

非定常減速流の安定性

原研 藤村 薫

§ 1. はじめに

非定常流（もしくは非平行流）の安定性を調べる際、流れ場に加えられた擾乱を記述する時間スケール（空間スケール）で眺めて、主流の時間（空間）的変形が十分ゆっくり進行する場合の多重尺度法を用いた取り扱いはここ十年くらいの間に確立されたといえる。ここでは、多重尺度法を用いた非定常流に対する安定論の一つの適用例を紹介する。

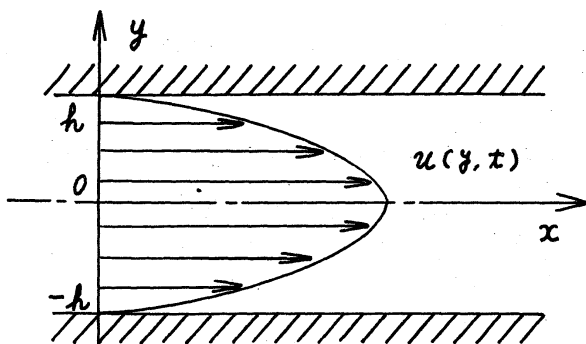


Fig.1 Illustration of the flow field.

取り扱う流れ場は、2次元 Poiseuille 流の圧力勾配が時刻 0 に突然何割かに減少した非定常減速流である。流れ場は Fig. 1 に示すように $y = \pm h$ の 2 平板に挟まれた 2 次元流路内の x 方向の流れであり、流

れ場は十分に発達していて x , z には依らなくても a とする。

流れ場の基礎方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{P(x)}{\rho} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad P(x) = P_0 + \Delta P \cdot H(x),$$

$$u(y, 0) = u_0(y), \quad u(\pm h, x) = 0. \quad (1-1)$$

ここで P_0 : $x < 0$ での圧力勾配, ΔP : 圧力勾配の変化分, ρ : 密度, ν : 動粘性率, u_0 : P_0 に対応する 2 次元 Poiseuille 流。

(1-1) 式は u について線形であり, u_0 と 2 次元 Szymański 流 u_1 とを重ね合わせから求められる。

2 次元 Szymański 流は Fig. 1 のように 2 平板間の静止流体に, ある時刻に一定の圧力勾配が突然かかった時の過渡的流れであり, 詳細が今井¹⁾に与えられているのでここでは結果だけを示しておく。無次元量として,

$$\tau^* = \nu t / h^2, \quad y^* = y / h, \quad u_1^* = h u_1 / \nu, \quad P^* = -h^3 \Delta P / \rho \nu^2, \quad (1-2)$$

を導入すると (1-1) 式は

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial \tau^*} - \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial y^{*2}} = P^*, \quad u_1^*(y^*, 0) = u_1^*(\pm 1, \tau^*) = 0. \quad (1-3)$$

(1-3) 式の解は $\tau^* \gg 1$:

$$u_1^* = \frac{P^*}{2} \left[1 - y^{*2} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1/2)^3 \pi^3} \cos \{(n+1/2)\pi y^*\} \exp \{-(n+1/2)^2 \pi^2 \tau^*\} \right], \quad (1-4)$$

$\tau^* \ll 1$:

$$u_1^* = P^* \tau^* \left[1 - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi^2}{2} \operatorname{erfc} \frac{2n+1+y^*}{2\sqrt{\tau^*}} + \frac{\pi^2}{2} \operatorname{erfc} \frac{2n+1-y^*}{2\sqrt{\tau^*}} \right) \right]. \quad (1-5)$$

但し, $\mathcal{I}^n \operatorname{erfc} x = \int_x^\infty \mathcal{I}^{n-1} \operatorname{erfc} \xi d\xi$, $n=1, 2, \dots$; $\mathcal{I}^0 \operatorname{erfc} x = \operatorname{erfc} x$.

