quad (28)$$

のように書ける。なお、式 (10) の直後で説明したとおり、本講演では常に ∂_t は Lagrange 記述での時間微分 (いわゆる Lagrange 微分) をあらわす。

我々は、少なくとも加振中の比較的短い時間スケール**で見える限り、ペーストは非圧縮であるものと仮定し、

$$\partial_t \det g = 0 \quad \text{あるいは} \quad \det g = \text{const.} (> 0) \quad (29)$$

とする。一般性を失うことなく、右辺の定数を 1 と置いてよい。

4.3 運動方程式および構成関係式

さて力学の考察に進もう。応力テンソルを $\mathbf{P} = P^{ij}(\partial_i \mathbf{r}) \otimes (\partial_j \mathbf{r})$ とし、外からの体積力を $\mathbf{F} = F^i \partial_i \mathbf{r}$ とし、運動量の式 (運動方程式) を書き下すと

$$\rho \partial_t (v^i \partial_i \mathbf{r}) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot {}^t(P^{ij}(\partial_i \mathbf{r}) \otimes (\partial_j \mathbf{r})) + \mathbf{F} \quad \text{すなわち} \quad \rho (\partial_t v^i + v^j \nabla_j v^i) = - \nabla_j P^{ij} + F^i \quad (30)$$

となる [21]。外力 $\mathbf{F}$ は既知と考えてよいが、 $\mathbf{P}$ は構成関係式から決定する必要がある。

離散要素的な Maxwell モデルの式 (3)(4) をもとに、これに対応する n_d 次元の連続体モデルの構成関係式を考えよう。ここでは

$$\text{弾性部分} \quad [\text{式 (3) に対応}] : \quad P^{ij} = \bar{p} g^{ij} + S (g^{ij} - g_a^{ij}) \quad (31)$$

$$\text{非弾性部分} \quad [\text{式 (4) に対応}] : \quad \partial_t g_a^{ij} = -\nu g_a^{ij} + \nu_* g^{ij} \quad (32)$$

という形を採用する。ここで (g^{ij}) は Euclid 誘導計量テンソルの成分行列 (g_{ij}) の逆行列、 (g_a^{ij}) は同じく自然計量テンソルの逆行列で、これらは $g_{ij} g^{jk} = g_a^{jk} g_b^{ik} = \delta_i^k$ を満たす。

自然計量テンソル†† g^a は、式 (14) の g^a に相当するもので、ラベルが ξ および $\xi + d\xi$ であるような近接した 2 点のあいだの“自然距離”の二乗をあらわす：

$$(ds^a)^2 = g_a^{ij} d\xi^i d\xi^j. \quad (33)$$

特別な場合として、完全に弾性的な連続体が初期 ($t = t_0$) に応力ゼロの“自然状態”から出発した場合には、 ds^a は初期配位における距離であり、 g^a はそれに対応する計量すなわち g の初期値であって、 $g_{ij}^a = g_{ij}|_{t=t_0}$ のように書けるだろう。しかし一般には、 g^a は g の初期値とは異なる。これは、式 (32) で記述される自然計量 g^a の緩和の必然的結果である。式 (32) を、式 (4) にならって

$$(1 + \tau \partial_t) g_a^{ij} = K g^{ij} \quad \left(\tau = \nu^{-1}, \quad K = \frac{\nu_*}{\nu} \right) \quad (34)$$

のように書き直してみよう。これは、 (g_a^{ij}) が等方的テンソル ($K g^{ij}$) に向かって時間発展することを示している。塑性は、式 (26) に従い、 τ を通じて表現される。

離散要素版の Hooke 則 (3) に対応する、 n_d 次元の弾性的構成関係式 (31) は、弾性歪みエネルギーの考察に基づいている。まず $g_a^{ij} d\xi^i d\xi^j$ は正定値の二次形式だから、 $g_a^{ij} = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$ となるような Euclid ベクトルの組 $\{\mathbf{p}_\xi, \mathbf{p}_\eta, \mathbf{p}_\zeta\}$ が存在する。証明は、極分解定理 [9, 10, 21] と基本的に同じである。ここで $d\mathbf{r}^a$ を

$$d\mathbf{r}^a = \mathbf{p}_i d\xi^i \quad (35)$$

により定義すると、これから $(ds^a)^2 = d\mathbf{r}^a \cdot d\mathbf{r}^a = |d\mathbf{r}^a|^2$ が成り立つ。ただし、式 (35) で $d\mathbf{r}^a$ と書いたからといって、 $\mathbf{r}^a$ とかいうものが存在するとか $d\mathbf{r}^a$ がその微分だとか言っているわけではないが (そのような大域的

