

Painlevé 方程式の双線形化による解析

早大 理工 大石 進一

1. はじめに

最近、完全積分可能な非線形方程式に関する理論が著しい進歩を見せた。この15年間に於けるソリトン理論の進歩は、その代表的な例である。ソリトン理論の進歩の結果、ソリトン系を記述する完全積分可能な非線形発展方程式が数多く発見されるとともに、これらの方程式を解析するための手法としてスペクトル保存変形理論¹⁾や広田の方法²⁻⁵⁾などが、発見され発展させられてきている。一方、統計力学などに現われる特殊な数理解物理的な問題の解析から出発した佐藤、三輪、神保氏によるセロドロミー保存変形理論も最近大きな展開を見せている⁶⁾。その結果、完全積分可能な非線形方程式を解析するためのセロドロミー保存変形理論に基づく新しい視点が明らかにされた。この理論では、アーベル関数論におけるθ関数の拡張と考えられるτ関数が重要な役割を演じ、この理論の枠内で取り扱える非線形方程式の解は有理形と

なり、整関数である τ 関数の比として表わし得ることが示されている⁶⁾。更に、 τ 関数の θ 関数の拡張としての性質から、これらの非線形方程式は動く危点をもたない、すなわち、Painlevé 的性質をもつものと予想されている⁶⁾。

このような佐藤、三輪、神保理論の視点から見れば、ソリトン方程式の N ソリトン解や N -gap 解は τ 関数が θ 関数となる最も素直な場合として特徴づけられる。また、特に、広田の方法は非線形方程式の τ 関数の従う方程式が双線形方程式²⁻⁵⁾となる場合に、その双線形方程式を利用して τ 関数を構成する方法と考えられる。^{広田の方法の}このような見方を数学的に徹底するには、なおいろいろな問題があると思われるが、ここでは、広田の方法を用いて Painlevé の II ~ IV 形方程式(の特別な場合)が解析できることを示して、このような方向への1つの足がかりとしたい。

2. Painlevé 方程式の双線形化

良く知られているように、Painlevé 方程式には、次の I から VI 形までがある：

$$(I \text{ 形}) \quad w'' = 6w^2 + z$$

$$(II \text{ 形}) \quad w'' = 2w^3 + zw + \alpha$$

$$(III \text{ 形}) \quad w'' = w^{-1}(w')^2 - z^{-1}w' + z^{-1}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \delta w^{-1}$$

$$(IV \text{ 形}) \quad w'' = (2w)^{-1} (w')^2 + (3w^3)/2 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \beta w^{-1}$$

$$(V \text{ 形}) \quad w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1} \right) (w')^2 - \frac{1}{z} w' + \frac{(w-1)^2}{z^2} \left(\alpha w + \frac{\beta}{w} \right) + \frac{\gamma}{z} w + \delta \frac{w(w+1)}{w-1}$$

$$(VI \text{ 形}) \quad w'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z} \right) (w')^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z} \right) w' + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{z}{w^2} + \gamma \frac{z-1}{(w-1)^2} + \delta \frac{z(z-1)}{(w-z)^2} \right)$$

但し、 $w = w(z)$ 、 $w' = dw/dz$ で、 α, β, γ 及び δ は複素定数とする。以下、簡単のため、Painlevé の J 形の方程式を P_J ($J=I \sim VI$) と略記することにする。

広田の方法でこれらの方程式を扱うためには、解が整関数の比に書けるとして方程式に従属変数変換を施し、Painlevé 方程式を新しい従属変数に対する双線形方程式に変換する必要がある。 P_I から P_{III} の方程式に対しては、このことは実質的に Painlevé 自身が行っており、結果を広田の双線形作用素を用いて現代流に書けば次のようになる：先ず、 P_I は、変換

$$w(z) = -[\log \tau(z)]'' \quad (2.1)$$

によって双線形方程式

$$(D_z^4 + z) \tau \cdot \tau = 0 \quad (2.2)$$

に変換される。但し、 D_z^n は広田の双線形作用素²⁾で、

$$D_z^n \tau_1(z) \cdot \tau_2(z) \triangleq \left(\frac{\partial^n}{\partial z^n} - \frac{\partial^n}{\partial z'^n} \right) \tau_1(z) \tau_2(z') \Big|_{z'=z} \quad (2.3)$$

で定義される。また、 P_{II} は、変換

$$w = \{ \log [(\tau_1 + i\tau_2) / (\tau_1 - i\tau_2)] \}' \quad (2.4)$$

によって、双線形方程式

$$\begin{cases} (D_z^3 - z D_z) \tau_2 \cdot \tau_1 = 2^{-1} i \alpha (\tau_1^2 + \tau_2^2) \end{cases} \quad (2.5.1)$$

$$\begin{cases} D_z^2 (\tau_1 \cdot \tau_1 + \tau_2 \cdot \tau_2) = 0 \end{cases} \quad (2.5.2)$$