こゝにて得られた 2 次元 Szymanski 流 u_1 と 2 次元 Poiseuille 流 u_0 との重ね合わせとして任意時刻における速度分布は

$$u(y^*, \tau^*) = u_0(y^*) + u_1(y^*, \tau^*), \quad (1-6)$$

で与えられる。Reynolds 数の定義は

$$R = u(0, \tau^*) \cdot h / \nu. \quad (1-7)$$

我々の計算の対象を, $t \leq 0$ で R が 2 次元 Poiseuille 流の臨界 Reynolds 数 $R_c = 5772.22$ に等しく, $\Delta P = -0.1P_0$ であると規定しよう。その時, Reynolds 数 $R(\tau)$ は Fig. 2 のように変化する。

このようにゆるやかに変化する流れの安定性を調べる際に多重尺度法を用いることを Benney と Rosenblat²⁾ が提案して以来, 次頁に示すように多くの研究が非定常, 非平行流についてなされてきている。このうち Hall と Parker⁶⁾ によるものは今回の

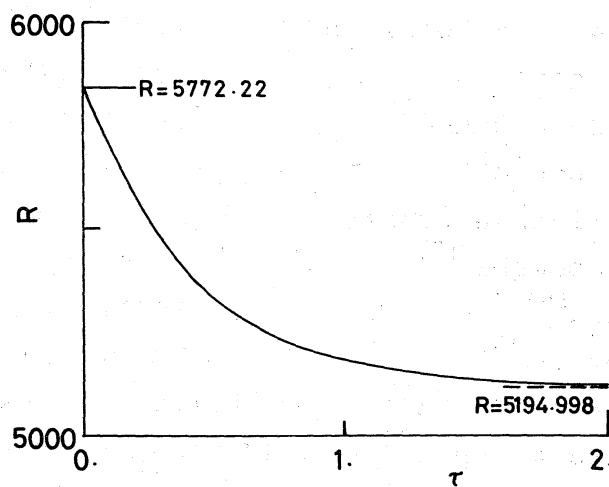


Fig. 2 Change of the Reynolds number by the sudden 10%-decrease of pressure gradient at $\tau=0$ from the state of $R=R_c$.

の計算と最も似ているが, 彼らは多重尺度法を用いた非定常補正の定式化をしたものの, 数値計算は準定常流理論の固有値を求めるだけで終わっており, 実際に補正量がどの程度なる

多重尺度法を用いた非定常流補正

Benney & Rosenblat ²⁾	(1964) 最初の適用
Rosenblat & Herbert ³⁾	(1970) 熱対流
Drazin ⁴⁾	(1974) いくつかのモデル系への適用
Seminara & Hall ⁵⁾	(1975) 同心回転円筒間流れ
Hall & Parker ⁶⁾	(1976) ブロックされた2次元 Poiseuille flow
Eagles ⁷⁾	(1977) 同心回転円筒間流れ — 高次補正 —

多重尺度法を用いた非平行流補正

Bouthier ⁸⁾	(1972) Formulation
Bouthier ⁹⁾	(1973) Blasius flow
Gaster ¹⁰⁾	(1974) Blasius flow
Nayfeh, Saric & Mook ¹¹⁾	(1974) Blasius flow
Saric & Nayfeh ¹²⁾ (23.8%)	(1975) Blasius & Falkner-Skan
Eagles & Weissman ¹³⁾	(1975) Slowly diverging flow
Crighton & Gaster ¹⁴⁾	(1976) 3次元 jet — 軸対称攪乱 —
Garg & Round ¹⁵⁾	(1978) Bickley jet
Plaschko ¹⁶⁾	(1979) 3次元 jet — 非軸対称攪乱 —
Zollars & Krantz ¹⁷⁾	(1980) 円錐表面を流れ落ちる液膜
Grabowski ¹⁸⁾ [5.17%]	(1980) 3次元点流れ — 軸対称攪乱 —
Garg ¹⁹⁾	(1981) Bickley jet
Morris ²⁰⁾	(1981) Bickley jet
Garg & Gupta ²¹⁾ (22.8%)	(1981) 2次元 inlet flow
Garg & Gupta ²²⁾ (29.8%)	(1981) 円管内 inlet flow — 軸対称攪乱 —

かわからない。我々は Hall と Parker⁶⁾ より非定常性の弱い減速流に関して、線形増幅率に対する非定常補正の寄与を評価することにする。つまり、上記表中()内に臨界 Reynolds 数の補正による減少分を、また[]内に増幅率の増加分を示す。(基準は準平行流理論)