** 実験での加振時間はせいぜい数十秒であり、ペーストが乾燥し収縮する時間尺度 (日のオーダー) に比べてずっと短い。

†† 自然計量による Maxwell モデルの再定式化は、一部のレオロジー研究者 (文献 [12, 13] の著者など) のあいだでは既に知られていた。しかし、筆者が調べた範囲では、自然計量とその緩和についてはっきりと定式化している文献は見つけることができなかった。

な積分可能性は保証されていない), 個々の微小要素に対しては, $d\mathbf{r}^{\natural}$ をその自然な配位と見なす解釈が問題なく成立する。さて $\det \mathbf{g}^{\natural}$ は非零だから, $\mathbf{p}_i$ は一次独立であり, したがって式 (35) は $d\xi^i = \mathbf{p}_i^{\natural} \cdot d\mathbf{r}^{\natural}$ のように逆に解けるはずである。この式と “Euclid 計量” の式 (22) から, Euclid 距離 ds と自然配位 $d\mathbf{r}^{\natural}$ の関係式

$$ds^2 = (g_{ij} \mathbf{p}_i^{\natural} \otimes \mathbf{p}_j^{\natural}) : (d\mathbf{r}^{\natural} \otimes d\mathbf{r}^{\natural}) \quad (36)$$

が得られる。この二次形式の固有値を $\{\lambda_{\alpha}^2\}$ としよう。これは, α 番目の主軸にそって $ds^2 = \lambda_{\alpha}^2 |d\mathbf{r}^{\natural}|^2$ が成り立つこと, すなわち固有値 λ_{α} の幾何学的な意味が線要素の伸長率であることを示している。等方性により, 弾性エネルギー (E とする) はこれらの固有値の対称式でなければならない。微小変形 ($|\lambda_{\alpha} - 1| \ll 1$) に対して正しい Hooke 極限をもつ最も簡単な形は, たとえば $n_d = 3$ の場合,

$$E = \frac{1}{2} S (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (37)$$

である。式 (37) は, 新 Hooke 弾性 (neo-Hookean) の構成関係式として知られている [21]。微小とは限らない一般の変形に対して, $\varepsilon = \sum_{\alpha} (\lambda_{\alpha}^2 - 1)$ と定義し, これと $\mathbf{p}_i^{\natural}$ の定義を用いて弾性歪みエネルギー E を計算すると, 自然計量テンソルの逆行列を用いて

$$E = \frac{1}{2} S \varepsilon, \quad \varepsilon = g_{ij} g_{\natural}^{ij} - n_d \quad (38)$$

と書ける。

弾性エネルギー E は, 計量テンソル $\mathbf{g}$ を通じて $\mathbf{r}$ の汎関数となっている。非圧縮条件 (29) のもとで $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi)$ に関する E の変分を計算し, 応力テンソルの反変成分についての式 (31) を導出しよう。準備として

$$\begin{aligned} \delta(\det \mathbf{g}) &= (\det \mathbf{g}) g^{ij} \delta g_{ij}, & \delta g_{ij} &= \delta(\partial_i \mathbf{r} \cdot \partial_j \mathbf{r}) = (\partial_i \delta \mathbf{r}) \cdot \partial_j \mathbf{r} + \partial_i \mathbf{r} \cdot (\partial_j \delta \mathbf{r}), \\ \partial_j \sqrt{\det \mathbf{g}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\det \mathbf{g}} g^{kl} \partial_j g_{kl} = \sqrt{\det \mathbf{g}} (\nabla \xi^k) \cdot \partial_j \partial_k \mathbf{r}, \end{aligned}$$