に変換される。但し、 $i = \sqrt{-1}$ 。 P_{III} は、変換

$$w = \tau_1 / \tau_2 \quad (2.6)$$

によって、双線形方程式

$$\begin{cases} (z D_z^2 + D_z^+) \tau_2 \cdot \tau_2 + 2\alpha \tau_1 \tau_2 + 2\gamma z \tau_1^2 = 0 \end{cases} \quad (2.7.1)$$

$$\begin{cases} (z D_z^2 + D_z^+) \tau_1 \cdot \tau_1 - 2\beta \tau_2 \tau_1 - 2\delta z \tau_2^2 = 0 \end{cases} \quad (2.7.2)$$

に変換される。但し、

$$\begin{aligned} D_z^+ \tau_1 \cdot \tau_2 &\triangleq (\tau_1 \tau_2)' \\ &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'} \right) \tau_1(z) \tau_2(z') \Big|_{z'=z} \end{aligned} \quad (2.8)$$

とする。

また、 P_{IV} についても同様に双線形化できるが、それは、以下で述べることにして、ここでは省略する。また、以下で、 P_{III} の解を具体的に構成する際には、式(2.7)の Decoupling⁸⁾

とは別の Decoupling が選ばれる。

3. Painlevé II 形方程式の解の構成

この節では、 P_{II} を例にとって、その双線形形式を利用して、解の 1 径数族が構成できることを示す。

簡単のため、 $\alpha = 0$ の場合を考える。また、便宜上、先ず P_{II} において

$$w(z) = i v(z) \quad (3.1)$$

と置いて得られる方程式

$$v'' = -2v^3 + zv \quad (3.2)$$

の z が実数のとき v も実数となる解を構成することを考える。

但し、 v は、境界条件

$$v(z) \rightarrow a A_i(z) \quad (3.3)$$

を満たすものとする。ここに、 a は実定数、 $A_i(z)$ は Airy 関数で

$$A_i(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C \exp\left[i\left(kz + \frac{k^3}{3}\right)\right] dk \quad (3.4)$$

と定義されるものとする。 C は複素 k -平面の上半平面内の積分路で $k = -\infty$ から出て $k = \infty$ に入るものとする。式 (3.3) の境界条件の下で、式 (3.2) は変換

$$v = -i \left\{ \log \left[(\tau_1 + i\tau_2) / (\tau_1 - i\tau_2) \right] \right\}' \quad (3.5)$$

によって双線形方程式

$$\begin{cases} (-z D_z + D_z^3) \tau_2 \cdot \tau_1 = 0 & (3.6.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_z^2 (\tau_1 \cdot \tau_1 + \tau_2 \cdot \tau_2) = 0 & (3.6.2) \end{cases}$$

と結ばれている。以下、作用素 D_z^n の双線形性を用いて、式(3.6)の解を構成することを考える。

3.1 双線形方程式の解の構成法

$$\begin{cases} \tau_1(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n} \tilde{F}_{2n}(z) & (3.7.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1} \tilde{F}_{2n+1}(z) & (3.7.2) \end{cases}$$

と置く。式(3.7)を式(3.6)に代入すると、作用素 D_z^n の双線形性から、もし関数系 $\tilde{F}_m$ が次の方程式系

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=0}^n (-z D_z + D_z^3) \tilde{F}_{2(n-\alpha)+1} \cdot \tilde{F}_{2\alpha} = 0 & (3.8, 2n+1) \\ \sum_{\alpha=0}^n D_z^2 (\tilde{F}_{2(n-\alpha)} \cdot \tilde{F}_{2\alpha} + \tilde{F}_{2(n-\alpha)+1} \cdot \tilde{F}_{2\alpha-1}) = 0 & (3.8, 2n) \end{cases}$$

を満たしていれば、式(3.7)で定義される関数 τ_1 と τ_2 は、式(3.6)の解となることがわかる。但し、 $\tilde{F}_0 = 1$, $\tilde{F}_{-1} = 0$ とする。ここで、式(3.8, m)は、関数系 $\{\tilde{F}_\alpha\}_{\alpha=0}^{m-1}$ が既知のときには、関数 $\tilde{F}_m$ に対する線形方程式になることに注意する。特に、式(3.7.1)は、関数 $\tilde{F}_1$ に対する齊次線形微分方程式

$$\tilde{F}_1''' - z \tilde{F}_1' = 0 \quad (3.9)$$

となる。式(3.9)は、元々 P_{II} の線形化方程式であり、その解として

$$\tilde{F}_1(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_C \exp\left[i\left(kz + \frac{k^3}{3}\right)\right] \frac{dk}{k} \quad (3.10)$$

を取ることが出来る。従って、以上のことから、もし方程式系(3.8, m)を、 $\tilde{F}_0 = 1$ と式(3.10)で与えられる $\tilde{F}_1$ から出発して順次 m の小さい方から解いて行って関数系 $\tilde{F}_m$ を決定できれば、式(3.6)の解を線形枝法のみで構成できることがわかる。