§ 2. 擾乱方程式

流れ関数 ψ を導入する。流れ場は渦糸方程式

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(y, x)} = \nu \Delta^2 \psi, \quad (2-1)$$

で記述される。

$$\psi = \bar{\psi} + \hat{\psi}, \quad (2-2)$$

(“ $-$ ” は主流分, “ $\wedge$ ” は変動分を示す) を代入して $\bar{\psi}$ のみに関する式を引き去ると, 線形化して

$$\frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{\psi}, \Delta \bar{\psi})}{\partial(y, x)} + \frac{\partial(\bar{\psi}, \Delta \hat{\psi})}{\partial(y, x)} - \nu \Delta^2 \hat{\psi} = 0, \quad (2-3)$$

を得る。代表長として h , 代表速度として $u(0, \tau^*)$ を用い, $U(y^*, \tau^*) = u/u(0, \tau^*)$ と書く。擾乱を記述する速い時間スケール $t = h\tau^*/u(0, \tau^*)$ を用いて “ $*$ ” をおくと,

$$\frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \Delta \hat{\psi} - U'' \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} - \frac{1}{R} \Delta^2 \hat{\psi} = 0. \quad (2-4)$$

ところで主流の衰形を記述する遅いスケール τ と t の間には $\tau = 1/R \cdot t$ の関係が成り立っている。 R は τ の関数 $R(\tau)$ でここで τ/t を持長づける τ には依存しない微小パラメータ ϵ として

$$\epsilon = 1/R_c \quad ; \quad R_c = 5772.22, \quad (2-5)$$

を採用する。 $r(\tau) = R_c/R(\tau)$ とおくと,

$$\tau = \epsilon r t, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \epsilon r(1-r^{-1}\dot{r}\tau)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \epsilon \ll 1. \quad (2-6)$$

ここで "." は τ についての変分。これを (2-4) 式に代入して

$$\hat{\Psi}(x, y; t, \tau) = \Psi(y, \tau) e^{i[\alpha x - \theta(t)]},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \epsilon r(1-r^{-1}\dot{r}\tau)^{-1} \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} = \alpha c(\tau),$$

$$\Theta(\tau) = \alpha \epsilon^{-1} \int^{\tau} r^{-1}(1-r^{-1}\dot{r}\tau) c(\tau) d\tau, \quad (2-7)$$

と置くと,

$$[-i\alpha c + \epsilon r(1-r^{-1}\dot{r}\tau)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} + i\alpha U] \delta \Psi - i\alpha U'' \Psi - \epsilon r \delta^2 \Psi = 0. \quad (2-8)$$

$T=T(1)$, $\delta \equiv \partial^2/\partial y^2 - \alpha^2$. (2-7) 式は fast variable x が進行波を記述し, slow variable τ が擾乱の振幅, 増幅率と位相速度を記述するところを示している。 Ψ を ϵ で展開

$$\Psi(y, \tau) = \Psi_0 + \epsilon \Psi_1 + \epsilon^2 \Psi_2 + \dots, \quad (2-9)$$

して (2-8) 式に代入し, ϵ の等べきの係数をそれぞれとめると,

$$\text{at } O(1): \quad \mathcal{L} \Psi_0 \equiv i\alpha(U-c) \delta \Psi_0 - i\alpha U'' \Psi_0 - \frac{1}{R} \delta^2 \Psi_0 = 0, \quad (2-10)$$

$$\text{at } O(\epsilon): \quad \mathcal{L} \Psi_1 = -r(1-r^{-1}\dot{r}\tau)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta \Psi_0, \quad (2-11)$$

$$\text{at } O(\epsilon^n): \quad \mathcal{L} \Psi_n = -r(1-r^{-1}\dot{r}\tau)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta \Psi_{n-1}, \quad n=2, 3, 4, \dots \quad (2-12)$$

境界条件は

$$\Psi_n(\pm 1) = \Psi'_n(\pm 1) = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (2-13)$$

$T=T(1)$, (2-10)~(2-12) 式を求めるとき, $\delta^2 \Psi_n$ の項は係数に $1/R$ がかかっている形式的には $O(\epsilon^{n+1})$ であるが, 最高階微分の