が成り立つことを確認し, これらの式を用いて変分を計算すると

$$\begin{aligned} \delta \int E dV &= \frac{1}{2} S \delta \int (g_{ij} g_{\natural}^{ij} - n_d) \sqrt{\det \mathbf{g}} d^n \xi = \frac{1}{2} S \int \left(g_{\natural}^{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon g^{ij} \right) \delta g_{ij} \sqrt{\det \mathbf{g}} d^n \xi \\ &= S \int \left(g_{\natural}^{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon g^{ij} \right) (\partial_i \mathbf{r}) \cdot (\partial_j \delta \mathbf{r}) \sqrt{\det \mathbf{g}} d^n \xi \\ &= -S \int \left\{ \partial_j \left(\left(g_{\natural}^{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon g^{ij} \right) \sqrt{\det \mathbf{g}} \partial_i \mathbf{r} \right) \right\} \cdot \delta \mathbf{r} d^n \xi \\ &= -S \int \left\{ (\nabla \xi^k) \cdot \partial_k \left(\left(g_{\natural}^{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon g^{ij} \right) (\partial_i \mathbf{r}) \otimes (\partial_j \mathbf{r}) \right) \right\} \cdot \delta \mathbf{r} \sqrt{\det \mathbf{g}} d^n \xi \end{aligned}$$

となる。また, 非圧縮条件のための Lagrange 未定乗数を p' とすると

$$\begin{aligned} \delta \int p' (\sqrt{\det \mathbf{g}} - 1) dV &= \delta \int (\sqrt{\det \mathbf{g}} - 1) \sqrt{\det \mathbf{g}} d^n \xi = \int p' \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\det \mathbf{g}}} \right) \delta(\det \mathbf{g}) d^n \xi \\ &= \int p' \left(\sqrt{\det \mathbf{g}} - \frac{1}{2} \right) 2g^{ij} (\partial_i \mathbf{r}) \cdot (\partial_j \delta \mathbf{r}) \sqrt{\det \mathbf{g}} d^n \xi \\ &= - \int \left\{ \partial_j \left(p' (2\sqrt{\det \mathbf{g}} - 1) g^{ij} (\partial_i \mathbf{r}) \sqrt{\det \mathbf{g}} \right) \right\} \cdot \delta \mathbf{r} d^n \xi \\ &= - \int \left\{ (\nabla \xi^k) \cdot \partial_k \left(p' (2\sqrt{\det \mathbf{g}} - 1) g^{ij} (\partial_i \mathbf{r}) \otimes (\partial_j \mathbf{r}) \right) \right\} \cdot \delta \mathbf{r} \sqrt{\det \mathbf{g}} d^n \xi \end{aligned}$$

であるので, 結果をまとめると

$$\delta \int (E - p' (\sqrt{\det \mathbf{g}} - 1)) dV = \int \{ (\nabla \xi^k) \cdot \partial_k (P^{ij} (\partial_i \mathbf{r}) \otimes (\partial_j \mathbf{r})) \} \cdot \delta \mathbf{r} \sqrt{\det \mathbf{g}} d^n \xi \quad (39)$$

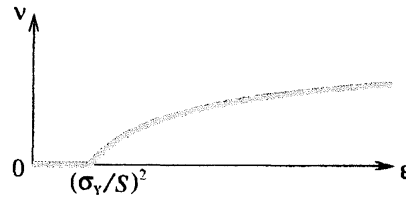


図 3: 式 (43) で定められる緩和時間の逆数: $\tau^{-1} = \nu(\epsilon)$.

となり, ここで

$$P^{ij} = -S \left(g_b^{ij} + \frac{1}{2} \epsilon g^{ij} \right) + p' \left(2\sqrt{\det g} - 1 \right) g^{ij} = -S g_b^{ij} + (p' - E) g^{ij}. \quad (40)$$

ただし最後の等号は $\sqrt{\det g} = 1$ による。未定乗数を $p' = \bar{p} + E - S$ のように書き直し, 式 (31) を得る。

モデルの非弾性部分 (32) の検討に移ろう。式 (32) は自然計量テンソル (の逆行列) の緩和をあらわしている。自然計量は, 粒子間結合ネットワークによって定まる, エネルギー的が最小となるような粒子配置を表現していると考えられる。ネットワークの強さあるいは粒子間結合の密度は, 自然計量 g^b 自体ではなく, その逆行列 g_b によってあらわされる。さて流動状態にあるペーストでは, 粒子間結合ネットワークは非永続的であり, 崩壊と等方的再構築を繰り返すはずである。崩壊頻度を ν とし, 再構築の頻度を ν_* とすると, 粒子間結合密度の時間的变化は $-\nu g_b^{ij} + \nu_* g^{ij}$ となり, これから式 (32) が得られる。