3.2. 解の1径数族

本節では、以下、このような手続きによって、関数 $\tilde{F}_m$ を次のように決定できることを示す：

$$\tilde{F}_m(z) = \tilde{f}_m(z, t = 1/3). \quad (3.11)$$

但し、

$$\begin{aligned} \tilde{f}_m(z, t) = & \frac{1}{(4\pi i)^m m!} \int_C \cdots \int_C \left[\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq m} -\frac{(k_\alpha - k_\beta)^2}{(k_\alpha + k_\beta)^2} \right] \\ & \times \exp\left[i \sum_{\alpha=1}^m (k_\alpha z + k_\alpha^3 t)\right] \prod_{\alpha=1}^m \frac{dk_\alpha}{k_\alpha} \end{aligned} \quad (3.12)$$

(証明) 関数系 $\{\tilde{f}_m\}_{m=0}^\infty$ から定義される関数

$$\begin{cases} f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n} \tilde{f}_{2n} \\ g = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1} \tilde{f}_{2n+1} \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.13.1) \\ (3.13.2) \end{matrix}$$

が、変形 KadV 方程式

$$u_t + 6u^2 u_z + u_{zzz} = 0 \quad (3.14)$$

の双線形形式

$$\begin{cases} (D_t + D_z^3) f \cdot f = 0 \end{cases} \quad (3.15.1)$$

$$\begin{cases} D_z^2 (f \cdot f + g \cdot g) = 0 \end{cases} \quad (3.15.2)$$

の解となることに注意する⁹⁾。但し、

$$u = -i \left\{ \log [(f + ig)/(f - ig)] \right\}_z \quad (3.16)$$

で、独立変数による添字は、偏微分を表わすものとする。このことを認めれば、式(3.7)が、式(3.6)の解となることを示すためには、次の関係式

$$-z \tilde{F}'_m(z) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}_m(z, t) \right]_{t=\frac{1}{3}} \quad (3.17)$$

が示されれば十分ことがわかる。実際、式(3.17)が示されれば、

$$\begin{cases} (-z D_z + D_z^3) \tau_2 \cdot \tau_1 = (D_t + D_z^3) f \cdot f \Big|_{t=\frac{1}{3}} = 0 \end{cases} \quad (3.18.1)$$

$$\begin{cases} D_z^2 (\tau_1 \cdot \tau_1 + \tau_2 \cdot \tau_2) = D_z^2 (f \cdot f + g \cdot g) \Big|_{t=\frac{1}{3}} = 0 \end{cases} \quad (3.18.2)$$

となって、関数 τ_1, τ_2 が式(3.6)の解となることがわかる。

一方、公式(3.17)は、積分路 C の取り方から部分積分により

証明できる。従って、式(3.7)によって定義される τ_1 と τ_2 が式(3.6)の解となることが証明された。

3.3. 解の Painlevé 的性質

次に、以上で構成された P_{II} の解の1径数族

$$v = -i \left\{ \log \left[(\tau_1 + i\tau_2) / (\tau_1 - i\tau_2) \right] \right\}' \quad (3.19)$$

が、Painlevé 的性質、すなわち、動く危点をもたないことを示す。そのために、先ず、関数

$$T = \tau_1 + i\tau_2 \quad (3.20)$$

が Gel'fand - Levitan - Marchenko (GLM) 積分方程式の Fredholm 行列式の形に書き直せることを示す。

Gram 行列式に対する公式

$$\det \Delta_n = \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} \frac{(k_\alpha - k_\beta)^2}{(k_\alpha + k_\beta)^2}, \quad (3.21)$$

但し、 Δ_n は $n \times n$ 行列で第 $\alpha - \beta$ 要素に $2k_\alpha / (k_\alpha + k_\beta)$ をもつもの、に注意すれば、関数 F は

$$T = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{2^n n!} \int_C \cdots \int_C \det(\Delta_n) \exp \left[i \sum \left(k_\alpha z + \frac{k_\alpha^3}{3} \right) \right] \times \prod_{\alpha=1}^n k_\alpha^{-1} dk_\alpha \quad (3.22)$$

と書き直せることがわかる。式(3.22)は、更に、次のように書き直すことができる：

$$T = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(2i)^n n!} \int_z^{\infty} \cdots \int_z^{\infty} \det(\Phi_n) \prod_{\alpha=1}^n ds_{\alpha} \quad (3.23)$$

但し、 Φ_n は $n \times n$ 行列で、 $\alpha - \beta$ 要素に

$$\tilde{A}_i(s_{\alpha} + s_{\beta}) \triangleq A_i[(s_{\alpha} + s_{\beta})/2] \quad (3.24)$$

をもつものとする。式 (3.23) は、Fredholm 行列式の形をしている。

次に、式 (3.23) を Fredholm 行列式としてもつ積分方程式を導出する。そのために、Fredholm⁽¹⁰⁾ に従い次の関数

$$\begin{aligned} \Sigma(z, y) = -\frac{a}{2i} \tilde{A}_i(z+y) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{(2i)^{n+1} n!} \int_z^{\infty} \cdots \int_z^{\infty} \det(\Psi_n) \\ \times \prod_{\alpha=1}^n ds_{\alpha} \quad (3.25) \end{aligned}$$