項であるので $O(\epsilon^n)$ の式の中にくり込まれている。

作用素 $\mathcal{L}$ には τ がパラメーターとして含まれているが、 τ についての微分演算子を含んでいないので (2-10) 式の解 ϕ_0 は

$$\phi_0 = A(\tau) \phi_0(y, \tau), \quad \phi_0(\pm 1) = \phi_0'(\pm 1) = 0, \quad (2-14)$$

の形で求められる。ここで ϕ_0 は τ をパラメーターとして含んでおき、準定常流理論における固有関数である。(2次元 Szymański 流の安定性が Takami²³⁾ により準定常流理論に基づいて調べられている。)

次に、(2-11) 式に (2-14) 式を代入すると、

$$\mathcal{L}\psi_1 = -r(1-r^{-1}\tau)^{-1} \mathcal{L} \left(\frac{dA}{d\tau} \phi_0 + A \frac{\partial \phi_0}{\partial \tau} \right),$$

$$\psi_1(\pm 1) = \psi_1'(\pm 1) = 0. \quad (2-15)$$

ψ_1 の可解条件から振幅関数 $A(\tau)$ に関する振幅方程式が

$$\frac{dA}{d\tau} = - \frac{\int_{-1}^1 \tilde{\phi} \mathcal{L} \frac{\partial \phi_0}{\partial \tau} dy}{\int_{-1}^1 \tilde{\phi} \mathcal{L} \phi_0 dy} \cdot A, \quad (2-16)$$

の形で得られる。ただし $\tilde{\phi}$ は ϕ_0 の adjoint で

$$\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\phi} = 0, \quad \tilde{\phi}(\pm 1) = \tilde{\phi}'(\pm 1) = 0;$$

$$\tilde{\mathcal{L}} \equiv i\alpha[(U-c)\mathcal{L} + 2U'd/dy] + 1/R \cdot \mathcal{L}^2. \quad (2-17)$$

$\tau=0$ で $A=1$ と規格化すると、

$$A(\tau) = \exp \left[- \int_0^\tau \frac{\int_{-1}^1 \tilde{\phi} \mathcal{L} \frac{\partial \phi_0}{\partial \tau} dy}{\int_{-1}^1 \tilde{\phi} \mathcal{L} \phi_0 dy} \cdot d\tau \right] \quad (2-18)$$

$A(\tau)$ の時間発展を Fig. 3 に示す。ただし擾乱は波数 α が 2 次元 Poiseuille 流の臨界波数 $\alpha_c = 1.02056$ に等しい単色波擾乱である。大むね、非定常性が $\tau < 0.2$ に局在していることが $A(\tau)$ 曲線から予想される。つまり、 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} A(\tau)$ の値は後述の Fig. 5 と合わせて有限一定値に落ちつくと考えられる。 $A(\tau)$ は準定常流理論の与える擾乱中、 $e^{i\alpha[x - c(\tau)\tau]}$ の乗数であり、 $\tau \rightarrow \infty$ では $\text{im } c(\tau)$ 自身が負値 ($\alpha = \alpha_c$, $R = 0.9R_c$ で 2 次元 Poiseuille 流の固有値の imaginary part) であるので $A(\tau)$ は必ずしも 0 にまで到達する必要はない。

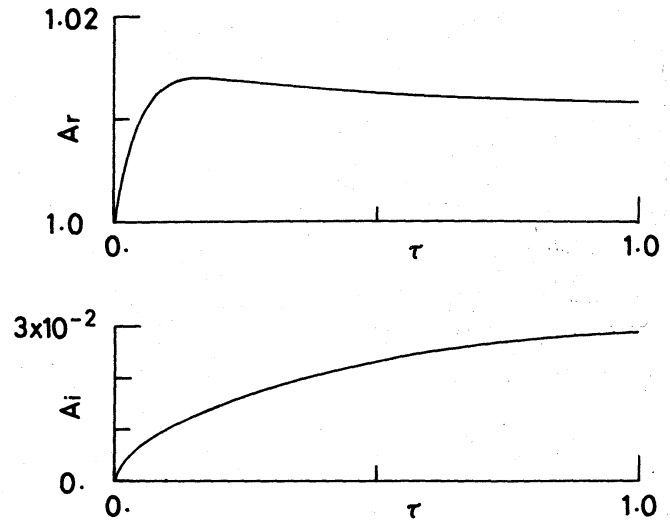


Fig. 3 Evolution of the amplitude function $A(\tau)$; $\alpha = \alpha_c$.

