

29. ミクロカノニカル法による相転移研究

早大理工

森川善富

大竹淑恵

我々は、'改良されたミクロカノニカル法'に基づき、相転移点近傍の系の振舞いを研究した。この手法によれば、温度をほぼ連続的に変化させることができるが、その代償として系を熱平衡に保つことができない。しかし、系から熱を引くスピードを表すパラメーター C_0 に関する外挿により、熱平衡状態の系についての議論が可能となる。

モンテカルロ法とミクロカノニカル法の大きな相違は、温度 β がインプット・パラメーターであるかアウトプット・パラメーターであるかの違いである。このためモンテカルロ法では物理量は温度の1価関数になるが、ミクロカノニカル法では多価関数になり得る。例えば内部エネルギーと温度の関係は、2次相転移点近傍ではどちらの手法でも1価関数になるが、1次相転移点近傍ではミクロカノニカル法では内部エネルギーの多価性を示すS字カーブが現れる。^{1), 2), 3)} (Fig. 1)。またモンテカルロ法では、温度 β がインプット・パラメーターすなわちコントロールできるパラメーターであるのに対し、ミクロカノニカル法では、温度 β ではなくミクロカノニカル系の全エネルギー E がインプット・パラメーターすなわちコントロールできるパラメーターとなる。よってモンテカルロ法に基づき相転移点近傍を調べるには $\delta\beta \rightarrow 0$ の極限 (Fig. 1参照) として各 β での熱平衡値を求めるが、ミクロカノニカル法では、それに対応して $\delta E \rightarrow 0$ として各 E における熱平衡値を求める。改良されたミクロカノニカル法では、さらに $\delta E \approx 0$ の場合を考え、系を熱平衡に保たずに常にエネルギーを変化させて物理量を調べる。

具体的に改良されたミクロカノニカル法では、 $\delta E \approx 0$ のエネルギー変化を実現するために、従来のミクロカノニカル法で用いる Hamilton's Eqs. に摩擦項を付け加える。この摩擦項の係数が C_0 であり、系から熱を引くスピードを表す。

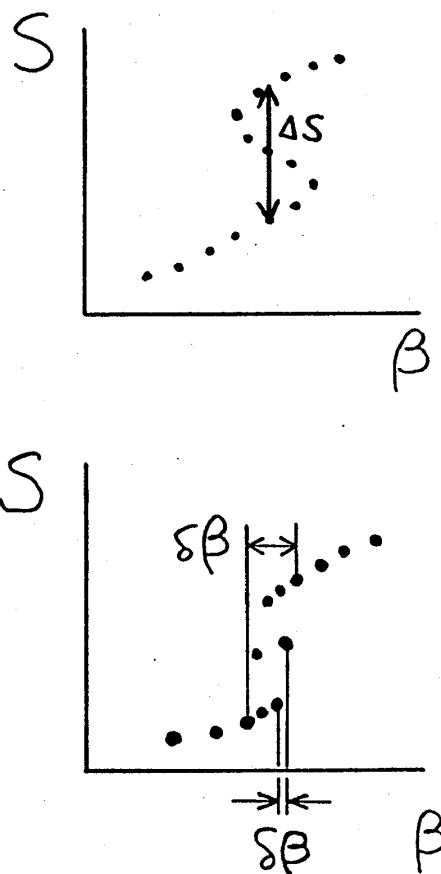


図1、1次相転移点近傍での内部エネルギー-温度グラフ

(a) ミクロカノニカル法

(b) モンテカルロ法

$$\frac{dp_i}{d\tau} = - \frac{\partial H_m}{\partial \phi_i} - C' p_i ,$$

$$\frac{d\phi_i}{d\tau} = \frac{\partial H_m}{\partial p_i} ,$$

ここで、 $C' = C_0 / \sum_i p_i^2$, $\frac{\Delta H_m}{\Delta \tau} = - C_0$ である。この手法によれば、

エネルギー変化がほぼ連続なので、内部エネルギー—温度(など)のグラフ上ではほぼ連続的にデータが取れるのである。詳細に関してはRef. 4), 5), 6)を御参照下さい。

モデルとしては、U(1)ゲージモデル⁷⁾を取り上げ、 4^4 格子で数値計算を行った。

$$BS = \sum_p [\beta_1 [1 - \frac{1}{2}(U_p + U_p^\dagger)] + \beta_2 [1 - \frac{1}{2}(U_p^2 + U_p^{\dagger 2})]]$$

ここで、 $U_p = \prod_{l \in p} e^{i\theta_l}$ は、プラケット p に対するプラケット変数であり、 θ_l は、

リンク l に対する座標である。1 次相転移点 ($\beta_1 = \beta_2 \approx 0.6$) 近傍では Fig. 2a、2 次相転移点 ($\beta_1 \approx 1.0, \beta_2 = 0$) 近傍では Fig. 2b の結果が得られた。