を導入する。但し、 Ψ_n は $(n+1) \times (n+1)$ 行列で、

$$\Psi_n = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i(z+y) & \tilde{A}_i(z+s_1) & \tilde{A}_i(z+s_2) & \cdots & \tilde{A}_i(z+s_n) \\ \tilde{A}_i(s_1+y) & \tilde{A}_i(s_1+s_1) & \tilde{A}_i(s_1+s_2) & \cdots & \tilde{A}_i(s_1+s_n) \\ \tilde{A}_i(s_2+y) & \tilde{A}_i(s_2+s_1) & \tilde{A}_i(s_2+s_2) & \cdots & \tilde{A}_i(s_2+s_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_i(s_n+y) & \tilde{A}_i(s_n+s_1) & \tilde{A}_i(s_n+s_2) & \cdots & \tilde{A}_i(s_n+s_n) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

で定義されるものとする。関数 Σ は Fredholm の第 1 種行列式に対応し、関数 $T'(z)$ の $z-y$ 空間への拡張になっている:

$$\Sigma(z, z) = T'(z). \quad (3.27)$$

式(3.25)において、各行列式 $\det(\Psi_n)$ を第1列について展開して整理すると、関数 $T(z)$ と関数 $X(z, y)$ との間の関係式

$$X(z, y) = \frac{ia}{2} \tilde{A}_i(z+y) T(z) + \frac{ia}{2} \int_z^\infty X(z+s) \tilde{A}_i(s+y) ds \quad (3.28)$$

を得る。この関係式から、関数 $K(z, y) \equiv X(z, y)/T(z)$ が、次のGLM積分方程式

$$K(z, y) + \frac{a}{2i} \tilde{A}_i(z+y) + \frac{a}{2i} \int_z^\infty K(z, s) \tilde{A}_i(s+y) ds = 0 \quad (3.29)$$

を満たすことがわかる。

関係式

$$v(z) = -i \left\{ \log [(\tau_1 + i\tau_2)/(\tau_1 - i\tau_2)] \right\}' \quad (3.30)$$

及び

$$K(z, z) = X(z, z)/T(z) = [\log T(z)]' \quad (3.31)$$

から

$$v(z) = 2 \operatorname{Im} K(z, z) \quad (3.32)$$

を得る。

ここで、Fredholm積分方程式論¹⁰⁾を用いれば、式(3.29)の解は一意で、関数 $T(z)$ と $X(z, y)$ が a の関数として整関数とな

ることが示せることに注意する。また、 $T(z)$ 及び $X(z, z)$ は z が有限のときには解析的であることも示される。こゝらのこと、式(3.31), (3.32)から、 $v(z)$ が Painlevé 的性質をもつことがわかる。

3.4. 解の漸近展開

次に、以上で構成した解 $v(z)$ の漸近的振舞を調べる。そのために、GLM積分方程式(3.29)を用いて、関数 $v(z)$ の漸近展開を導びくことにする。

形式的に、式(3.29)を Neumann - Liouville 展開で解くと

$$K(z, y) = \frac{ia}{2} \tilde{A}_i(z+y) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (ia)^{n+1} (\hat{\tilde{A}}_i^n \tilde{A}_i)(z, y) \quad (3.33)$$

を得る。但し、 $\hat{\tilde{A}}_i$ は積分作用素で、関数 $\psi(z, y)$ に対して

$$(\hat{\tilde{A}}_i \psi)(z, y) = 2^{-1} \int_z^{\infty} \psi(z, s) \tilde{A}_i(s, y) ds \quad (3.34)$$

で定義されるものとする。式(3.32)と(3.33)から

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1} \xi_{2n+1}(z) \quad (3.35)$$

を得る。但し、

$$\xi_m(z) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_C \cdots \int_C \frac{\exp[i \sum_{\alpha=1}^m (k_\alpha z + k_\alpha^3/3)]}{\prod_{\alpha=1}^{m-1} (k_\alpha + k_{\alpha+1})} \prod_{\alpha=1}^m dk_\alpha \quad (3.36)$$

で、 $\prod_{\alpha=1}^0 = 1$ とする。

ここで、展開 (3.36) は形式的なもので、漸近展開として理解すべきであることを注意する。但し、十分小さな a 、または、十分大きな z に対しては、この展開は収束して Taylor 展開と考えることができる。いずれにしても、以上のことから

$$v(z) \rightarrow a A_i(z) \quad (3.37)$$

が従う。

以上では、式 (3.2) の解で、 z が実数るとき v も実数となる解を構成した。 P_{II} の解で、 z が実数るとき w も実数となる解は、以上の解で a を純虚数に置きかえ、 $w = iv$ とすれば得られる。

4. 相似変換による解の構成

前章の議論によって、 P_{II} の解をその双線形形式を用いて構成できることが明らかにされた。この方法は、原理的には、 $P_{III} \sim P_V$ に対しても適用できるが、計算がかなり複雑になるものと予想される。そこで、本章では、 P_{II} から P_V がソリトン方程式を相似変換することによって得られることを利用することを考えよう。実際、相似変換によって変形 KdV 方程式は P_{II}