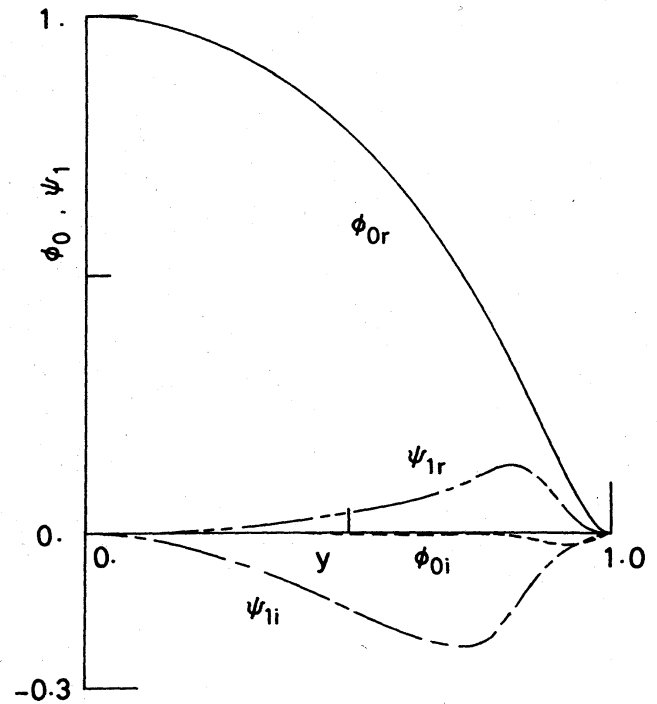


Fig. 4 Eigenfunctions of ϕ_0 and ψ_1 at $\tau = 0.04$; $\alpha = \alpha_c$, $R = 5726.05$, $c = 0.263999 + 0.00111880i$.

$\tau = 0.04$ での (2-10), (2-11) 式の固有関数中, ψ_1 を Fig. 4 に示した。 $y=0$ で $\phi_0=1$ に規格化してある。 ψ_1 は ψ_2 の可解条件から決定される時間の関数分だけ自由度を有している。

§ 3. 増幅率

§ 1 に挙げたこれまでの研究に共通した結論は、増幅率はそれ自身の定義に用いた物理量に依存し、さらに増幅率は y の関数である、という点である。実験値が存在している場合には実験で定義された増幅率を調べればよいわけであるが、今回の流れ場のように実験値のない場合には、考えられる種々の物理量に基づく増幅率を調べることも必要である。ここでは以下の諸量を定義に用いることにしよう：

u' : 速度の x 方向変動分, v' : 速度の y 方向変動分,

$\hat{\psi}$: 流れ関数の変動分, ω' : 渦度の変動分,

$E = \frac{1}{2} \cdot (\overline{u'^2} + \overline{v'^2})$: 速度変動分のエネルギー ("—" は波の 1 周期にわたっての時間平均),

$\hat{\psi}(0, \tau)$: 文献 11), 12) 等で用いられた y に依存しない量,

$\bar{e} = \int_{-1}^1 E dy$: 文献 13), 14) 等で用いられた y に依存しない量。

さて、ある物理量 $f(y; t, \tau)$ で定義される増幅率 $G_f(y; t, \tau)$ は

$$G_f(y; t, \tau) \stackrel{\text{def.}}{=} (\text{amp } f)^{-1} \frac{\partial (\text{amp } f)}{\partial t}. \quad (3-1)$$

$f = \hat{\varphi}$ の場合,

$$G_{\hat{\varphi}} = \frac{1}{|\hat{\varphi}|} \frac{\partial |\hat{\varphi}|}{\partial t} = \epsilon r (1 - r^{-1} \dot{r} \tau)^{-1} \frac{1}{|\Psi|} \frac{\partial |\Psi|}{\partial \tau} + \frac{\partial \text{im } \theta(t)}{\partial t}, \quad (3-2)$$

