

葉層 C^* 環と竹崎の双対定理

京大数理研 山上 滋 (Shigeru Yamagami)

与えられた葉層 (M, F) から, 竹崎の双対に相当する新しい葉層 $(\hat{M}, \hat{F})$ を構成する。作用素環における竹崎の双対が semi-finite になる事実に対応して, $(\hat{M}, \hat{F})$ は Lebesgue measure class の横断測度をもつことが示される。さらに, $(\hat{M}, \hat{F})$ の葉層 C^* 環は (M, F) のその作用素環における竹崎-高井の双対であることが示される。

[1] M を C^∞ 多様体, F を接束 TM の integrable subbundle とし, F によって M の葉層を定めるとする。葉層 (M, F) のグラフを G で表す。 F の 1-density bundle $|\wedge F^*|$ の C^∞ section D , 及び TM の 1-density bundle の C^∞ section μ で, 各点で正の値をとるものを考える。 Source map $s: G \rightarrow M$ による D の引きもどしを ν_D で表す。 ν_D は G の transverse function である。 μ と ν_D で定まる G の transverse measure を $\frac{d\mu}{d\nu_D}$ で表す。 M の foliated coord. nbd による covering $\{\Omega_\alpha, t_\alpha^1, \dots, t_\alpha^q,$

$u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^p$ を用意する (但し, $t_\alpha^1, \dots, t_\alpha^q$ は transversal coord.). Ω_α の上で $\mu = \mu_\alpha |dt_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dt_\alpha^q \wedge du_\alpha^1 \wedge \dots \wedge du_\alpha^p|$, $D = D_\alpha \times |du_\alpha^1 \wedge \dots \wedge du_\alpha^p|$ と表わされる。 Ω_α の leaf に沿った 1-form θ_α を $\theta_\alpha = d_F \log \frac{\mu_\alpha}{D_\alpha} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial u_\alpha^j} \left(\log \frac{\mu_\alpha}{D_\alpha} \right) du_\alpha^j$ で定義する。このとき, $\{t_\alpha, u_\alpha\}$ が foliated coord. であることから, $\theta_\alpha = \theta_\beta$ on $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ が成り立ち, M の leaf に沿った 1-form θ が定まる。

Lemma transverse measure $\frac{d\mu}{dD}$ の module δ は次の式で与えられる。

$$(1) \quad \delta([\gamma]) = \exp \int_\gamma \theta.$$

ここで, γ は F に接する piece-wise C^∞ path であり, $[\gamma]$ は γ の G における class である。

[2] θ を **[1]** で定義した 1-form とする。 θ を用いて $\hat{M} = M \times \mathbb{R}$ の上に foliation を作る。

(2) $\hat{F} = \left\{ X \oplus -\theta(X) \frac{\partial}{\partial t} \in T_{(x,t)}(M \times \mathbb{R}); X \in F_x \right\}$ とおくと, $\hat{F}$ は $T\hat{M}$ の integrable subbundle であることがわかる (integrability は θ が closed であることから従う)。

従って $\hat{M}$ の上の foliation を定める。 $(\hat{M}, \hat{F})$ の構成は θ を通じて (μ, D) の取り方によるが, foliation については (μ, D) の取り方による。すなわち,

Lemma (μ_j, D_j) ($j=1,2$) から上のよりにして作られた foliation を $(\hat{M}_j, \hat{F}_j)$ で表すとき, $(\hat{M}_1, \hat{F}_1)$ と $(\hat{M}_2, \hat{F}_2)$ とは foliation と同型である。

3 Proposition. $(\hat{M}, \hat{F})$ は Lebesgue measure と同値な transverse measure をもつ。

∴ $\pi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ を第1成分への projection とし, foliation $(\hat{M}, \hat{F})$ に対する density の組 $(\hat{\mu}, \hat{D})$ を次のように選ぶ。

$$(3) \quad \hat{D} = \pi^* D, \quad \hat{\mu} = \pi^* \mu \otimes e^{\tau} d\tau.$$

$(\hat{M}, \hat{F})$ の transverse measure と Γ の上の transverse measure と module が trivial なものとは 1対1の対応があるから, transverse measure $\frac{d\hat{\mu}}{d\hat{D}}$ の module $\hat{\delta}$ が trivial であることを示せばよい。これは [1] Lemma により, $\hat{\delta} = d_F \log \frac{\hat{\mu}}{\hat{D}}$ が消えることをいえばよい。 $X \in F$ に対して $\hat{X} = X \otimes -\theta(X) \frac{\partial}{\partial \tau}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \hat{X} \left(\log \frac{\hat{\mu}}{\hat{D}} \right) &= \hat{X} \left(\pi^* \left(\log \frac{\mu}{D} \right) + \tau \right) \\ &= X \left(\log \frac{\mu}{D} \right) - \theta(X) \\ &= 0. \end{aligned}$$