式 (32) において, 頻度 ν と ν_* は別物ではなく, g^b の非圧縮性

$$\det g^b = 1 \quad (41)$$

を満たすように比 $K = \nu_*/\nu$ が定まる。式 (41) を t で微分し式 (32) を代入すると, $n_d \nu = g_{ij}^b g^{ij} \nu_*$ すなわち

$$K = \frac{n_d}{g_{ij}^b g^{ij}} \quad \left(\text{i.e. } \nu_* = \frac{n_d}{g_{ij}^b g^{ij}} \nu \right) \quad (42)$$

でなければならないことが分かる。

前の章の式 (26) に従い, τ は弾性歪みエネルギーの関数であるものとしよう。すなわち, 式 (38) で与えられる ϵ を用いて $\tau = \tau(\epsilon)$ と書けるものとする。式 (26) と整合する最も簡単な形は階段関数だが, τ は ϵ の連続関数だとするほうが, 物理的にはより現実的であり, 数学的にはより困難が少ない。我々のモデルでは

$$\tau = \nu^{-1}, \quad \nu = \nu(\epsilon) = \frac{S}{\eta_p} \max \left(0, 1 - \frac{\sigma_Y/S}{\sqrt{\epsilon}} \right) \quad (43)$$

という形を仮定する。ここで σ_Y は降伏応力をあらわす (剪断応力 σ に対するエネルギー ϵ は, ほぼ σ^2/S^2 である)。式 (43) は, 降伏点で弱い特異性をもつけれども Lipschitz 連続である (図 3)。剪断率 $\dot{\gamma}$ の単純剪断流の場合には, 式 (43) は Bingham 塑性 [9, 14, 25, 26] と一致する。

5 中原効果

5.1 平行流の場合の方程式系

前の章で, 等方的なペーストに対して妥当と思われるモデル方程式系が得られた。このモデルを, 傾斜角 θ の斜面流あるいは水平状態での正弦的加振という具体的な設定のもとで解析しよう。

簡単化のため、空間次元を $n_d = 2$ としよう。運動はすべて (x, z) 平面内で生じるものとし、この面内でのペーストの等方性を仮定する。流れは、重力 $\mathbf{F} = \rho \mathbf{G} = (G \sin \theta) \mathbf{e}_x - (G \cos \theta) \mathbf{e}_z$ によって、または加振による慣性力 $\mathbf{F} = (\rho A_f \Omega_f^2 \sin \Omega_f t) \mathbf{e}_x$ によって駆動される。

ペーストの層の厚さは一様だとすると、流体要素の運動は、今の場合、1 個の関数 $X = X(\zeta, t)$ を用いて

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \xi + X \\ \zeta \end{bmatrix}_{\text{Cartesian}} = (\xi + X) \mathbf{e}_x + \zeta \mathbf{e}_z \quad (44)$$

のようにあらわすことができる。式 (44) の時間微分が速度 $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{r} = U \mathbf{e}_x$ を与え、ここで $U = \partial_t X$ である。式 (44) を式 (22) に代入して Euclid 計量テンソル g_{ij} を求めると、結果は X を用いて

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_{\xi\xi} & g_{\xi\zeta} \\ g_{\zeta\xi} & g_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X' \\ X' & 1 + X'^2 \end{bmatrix} \quad \left(\text{ただし } X' = \frac{\partial X}{\partial \zeta} \right) \quad (45)$$

と書ける。非圧縮条件 (29) は既に満たされているため、あらためて要請する必要はない。

自然計量テンソルは、ここでは 2×2 の対称なテンソルで、さらに $\det \mathbf{g}^{\natural} = 1$ という条件がついているので、2 個のパラメータで表示できる。その 2 個のパラメータを $\alpha = \alpha(\zeta, t)$, $\beta = \beta(\zeta, t)$ と書き、

$$\mathbf{g}^{\natural} = \begin{bmatrix} g_{\xi\xi}^{\natural} & g_{\xi\zeta}^{\natural} \\ g_{\zeta\xi}^{\natural} & g_{\zeta\zeta}^{\natural} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\alpha} & \beta \\ \beta & (1 + \beta^2) e^{\alpha} \end{bmatrix} \quad (46)$$