より,

$$G_{\hat{\varphi}} = G_{v'} = \alpha C_i + \tilde{\epsilon} \left(\frac{1}{|\phi_0|} \frac{\partial |\phi_0|}{\partial \tau} + \frac{1}{|A|} \frac{d|A|}{d\tau} \right) + O(\epsilon^2), \quad (3-3)$$

$$G_{u'} = \alpha C_i + \tilde{\epsilon} \left(\frac{1}{|\phi_0'|} \frac{\partial |\phi_0'|}{\partial \tau} + \frac{1}{|A|} \frac{d|A|}{d\tau} \right) + O(\epsilon^2), \quad (3-4)$$

$$G_{w'} = \alpha C_i + \tilde{\epsilon} \left(\frac{1}{|\phi_0''|} \frac{\partial |\phi_0''|}{\partial \tau} + \frac{1}{|A|} \frac{d|A|}{d\tau} \right) + O(\epsilon^2), \quad (3-5)$$

$$G_E = \alpha C_i + \tilde{\epsilon} \left(\text{re.} \frac{\phi_0' \phi_0'' - \alpha^2 \phi_0 \phi_0'}{\phi_0'^2 - \alpha^2 \phi_0^2} + \frac{1}{|A|} \frac{d|A|}{d\tau} \right) + O(\epsilon^2), \quad (3-6)$$

$$G_{qs} = \alpha C_i. \quad (3-7)$$

$T = T_1$, $G_E = 1/2 \cdot 1/|E| \cdot \partial |E| / \partial t$, $\tilde{\epsilon} \equiv \epsilon r (1 - r^{-1} \dot{r} \tau)^{-1}$, " / " は τ について

微分。準定常流理論の増幅率を G_{qs} と名づける。

(3-3) ~ (3-6) 式の $\tilde{\epsilon} \frac{1}{|A|} \frac{d|A|}{d\tau}$ は非定常補正の共通項であり, $G_{\hat{\varphi}(0,\tau)}$ では $\partial \phi_0 / \partial \tau = 0$ であるから非定常補正としてこの項だけを含まれている。そこでこの $\frac{1}{|A|} \frac{d|A|}{d\tau}$ の時間変化を Fig. 5 に示

した。この図も $\tau > 0.2$ では非定常補正がほとんど効かなくなっていることを示している。

Fig. 6 に $\tau = 0.04$ (増幅率最大の τ) における各増幅率の

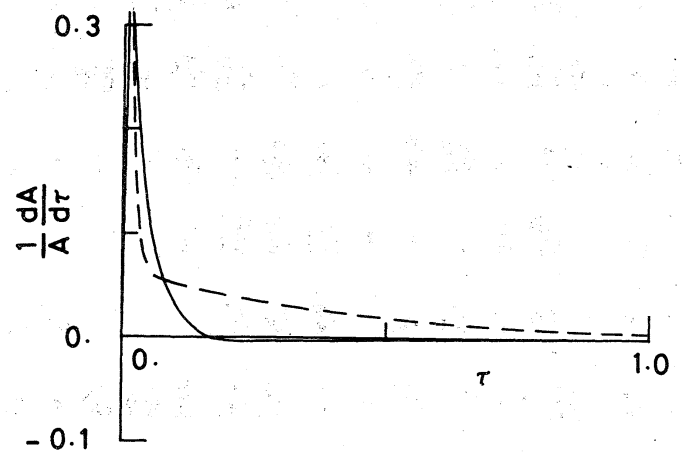


Fig. 5 Basic factor of the unsteady correction, $\frac{1}{A} \frac{dA}{d\tau}$. —, real part; ---, imaginary part. $\alpha = \alpha_c$.

y 依存性を示す。 $G_{\omega'}$ の不連続は内部摩擦層 (準定常流理論における) に位置している。 y に依存して、 $G_{\hat{\psi}(0,\tau)}$ や $G_{\bar{e}}$ の G_{qs} との差と、 G の y 依存性を比較すると、 $G_{\hat{\psi}(0,\tau)}$ や $G_{\bar{e}}$ は増幅率の 1 つの目安で、 G_{qs} とかわれる。 G の y 依存性は $\Psi(y,\tau)$ における y と τ の coupling による。