に^{11,12)}、Sine-Gordon方程式は P_{III} に^{11,12)}、非線形Schrödinger方程式は P_{IV} に¹¹⁾、Pohlmeyer-Lund-Regge (PLR)方程式は P_V に¹³⁾変換されることが知られている。

4.1 P_{II} の解

まず、例として P_{II} の場合を考える。変形KdV方程式(3.14)の双線形形式(3.15)において、相似変換に対応して

$$\begin{cases} f(x,t) = \tau_1(z) \\ g(x,t) = \tau_2(z) \end{cases} \quad (4.1)$$

と置いてみる。但し、 $z = x(3t)^{-\frac{1}{3}}$ 。すると簡単な計算の結果、式(3.15)は方程式(3.2)、 $v'' = -2v^3 + zv$ 、(以下、この方程式を P'_{II} と呼ぶ)の双線形形式(3.6)に変換されることがわかる。このとき、変換(3.16)、 $u = -i \{ \log[(f+ig)/(f-ig)] \}'$ 、は、

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -i(3t)^{-\frac{1}{3}} \{ \log[(\tau_1 + i\tau_2)/(\tau_1 - i\tau_2)] \}' \\ &= (3t)^{-\frac{1}{3}} v(z) \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。以上のことから、式(3.15)の解で条件(4.1)を満たす解が構成できれば、変換(3.5)を通して P'_{II} の解が構成できることがわかる。

以下、式(3.15)の解で条件(4.1)を満足するものを構成することを考える。我々は、式(3.15)の解として、式(3.13)の

形の解を知っている。但し、 $\tilde{f}_m$ は式 (3.12) において測度 dk_α/k_α を $h(k_\alpha)dk_\alpha$, $h(k_\alpha)$ は k_α の任意関数、で置きかえて得られる関数とする (この関数を以下やはり $\tilde{f}_m$ で表す)。ここで、 $\tilde{f}_m$ で、 $\kappa_\alpha = k_\alpha(\beta t)^{1/3}$ と置くと

$$\tilde{f}_m(x, t) = \frac{1}{(4\pi i)^m m!} \int_C \cdots \int_C \left[\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq m} - \frac{(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)^2}{(\kappa_\alpha + \kappa_\beta)^2} \right] \\ \times \exp \left[i \sum_{\alpha=1}^m \left(\kappa_\alpha z + \frac{\kappa_\alpha^3}{3} \right) \right] \prod_{\alpha=1}^m \frac{h(k_\alpha) dk_\alpha}{(\beta t)^{1/3}} \quad (4.3)$$

となることに注意する。従って、 $h(k) = k^{-1}$ と置けば、 $\tilde{f}_m(x, t) = \tilde{f}_m(z)$ となり、式 (3.13) を通して P_{II}' の解が得られることがわかる。この結果は、前章で得られた結果と一致する。

ここで、変形 KdV 方程式の双線形形式は、式 (3.15) だけに限られる訳ではないことを注意する。実際、

$$u = g_2/g_1 \quad (4.4)$$

の変換によって変形 KdV 方程式 (3.14) は、双線形方程式

$$\begin{cases} (D_t + D_x^3) g_2 \cdot g_1 = 0 \\ D_x^2 g_1 \cdot g_1 = g_2^2 \end{cases} \quad (4.5)$$

に変換される。式 (4.5) において

$$\begin{cases} g_1(x, t) = Q_1(z) \\ g_2(x, t) = (\beta t)^{-1/3} Q_2(z) \end{cases} \quad (4.6)$$

と置くと、式 (4.5) は

$$\begin{cases} (zD_z + I - D_z^3) Q_2 \cdot Q_1 = 0 \\ D_z^2 Q_1 \cdot Q_1 = Q_2^2 \end{cases} \quad (4.7)$$

となる。但し、 $z = x(3t)^{-\frac{1}{3}}$ 。このとき、

$$v(z) = Q_2(z)/Q_1(z) \quad (4.8)$$

は P_{II}' を満たすことがわかる。従って、条件(4.6)を満たす式(4.5)の解を構成できれば、式(4.8)を通して P_{II}' の解が構成できることになる。

式(4.5)の解としては

$$\begin{cases} g_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n} p_{2n} \end{cases} \quad (4.9.1)$$

$$\begin{cases} g_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1} p_{2n+1} \end{cases} \quad (4.9.2)$$

の形の解を構成することが出来る。但し、 $m=2n$ または $2n+1$ に対して、 p_m は

$$p_m = \frac{1}{n!(m-n)!} \int_C \cdots \int_C \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq m} \varphi_n(\alpha, \beta) \times \exp \left[i \sum_{\alpha=1}^m (k_\alpha x + k_\alpha^3/3) \right] \prod_{\alpha=1}^m h(k_\alpha) dk_\alpha \quad (4.10)$$

で与えられるものとする。ここに、 $\varphi_n(\alpha, \beta)$ は

$$\varphi(\alpha, \beta) = \begin{cases} -(k_\alpha + k_\beta)^{-2} & \text{for } 1 \leq \alpha \leq n, n+1 \leq \beta \leq m \\ -(k_\alpha - k_\beta)^2 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (4.11)$$