のようにパラメータ表示しよう。続いてその逆行列 $\mathbf{g}_{\natural}$ を計算し、式 (45) から得られる $\mathbf{g}^{-1}$ とともに構成関係式に代入する。こうして式 (31) から応力テンソル $\mathbf{P}$ が得られ、その Descartes 成分表示は

$$\mathbf{P} = \bar{p} \mathbf{1} - \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma} = S \begin{bmatrix} e^{\alpha} (1 + \bar{\sigma}^2) - 1 & \bar{\sigma} \\ \bar{\sigma} & e^{-\alpha} - 1 \end{bmatrix}_{\text{Cartesian}} \quad (47)$$

となる。ただしここで $\bar{\sigma} = \sigma_{xz}/S$ は剪断応力を無次元化したものであり、 $\bar{\sigma} = e^{-\alpha} X' - \beta$ で与えられる。

運動量の式 (30) は

$$\rho \partial_t U = S \partial_{\zeta} \bar{\sigma} + F_x \quad (48)$$

となり、ここで $F_x = \rho G \sin \theta$ または $F_x = \rho A_f \Omega_f^2 \sin \Omega_f t$ である。なお、運動方程式の深さ方向の成分は静水圧を決定するのみで、ダイナミクスには関与しない。

自然計量テンソル $\mathbf{g}^{\natural}$ の緩和は、式 (32) によって、あるいは同じことであるが式 (34) によって記述される。計量テンソル $\mathbf{g}$ の具体的表示式 (45) と $\mathbf{g}^{\natural}$ のパラメータ表示 (46) を式 (34) に代入し、行列の各成分を等値すると、2 つの変数 (α, β) に対する 3 つの方程式が出てくる。これらの方程式が整合的であるための条件（可解条件）として、 K が式 (42) から $K = 2/(2 + \varepsilon)$ と定められ、結果を整理すると

$$\tau \partial_t \alpha = 1 - \frac{2}{2 + \varepsilon} e^{\alpha}, \quad \tau \partial_t \beta = -\beta + \frac{2}{2 + \varepsilon} X'$$

となる。右辺に含まれる ε は、定義式 (38) から次のように計算できる：

$$\varepsilon = e^{\alpha} (e^{-\alpha} X' - \beta)^2 + 2 (\cosh \alpha - 1) = e^{\alpha} \bar{\sigma}^2 + 2 (\cosh \alpha - 1). \quad (49)$$

上記の段階で閉じた方程式系が得られるが、 X' や β は、時間経過とともに際限なく増加するので扱いにくい。この不都合を避けるために、方程式系を U と $\bar{\sigma}$ で書き直す。さらに τ を式 (43) の $\nu(\varepsilon) = 1/\tau$ で書き直し、3 つの変数 $\alpha(\zeta, t)$, $\bar{\sigma}(\zeta, t)$, $U(\zeta, t)$ に対する 3 つの方程式

$$\partial_t \alpha = \nu(\varepsilon) \left(1 - \frac{2e^{\alpha}}{2 + \varepsilon} \right), \quad (50a)$$

$$\partial_t \bar{\sigma} = e^{-\alpha} \partial_{\zeta} U - \nu(\varepsilon) \bar{\sigma}, \quad (50b)$$

$$\partial_t U = \frac{S}{\rho} \partial_{\zeta} \bar{\sigma} + \rho^{-1} F_x. \quad (50c)$$