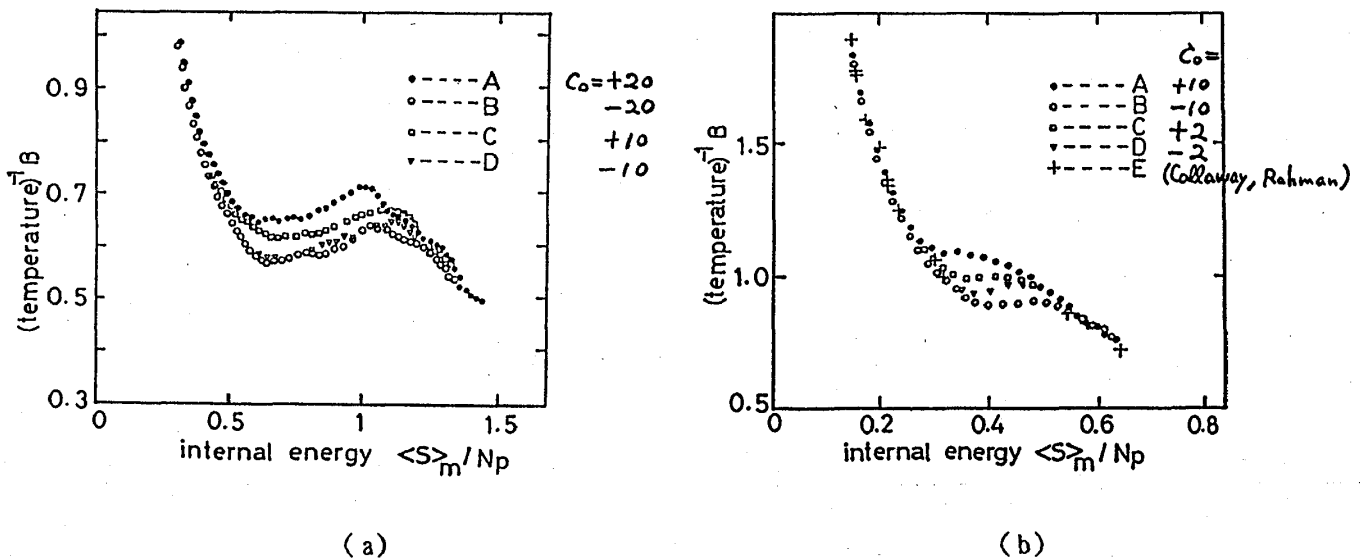


図 2、内部エネルギー—温度グラフ

(a) 1 次相転移点 ($\beta_1 = \beta_2 \approx 0.6$) 近傍

(b) 2 次相転移点 ($\beta_1 \approx 1.0, \beta_2 = 0$) 近傍

Fig. 2a は明らかに S 字カーブであるが、Fig. 2b では S 字カーブがみられない。これは、1 次相転移では潜熱の解放があるため内部エネルギーに多価性が現れるのに対し、2 次相転

移では潜熱の解放がないため多価性が現れないからである。このように改良されたミクロカノニカル法では、相転移の次数の推定ができる。より正確にば $S - \beta$ グラフを3次関数で最小二乗フィットした時の”潜熱” ΔS により、扱っている相転移が、どれだけ強い1次の性質を持つかが、推定できるのである。これはモンテカルロ法におけるヒステリシスの大きさを調べることに対応する。

但し、系を熱平衡に保たずに数値計算を行っているので、 ΔS は厳密には潜熱とは異なる。厳密に潜熱を求めるためには、系を熱平衡に保たなければならないので $C_0 \rightarrow 0$ の熱平衡極限をとらなければならない。

次に1次相転移の場合の典型的な $\Delta S - C_0$ グラフを示す (Fig. 3)。 (これは、preliminaryな結果である。詳細はRef. 8)を御

参照下さい。) データが4点しかないのではっきりしたことはいえないが、 $C_0 = 10$ で ΔS が最大になり、 $C_0 \rightarrow$ 大、 $C_0 \rightarrow$ 小で ΔS の値が下がっている。 $C_0 \rightarrow$ 大で ΔS が小さくなるのは以下のようにして理解できる。系から熱を引く速さが速くなっていくと、相転移点近傍で潜熱が解放されても系に吸収されずに摩擦熱として出ていくため ΔS が小さくなるのである。一方 $C_0 \rightarrow$ 小で ΔS が小さくなるのは以下のように理解される。数値計算が熱平衡に近づくと系の過冷却される度合いが減っていき ΔS が小さくなる。いくつかのモデルに対して予想される $\Delta S - C_0$ グラフを Fig. 4 に示す。いずれも ΔS の値は、ある C_0 の値でピークを持つ山型のグラフになるはずである。以前述べたように、有限の大きさ C_0 で”潜熱” ΔS を調べることにより、扱っている系がどれだけ強く1次の性質を持つかを推定できる。また ΔS を $C_0 \rightarrow 0$ へ外挿した値は真の潜熱となるので、上記の性質を厳密に決定できる。特に $\Delta S (C_0 \rightarrow 0) = 0$ の場合は扱っている系は2次相転移の性質を持つと決定できる。数値計算の速度に関しては、今の所モンテカルロ法に比べてメリットはない。しかし同じゴールを目指すのに別の手法で扱うことに意味があろう。(障害物がどこにあるかは解らないのだから・・・)