で定義されるものとする。また、 C は、式 (3.4) の定義のときと同じで、 $h(k)$ は k の任意関数とする。式 (4.10) において $x = (3t)^{\frac{1}{3}}k$ と置いてみれば、

$$h(k) = 1 \quad (4.12)$$

のとき式 (4.6) の条件が満足されることがわかる。従って、 P_{II}' の解が構成できにことになる。

式 (4.7) の第 2 式及び式 (4.8) から、関係式

$$v^2(z) = [\log Q_1(z)]'' \quad (4.13)$$

を得る。以下、関数 $Q_1(z)$ が τ -関数としての性質をもつことを示す。公式

$$\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq 2n} \varphi_n(\alpha, \beta) = -\det B^2, \quad (4.14)$$

但し、 B は $n \times n$ 行列で $\alpha - \beta$ 要素として $1/i(k_\alpha + k_\beta)$ をもつものとする、に注意すれば、関数 $Q_1(z)$ は、

$$Q_1(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(n!)^2} \int_C \cdots \int_C -\det(B^2) \\ \times \exp \left[i \sum_{\alpha=1}^{2n} (k_\alpha z + k_\alpha^3/3) \right] \prod_{\alpha=1}^{2n} dk_\alpha \quad (4.15)$$

と書き直すことができる。ここで、

$$F(z) = \int_C e^{ikz + k^3/3} k dk \quad (4.16)$$

なる核関数を導入すると、式(4.15)は、

$$Q_1(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n!)^2} \int_z^{\infty} \cdots \int_z^{\infty} -\det(\Phi_n^2) \prod_{\alpha=1}^n dx_{\alpha} dy_{\alpha} \quad (4.17)$$

と書き直すことが出来る。但し、 Φ_n は $n \times n$ 行列で $\alpha - \beta$ 要素に $F(x_{\alpha} + y_{\beta})$ をもつものとする。式(4.17)は更に、

$$Q_1(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2)^n}{n!} \int_z^{\infty} \cdots \int_z^{\infty} -\det(\Psi_n) \prod_{\alpha=1}^n dx_{\alpha} \quad (4.18)$$

と書き直すことが出来る。但し、 Ψ_n は $n \times n$ 行列で、 $\alpha - \beta$ 要素に

$$\int_z^{\infty} F(x_{\alpha}, y) F(y, x_{\beta}) dy \quad (4.19)$$

をもつものとする。式(4.18)は、GLM積分方程式

$$\begin{cases} K_1(z, y) + a^2 F(z+y) + a^2 \int_z^{\infty} K_2(z, x) F(x+y) dx = 0 \\ K_2(z, y) + a^2 \int_z^{\infty} K_1(z, x) F(x+y) dx = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

の Fredholm 行列式の形をしていることがわかる。従って、第3章3節の議論と同様にして、関数 $Q_1(z)$ が τ -関数としての性質をもつことがわかる。

以上、 P_{II}' の2通りの解を構成したが、両者の解の間には

$$\begin{cases} Q_1(z) = \tau_1^2(z) + \tau_2^2(z) \\ Q_2(z) = 2D_z \tau_2(z) \cdot \tau_1(z) \end{cases} \quad (4.21)$$

の関係が成り立つことを注意する。

4.2. P_{III} の解

次に、 P_{III} (の係数、特別な場合) の解の1径数族を、前節と同様の方針で構成する。そのために、sine-Gordon方程式

$$u_{xt} = \sin u \quad (4.22)$$

の双線形形式

$$\begin{cases} D_x D_t g \cdot f = g f \\ D_x D_t (f \cdot f - g \cdot g) = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

を考える。但し、

$$u = -2i \log [(f + ig)/(f - ig)]。 \quad (4.24)$$

式(4.23)において

$$\begin{cases} f(x, t) = \tau_1(z) \\ g(x, t) = \tau_2(z) \end{cases} \quad (4.25)$$

但し、 $z = xt$ と置くと式(4.23)は

$$\begin{cases} (z D_z^2 + D_z^+) \tau_2 \cdot \tau_1 = \tau_2 \tau_1 \\ (z D_z^2 + D_z^+) (\tau_1 \cdot \tau_1 - \tau_2 \cdot \tau_2) = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

と変換される。このとき、

$$v = -2i \log [(\tau_1 + i\tau_2)/(\tau_1 - i\tau_2)] \quad (4.27)$$

は、方程式

$$v'' + z^{-1}v' = z^{-1} \sin v \quad (4.28)$$

を満たしている。式(4.28)において

$$w = \exp(iv) \quad (4.29)$$

と置くと、 w は P_{III} の特別な場合

$$w'' = w^{-1}(w')^2 + z^{-1}w' + (2z)^{-1}(w^2 - 1) \quad (4.30)$$

を満たすことが知られている¹¹⁾。従って、式(4.26)の解 τ_1, τ_2 から

$$w = (\tau_1 + i\tau_2)^2 / (\tau_1 - i\tau_2)^2 \quad (4.31)$$

によって定義される関数 w は式(4.30) (以下、この方程式を P'_{III} と呼ぶ)の解となることがわかる。

式(4.26)の解を構成するために、式(4.23)の G -ソリトン解として

$$\begin{cases} f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n} d_{2n} \\ g = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1} d_{2n+1} \end{cases} \quad (4.32)$$