4 Proposition. (i) $\{\sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を transverse measure $\frac{d\mu}{dD}$ に付随した $C^*(M, F)$ の modular automorphism group とする。=9とき

$$\mathcal{C}^*(M, F) \cong \mathcal{C}^*(M, F) \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}.$$

(ii) $\{\hat{\sigma}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $\hat{M}$ の $\mathbb{R}$ -成分の translation によって得られる $\mathcal{C}^*(\hat{M}, \hat{F})$ の automorphism group とする。このとき $\{\hat{\sigma}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ は (i) の同型を通じて) α の dual action に一致する。特に, $\dim F \geq 1$ ならば

$$\mathcal{C}^*(M, F) \cong \mathcal{C}^*(\hat{M}, \hat{F}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$$

証明の前に Lemma を一つ用意する。

5 Lemma. $(\hat{M}, \hat{F})$ のグラフを $\hat{G}$ で表すとき, $\hat{G}$ は $G \times \mathbb{R}$ に次の groupoid operation を入れたもので同型である。

$$(4) \quad \begin{cases} r(\gamma, \tau) = (r(\gamma), \tau) \\ s(\gamma, \tau) = (s(\gamma), \tau + \log \delta(\gamma)) \\ (\gamma_1, \tau_1) \cdot (\gamma_2, \tau_2) = (\gamma_1 \gamma_2, \tau_1) \end{cases}$$

すなわち $\hat{M}$ の $\mathbb{R}$ -成分の translation から引き起こされる $\hat{G}$ の 1-parameter automorphism group は $G \times \mathbb{R}$ の $\mathbb{R}$ -成分の translation によって与えられる。

6 4 の証明. まず $\mathcal{C}^*(M, F)$ の定義を復習しておこう。

G の上の連続関数で support が compact になるもの全体の作る convolution algebra を $\mathcal{C}_c(G)$ で表す。($\mathcal{C}_c(G)$ の convolution は $(f_1 * f_2)(\gamma) = \int_{\gamma_0}^{\gamma \gamma_1} (d\gamma') f_1(\gamma') f_2(\gamma_1^{-1}\gamma)$ で与えられる。)

$C_c(G)$ の $L^2(G, \mu \circ \nu_D)$ での bounded 表現 R を

$$(5) \quad R(f)\xi = \xi * \tilde{f}, \quad \xi \in L^2(G, \mu \circ \nu_D), f \in C_c(G)$$

で定義する ($\tilde{f}(\gamma) = f(\gamma^{-1})$)。 $C^*(M, F)$ は $\{R(f); f \in C_c(G)\}$ によって生成される C^* -algebra である。 $\hat{G}$ については, transverse function として ν_D の $\pi: \hat{G} = G \times \mathbb{R} \rightarrow G$ による push-forward $\hat{\nu}_D$ をとり, unit space $\hat{G}^{(0)} = G^{(0)} \times \mathbb{R} = M \times \mathbb{R}$ の上の measure としては product measure $\hat{\mu} = \mu \otimes d\tau$ ($d\tau$ は Lebesgue measure) をとる。 $C_c(\hat{G})$ の表現 $\hat{R}$ が $L^2(G \times \mathbb{R}, \hat{\mu} \circ \hat{\nu}_D = (\mu \circ \nu_D) \otimes d\tau)$ の上に作られる。 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, 関数 $\gamma \mapsto \delta(\gamma)^{-i\lambda}$ の multiplication operator を u_λ で表す。 $\frac{d\mu}{d\tau}$ に付随した $C^*(M, F)$ の modular automorphism group σ_λ は