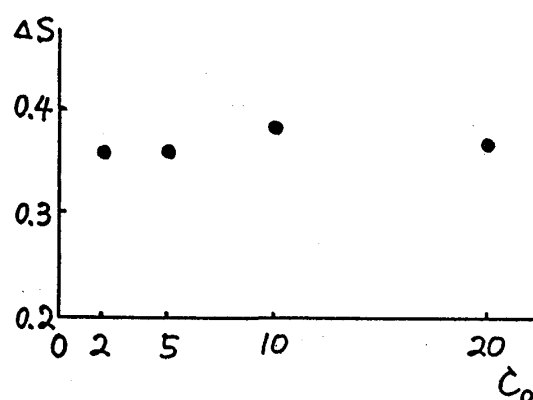


図3、1次相転移の場合の典型的な $\Delta S - C_0$ グラフ

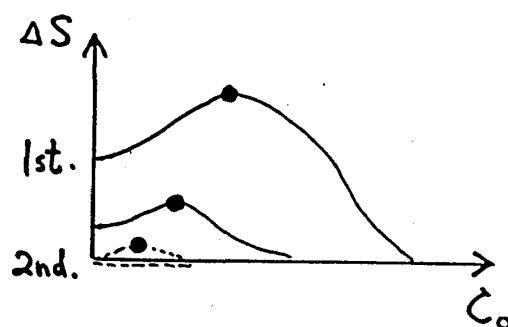


図4、予想される $\Delta S - C_0$ グラフ

相転移点も同様に $C_0 \rightarrow 0$ と外挿することにより求まるが、詳細は省略する (Ref. 6), 9)).

以上のように、我々は改良されたマイクロカノニカル法に基づき $\delta E \approx 0$ 、 $C0 \rightarrow 0$ の手法で相転移点近傍の系の振舞いを研究した。しかしながら、改良されたマイクロカノニカル法はまだまだ考慮せねばならぬ点が多々残っている。

一番大きな問題点は、現時点では離散系を扱えないことである。運動方程式を追いかけるので、変数が連続でなければならないのである。モデルによっては連続系へ変数変換できるが、一般的指針が今のところない。この問題点は、従来のマイクロカノニカル法、ランジュバン方程式を追いかける確率過程法、及びハイブリッド法とも共通の問題である。マイクロカノニカル法に関しては、最近ガウシアンアンサンブルを用いる手法が提唱され、運動方程式を解くのではなく、モンテカルロ法のようにアンサンブルを作り出すことで平均を取ることが試みられている。¹⁰⁾

次に問題となるのは、系のエルゴード性であろう。これは従来のマイクロカノニカル法とも共通の問題である。この問題に関しては、少数自由度系では研究が盛んに行われているが、多数自由度系ではまだほとんど行われていないのが現状である。我々が扱ったモデルにおいては簡単なチェックは行ったが本当にエルゴード性が成立しているか否かは、成立していると期待するしかない。

改良されたマイクロカノニカル法では、今のところ初期条件に依存する結果が得られている。しかしながら、 $C0 \rightarrow 0$ の熱平衡極限でその初期条件依存性は消えるはずであり、現在解析中である。⁸⁾

また、完全に2次のモデルではS字カーブが消えるはずであり、この方面の研究も現在進行中である。⁹⁾

さらに、正確に相転移の次数、場所を決定するには、無限系を扱わねばならない。しかしながら現在はCPUの都合上、 4^4 格子しか扱えなかった。この有限サイズの効果も将来的には定量的に調べられねばならないだろう。

Reference

- 1) D. Callaway and A. Rahman, Phys. Rev. Lett. 49(1982), 613
- 2) J. Polony and H. W. Wyld, Phys. Rev. Lett. 51(1983), 2257
- 3) U. M. Heller and N. Seiberg, Phys. Rev. D27(1983), 2980
- 4) 森川善富, 物性研究 46-2(1986-5)
- 5) Y. Morikawa and A. Iwazaki, Phys. Lett. 165B(1985), 361
- 6) Y. Morikawa, WU-HEP 1987-9
- 7) G. Bahnot, Nucl. Phys. B205[FS5](1982), 168
- 8) Y. Morikawa and Y. Otake, in preparation
- 9) Y. Morikawa and Y. Otake, in preparation
- 10) M. S. S. Challa and J. H. Hetherington, Phys. Rev. Lett. 60(1988), 77