が取れることを注意する¹⁴⁾。但し、

$$d_m = \frac{1}{m!} \int_C \cdots \int_C \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq m} \frac{(k_\alpha - k_\beta)^2}{(k_\alpha + k_\beta)^2} \exp \left[i \sum_{\alpha=1}^m (k_\alpha x + k_\alpha^{-1} t) \right] \times \prod_{\alpha=1}^m h(k_\alpha) dk_\alpha \quad (4.33)$$

ここに、 C は図1のように定義される積分路で、 $h(k)$ は k の任意関数とする。式(4.33)において、 $x_\alpha = tk_\alpha$ とおけば、前節の議論と同様にして、

$$h(k) = 1/k \quad (4.34)$$

と置けば $d_m(x, t) = d_m(z)$ と

なって、式(4.25)の条件が満

たされることになり、 P_{III}'

の解を得る。このようにして得られた解 $\tau_1 + i\tau_2$ が τ 関数としての性質をもつことは、第3章第3節の議論と同様にして示すことができる。

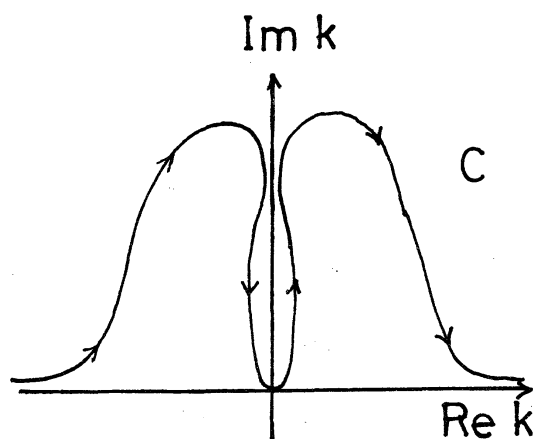


図1. P_{III}' に対する積分路 C

ここで、 P_{III} の特別な場合

$$\frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} = \frac{1}{w_1(x)} \left(\frac{dw_1(x)}{dx} \right)^2 - \frac{1}{x} \frac{dw_1(x)}{dx} + \frac{w_1^3(x)}{4} - \frac{1}{4w_1(x)} \quad (4.35)$$

の解は、式(4.26)の解 $\tau_1(x)$ 、 $\tau_2(x)$ から

$$w_1(x) = \frac{\tau_1\left(\frac{x^2}{4}\right) + i\tau_2\left(\frac{x^2}{4}\right)}{\tau_1\left(\frac{x^2}{4}\right) - i\tau_2\left(\frac{x^2}{4}\right)} \quad (4.36)$$

と求められることを注意する。

4.3. P_{II} の解

P_{II} (の係数の特別な場合) の解の 1 径数族を構成する。そのためには、非線形 Schrödinger 方程式

$$i u_t + 2|u|^2 u + u_{xx} = 0 \quad (4.37)$$

の双線形形式

$$\begin{cases} (i D_t + D_x^2) g \cdot f = 0 \\ D_x^2 f \cdot f = 2g g^* \end{cases} \quad (4.38)$$

を考える。但し、 g^* は g の複素共役、 f は実関数で

$$u(x, t) = g(x, t) / f(x, t) \quad (4.39)$$

とする。式 (4.38) において

$$\begin{cases} f(x, t) = \tau_1(y) \\ g(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} \tau_2(y) \end{cases} \quad (4.40)$$

と置くと、式 (4.38) は

$$\begin{cases} [i(y D_y + I) - 2 D_y^2] \tau_2 \cdot \tau_1 = 0 \\ D_y^2 \tau_1 \cdot \tau_1 = 2 \tau_2^* \tau_2 \end{cases} \quad (4.41)$$

と変換されることがわかる。但し、 $y = xt^{-\frac{1}{2}}$ 。このとき、

$$v(y) = \tau_2(y) / \tau_1(y) \quad (4.42)$$

は方程式

$$-\frac{i}{2} \left(v(y) + y \frac{dv(y)}{dy} \right) + \frac{d^2 v(y)}{dy^2} + 2|v(y)|^2 v(y) = 0 \quad (4.43)$$

を満足している。式 (4.43) において

$$v(y) = \rho(y) \exp[i\theta(y)] \quad (4.44)$$

と置くと、式(4.43)は

$$\begin{cases} \rho_y - \rho \theta_y^2 + (\rho \theta_y)/2 + 2\rho^3 = 0 \\ \rho \theta_{yy} + 2\rho_y \theta_y - \rho/2 - (\rho \rho_y)/2 = 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