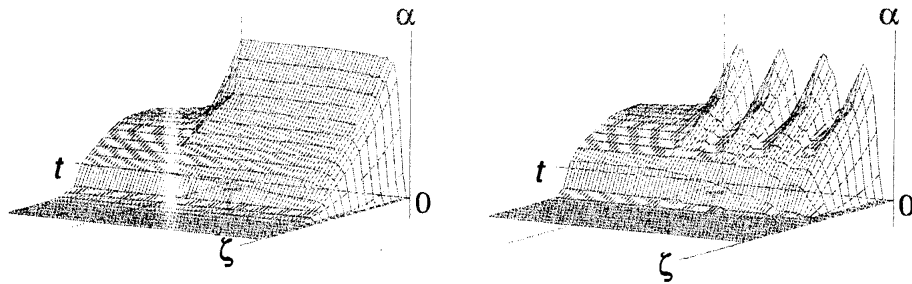


図 4: $\alpha(\zeta, t)$ の時間発展の例. 時刻 $t = T_*$ で外力をオフにした。

を得る (ε は式 (49) で与えられる)。境界条件として、底面で粘着条件を課し、表面で剪断応力をゼロとする：

$$U|_{\zeta=0} = 0, \quad \tilde{\sigma}|_{\zeta=H} = 0. \quad (51)$$

5.2 モデルの解析および考察

式 (50) および境界条件 (51) で定められる発展方程式の系において、特に、 α という量に注目しよう。式 (50a) から分かるとおり、 α の基礎的な挙動は、図 3 のような $\nu(\varepsilon)$ の閾值的な性質に支配される。閾値よりも小さい ε に対しては、 $\nu(\varepsilon)$ はゼロとなり、したがって、ほぼ任意の ζ の関数が式 (50a) の定常解になり得る (ε が閾値以下にとどまるという条件を破らない限り)。このことは、ペーストに残留し得る α の値には大幅な非一意性があることを意味する。無限個の定常解のうちどれが実現するかは、系の時間発展の履歴を考えないと決められない (乾燥粉体におけるこれと同じような現象は「静力学的不定性」と呼ばれている [27])。

これに対し、流動中のペーストにおける α は定常解に向かって緩和的に発展し、その値は、ペーストの物性値や層の厚さが決まれば一意的に決まる。定常流では、式 (50a) において $\partial_t \alpha = 0$ であり、また $\nu(\varepsilon) \neq 0$ でなければならない。このとき、簡単な計算により $e^\alpha = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon > 1$ つまり $\alpha > 0$ となることが分かる。すなわち、定常流では α は正の値をとる。

いったん流れが生じて再び停止した場合、 α の値はどうなるだろうか？ 図 4 に数値計算結果の一例を示す。左の図は斜面流に相当する一定の外力を加えた場合 [7, 8]、右の図は振動外力を加えた場合で、どちらもある時刻 $t = T_*$ で外力を切り、流れを停止させた。数値計算結果は、どちらの場合でも、外力による流れによって正の α が生成されること、また、生成された α は外力をオフにしたあとでも完全に減衰し消滅することではなく、正の値のまま残留し続けることを示している。

こうして正の α が生成し残留することから、亀裂の異方性が説明できる。乾燥が進むあいだにペーストはゆっくり収縮し、数学的には、この過程は自然計量 g^a の等方的収縮として記述できる。仮にペーストが流動過程を経ないなら、この収縮は (x, y) 平面 (表面および底面に平行な面) において等方的な張力を生じ、したがって等方的な亀裂パターンを生じるはずである。しかし流動過程を経たペーストにおいては、これによって流れ方向に正の α が生じており、その意味するところは自然計量が既に流れ方向に縮んでいるということである。式 (47) を用いて $\tilde{\sigma} = 0$ の場合の法線応力差を計算すると

$$\sigma_{xx} - \sigma_{zz} = 2S \sinh \alpha \quad (52)$$

となり、 $\alpha > 0$ に対しては明らかにこの法線応力差は正であって、 x 方向の残留張力を示している^{††}。したがって最初に切れるのは流れ方向の結合ということになり、こうして第 1 種 Nakahara 効果が説明される。

^{††} 正の α が張力を意味することは、 e^α が自然計量テンソル (46) の $\xi\xi$ 成分であることを思い出し、 $e^\alpha < 1$ を x 方向の (仮想的な) “バネ” の自然長の縮みと考えれば直感的にも納得できる。

以上のことから、第1種 Nakahara 効果に関しては、塑性流動によって α が正になり、それがそのまま凍結することで流れ方向に張力が生じて、それにより乾燥後の亀裂に異方性が生じるという筋書きが可能である。なお、今後の発展として、たとえば粒子配向と α の効果が競合するようなモデルを構築すれば、第1種 Nakahara 効果から第2種 Nakahara 効果への転移を記述できるのではないかと考えられる。