$$(6) \quad \sigma_\lambda R(f) = u_\lambda R(f) u_\lambda^*$$

で与えられる。 $\xi(\lambda) \mapsto u_\lambda^* \xi(\lambda)$ で定められる $L^2(G \times \mathbb{R}, (\mu \circ \nu_D) \otimes d\tau)$ での unitary operator を U_1 で, $L^2(G \times \mathbb{R}, (\mu \circ \nu_D) \otimes d\tau)$ の $\mathbb{R}$ -component の Fourier 変換を U_2 で表す。最後に $U = U_1 U_2$ とおく。このとき簡単な計算により, $U \circ R(f) \circ U^{-1}$ が $C^*(M, F) \rtimes \mathbb{R}$ の regular 表現と一致し, この dual action が $G \times \mathbb{R}$ の $\mathbb{R}$ 成分の translation で与えられることがわかる。 $\dim F \geq 1$ のとき, $C^*(M, F) \cong C^*(\hat{M}, \hat{F}) \rtimes_{\sigma} \mathbb{R}$ となるのは foliation C^* -algebra の stability $C^*(M, F) \otimes \mathcal{K} \cong C^*(M, F)$ ([4]) からわかる。

[7] Example ([2]). Γ を $SL(2, \mathbb{R})$ の discrete subgroup として $M = SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ が compact になるものとする。 M に foliation の構造を $SL(2, \mathbb{R})$ の subgroup $N = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}; a > 0, b > 0 \right\}$ の左かゝりの作用により与える。 $SL(2, \mathbb{R})$ の Lie algebra の basis X_+, X_0, X_- を

$$(7) \quad X_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad X_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ととる。 $SL(2, \mathbb{R})$ の volume density μ を

$$(8) \quad \mu(X_- \cdot g \wedge X_0 \cdot g \wedge X_+ \cdot g) = 1, \quad g \in SL(2, \mathbb{R})$$

と、 N の left flow に沿った density D を

$$(9) \quad D(X_- \cdot g \wedge X_0 \cdot g) = 1, \quad g \in SL(2, \mathbb{R})$$

で定める。 μ と D は $SL(2, \mathbb{R})$ の右かゝりの作用で不変であるが、 M の上の density をひきおこす。 $SL(2, \mathbb{R})$ の岩沢分解

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

を使えば、 (t, u, v) が M の foliated coord. を与えることがわかる。

(t が transversal, u, v が tangential)。 μ, D をこの coord. に

関して表せば

$$(10) \quad \begin{cases} \mu\left(\frac{\partial}{\partial v} \wedge \frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial t}\right) = e^{2u} \\ D\left(\frac{\partial}{\partial v} \wedge \frac{\partial}{\partial u}\right) = 1 \end{cases}$$

であることがわかる。従って (μ, D) に付随した 1-form θ は

$$(11) \quad \theta = 2du$$

で与えられる。 $\mathcal{T}$ を diffeo. $\hat{M} = M \times \mathbb{R} \ni (g\Gamma, \tau) \mapsto ge^\tau \Gamma \in$

$GL_+(2, \mathbb{R})/\Gamma$ ($GL_+(2, \mathbb{R}) = \{g \in GL(2, \mathbb{R}); \det g > 0\}$) により、

foliation $\hat{F}$ を書き直せば, $GL_+(2, \mathbb{R})$ の subgroup $\hat{N} = \left\{ \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 \\ v & e^{2\lambda} \end{bmatrix}; \lambda, v \in \mathbb{R} \right\}$ による left flow で与えられることがわかる。これをよって
 differ. $M \times \mathbb{R} \ni (g\Gamma, \lambda) \mapsto \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^{2\lambda} \end{bmatrix} g\Gamma \in GL_+(2, \mathbb{R})/\Gamma$ による
 書き直すと, $(\hat{M}, \hat{F})$ は $M \times \mathbb{R}$ の foliation で各 leaf が $N'g\Gamma \times \mathbb{R}$ ($g \in GL_+(2, \mathbb{R})$) の形のもつと同型であることがわかる。ここで N'
 は $N' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \right\}$ なる N の subgroup である。従って N' の left flow
 による M の foliation を F' で表せば

$$(12) \quad \hat{C}^*(\hat{M}, \hat{F}) \cong \hat{C}^*(M, F') \otimes \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}))$$

であることがわかる。

Reference

- [1] A. Connes, Sur la théorie non commutative de l'intégration,
 Lect. Notes in Math., 925
- [2] ———, The von Neumann algebra of a foliation,
 Lect. Notes in Phys., 80, 145-151.
- [3] ———, A Survey of Foliations and Operator Algebras,
 Proc. Symp. A.M.S. vol 38, 521-628.
- [4] Hilsum-Shandalis, Stabilité des C^* -algèbres de feuilletages,
 preprint (1982).
- [5] S. Yamagami, Modular Cohomology Class of Foliation and
 Takesaki's Duality, RIMS preprint (1982).