と変換される。式(4.45)は、更に、1つの方程式にまとめられることが知られていて¹¹⁾、結局、変数

$$\psi(y) = \theta_y(y) - y/4 \quad (4.46)$$

に対する次の方程式となる：

$$\psi_{yy} = (2\psi)^{-1} (\psi_y)^2 - 1/(32\psi) - 2\psi(3\psi^2 - y\psi + y^2/16)。 \quad (4.47)$$

式(4.47)は、変換

$$\begin{cases} w = 4i^{-\frac{1}{2}} \psi \\ z = -2^{-1} i^{-\frac{1}{2}} y \end{cases} \quad (4.48)$$

によって、 P_{IV} において、 $\alpha=2$, $\beta=0$ と置いた方程式に帰着する。以下、この方程式を P_{IV}' と呼ぶことにする。以上のことから、 P_{IV}' の解は、式(4.41)の解 $\tau_1(y)$, $\tau_2(y)$ を用いて

$$w(z) = 4i \left[\log e^{\frac{z^2}{\tau_2^*} \frac{\tau_2(-2\sqrt{i}z)}{\tau_2^*(2\sqrt{i}z^*)}} \right]' \quad (4.49)$$

と求められることがわかる。

式(4.41)の解を求めるために、式(4.38)のG-ソリトン解として

$$\begin{cases} f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n} d_{2n}(x) \\ g = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1} d_{2n+1}(x) \end{cases} \quad (4.50)$$

が取れることを注意する。但し、 $m=2n$ または $2n+1$ に対して d_m は

$$d_m(x) = \frac{1}{n!(m-n)!} \int_C \cdots \int_C \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq m} \varphi(\alpha, \beta) \\ \times \exp \left[i \sum_{\alpha=1}^n (k_\alpha x - i k_\alpha^2 t) - i \sum_{\alpha=n+1}^m (k_\alpha^* x + i k_\alpha^{*2} t) \right] \prod_{\alpha=1}^n h(k_\alpha) dk_\alpha \prod_{\alpha=n+1}^m h^*(k_\alpha^*) dk_\alpha^* \quad (4.51)$$

と定義されるものとする。但し、

$$\varphi(\alpha, \beta) = \begin{cases} -(k_\alpha - k_\beta^*)^{-2} & \text{for } 1 \leq \alpha \leq n, n+1 \leq \beta \leq m \\ -(k_\alpha - k_\beta)^2 & \text{for } 1 \leq \alpha < \beta \leq n \\ -(k_\alpha^* - k_\beta^*)^2 & \text{for } n+1 \leq \alpha < \beta \leq m \end{cases} \quad (4.52)$$

また、 $h(k)$ は k の任意関数で、積分路 C は P_{II}' に対するそれと同様に定義されるものとする。式 (4.51) において、 $k_\alpha = t^{\frac{1}{2}} k_\alpha$ と置けば、 $h(k)=1$ のとき、式 (4.50) で定義される関数 f 及び g は、式 (4.40) の条件を満たすことがわかる。こうして、 P_{IV}' の解が構成された。

5. 注意

まず、4章の議論を PLR 方程式の双線形形式¹⁵⁾に適用することによって、 P_7 (の係数の特別な場合) の解の1径数族

を構成できることを注意する。また、本文では、Painlevé 方程式の解の 1 径数族を構成したが、ソリトン方程式の有理関数解から Painlevé 方程式の有理関数解を 4 章の方法に従って構成できる。これらのことについては、Painlevé 方程式の Bäcklund 変換の取り扱いとともに、近い将来報告することにした。

文 献

- 1) 例えば、本文に直接関係あるものとして、H. Flaschka and A. C. Newell: "Monodromy and Spectrum Preserving Deformations I", to appear がある。
- 2) R. Hirota and J. Satsuma: Prog. Theor. Phys. Suppl. 59, (1976) 64.
- 3) S. Oishi: J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979) 1341.
- 4) S. Oishi: J. Phys. Soc. Jpn. 48 (1980) 639.
- 5) A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979)
- 6) 例えば、1977 年以降 Proc. Japan. Akad. Ser. A に出版されている "Studies on Holonomic Quantum Fields" と題する一連の論文参照。また、M. Jimbo and T. Miwa: RIMS-315, 316.

- 7) P. Painlevé: Acta Math. 25 (1901) 1.
- 8) R. Hirota: 本講究録の論文等参照。
- 9) S. Oishi: Preprint a (1980).
- 10) I. Fredholm: Acta Math. 27 (1903) 365.
- 11) R. Nakach: "Sur les Equations D'Evolution Non-lineares de Signification Physique", Preprint (1976)
- 12) M. J. Ablowitz and H. Segur: Phys. Rev. Letters 38 (1977) 1103.
- 13) M. Jimbo: Prog. Theor. Phys. 61 (1979) 359
- 14) S. Oishi: Preprint b (1980).
- 15) B. S. Getmanov: Theo. Math. Fiz. 38 (1979) 186

この論文ではPLRの Trilinear formが求められているが、
 実は、この式をBilinear formに書き直せることが広田良吾氏によって示されている。