本研究の実施にあたり、科学研究費補助金(若手B, 課題番号 18740233)の支援を受けた。

参考文献

- [1] M. C. Miguel & M. Rubi. *Jamming, Yielding, and Irreversible Deformation in Condensed Matter*. Springer-Verlag, 2006.
- [2] 大信田 丈志ほか. 塑性という名の動的機構. 物性研究, Vol. 88, No. 3, p. 315, 2007.
- [3] 中原明生, 松尾洋介. 乾燥破壊における粉体の記憶の実験. 物性研究, Vol. 81, No. 2, pp. 184–185, 2003.
- [4] A. Nakahara & Y. Matsuo. Imprinting memory into paste and its visualization as crack patterns in drying process. *J. Phys. Soc. Japan*, Vol. 74, pp. 1362–1365, 2005.
- [5] A. Nakahara & Y. Matsuo. Imprinting memory into paste to control crack formation in drying process. *J. Stat. Mech.*, 2006. P07016.
- [6] A. Nakahara & Y. Matsuo. Transition in the pattern of cracks resulting from memory effects in paste. *Phys. Rev. E*, Vol. 74, p. 045102(R), 2006.
- [7] Ooshida Takeshi. Continuum theory of memory effect in crack patterns of drying pastes. *Phys. Rev. E*, Vol. 77, p. 061501, 2008.
- [8] 大信田 丈志. 記憶する塑性体の巨視的理論. 物性研究, Vol. 88, No. 3, pp. 352–359, 2007.
- [9] 中村 喜代次. 非ニュートン流体力学. コロナ社, 東京, 1997.
- [10] D. D. Joseph. *Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids*. Springer-Verlag, 1990.
- [11] Y. Miyamoto, K. Fukao, H. Yamao & K. Sekimoto. Memory effect on the glass transition in vulcanized rubber. *Phys. Rev. Letter*, Vol. 88, p. 225504, 2002.
- [12] K. Kruse, J. F. Joanny, F. Jülicher, J. Prost & K. Sekimoto. Asters, vortices, and rotating spirals in active gels of polar filaments. *Phys. Rev. Letter*, Vol. 92, No. 7, p. 078101, 2004.
- [13] K. Kruse, J. F. Joanny, F. Jülicher, J. Prost & K. Sekimoto. Generic theory of active polar gels: a paradigm for cytoskeletal dynamics. *Eur. Phys. J. E*, Vol. 16, No. 1, pp. 5–16, 2005.
- [14] Ooshida Takeshi & K. Sekimoto. Internal stress in a model elastoplastic fluid. *Phys. Rev. Letter*, Vol. 95, No. 10, p. 108301, 2005.
- [15] E. H. Lee. Elastic-plastic deformation at finite strains. *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 36, pp. 1–6, 1969.
- [16] V. A. Lubarda & E. H. Lee. A correct definition of elastic and plastic definition and its computational significance. *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 48, pp. 35–40, 1981.
- [17] 大森英樹. 力学的な微分幾何. 入門現代の数学, No. 8. 日本評論社, 1980.
- [18] A. Bennett. *Lagrangian fluid dynamics*. Cambridge University Press, 2006.
- [19] 水野 芳成. 連続体の解析力学. 講談社出版サービスセンター, 1997.
- [20] R. B. Bird, R. C. Armstrong & O. Hassager. *Dynamics of polymeric liquids*, Vol. 1. Wiley, second edition, 1987.
- [21] J. E. Marsden & T. J. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications, 1994. published originally by Prentice-Hall, 1983.
- [22] 中原 幹夫. 理論物理学のための幾何学とトポロジー. ピアソン・エデュケーション, 2000.
- [23] R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, 1950.
- [24] H. Hencky. Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. *Zeits. Ang. Math. Mech.*, Vol. 4, p. 323, 1924.
- [25] E. C. Bingham. *Fluidity and plasticity*. McGraw-Hill, New York, 1922.
- [26] C. C. Mei & M. Yui. Slow flow of a bingham fluid in a shallow channel of finite width. *J. Fluid Mech.*, Vol. 431, pp. 135–159, 2001.
- [27] J. Duran. *Sands, Powders, and Grains; An Introduction to the Physics of Granular Materials*. Springer-Verlag, New York, 2000. translated by Axel Reisinger.