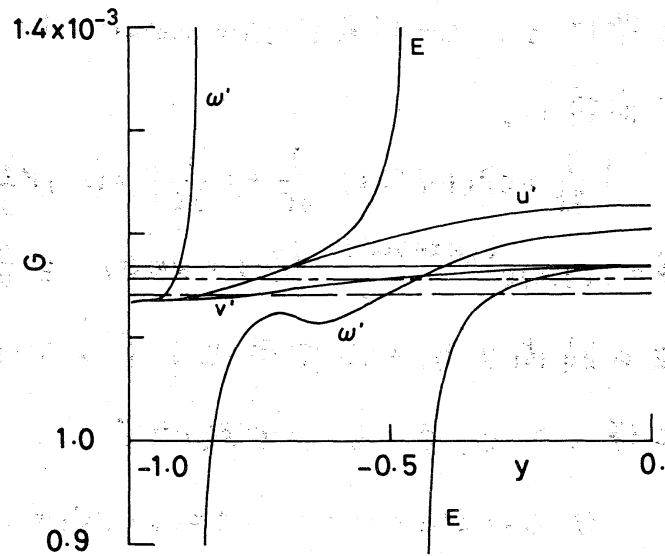


Fig.6 y -dependence of the growth rates based on the various definitions :

—, $G_{\hat{\psi}(0,\tau)}$; ---, $G_{\bar{e}}$; - · -, G_{qs} .
 $\tau=0.04$, $\alpha=\alpha_c$.

§ 4. 準中立攪乱の安定性

2次元 Poiseuille 流の中立曲線上の任意の点を (α_0, R_0, c_0) とする。考えている流れの (α_0, R, c) が中立点に十分近いとすると、 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) \equiv R_\infty$ 及び R_∞ を導入して、

$$1/R_\infty - 1/R_0 = \varepsilon^2, \quad \varepsilon^2 \ll 1, \quad (4-1)$$

と置くことが出来る。このとき、

$$1/R = 1/R_0 + \varepsilon^2 \tilde{R}, \quad (4-2)$$

と書くと $\tilde{R}$ は $O(1)$ で高々 1 の量。 $1/R$ は $O(\varepsilon)$ であり、 $1/R = \varepsilon \tilde{r}$

と書ける。(2-4)式に slow variable $\tau = 1/R \cdot x$ を導入すると § 2 と全く同様に,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \tilde{r}(1 - \tilde{r} - \tilde{r}^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} + U \frac{\partial}{\partial x} \right] \Delta \hat{\psi} - U^2 \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{R_0} + \varepsilon^2 \tilde{R} \right) \Delta^2 \hat{\psi} = 0. \quad (4-3)$$

$\hat{\psi} = \phi(y, \tau) e^{i[\alpha x - \theta(\tau)]}$, $\partial \theta / \partial \tau = \alpha c(\tau)$ と置き, τ は主流 U に $1/R$ の程度の時間スケールで変化する α で ε のべきで展開する。これに伴って c, ϕ も ε で展開する:

$$U = U_0 + \varepsilon U_1 + \dots, \quad c = c_0 + \varepsilon c_1 + \dots, \quad \phi = \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \dots. \quad (4-4)$$

§ 2 で行, τ は α と同様に最高階微分の項 $\delta^2 \phi_n$ を $O(\varepsilon^n)$ の式にくり込むことにより,

$$\text{at } O(1): \quad \mathcal{L} \phi_0 = 0, \quad \phi_0(\pm 1) = \phi_0'(\pm 1) = 0, \quad (4-5)$$

$$\text{at } O(\varepsilon): \quad \mathcal{L} \phi_1 = -i\alpha(U_1 - c_1) \delta \phi_0 + i\alpha U_1'' \phi_0 + \sqrt{\frac{1}{R_\infty} - \frac{1}{R_0}} \tilde{R} \delta^2 \phi_0,$$

$$\phi_1(\pm 1) = \phi_1'(\pm 1) = 0. \quad (4-6)$$

ϕ_1 の可解条件から c_1 は

$$c_1 = \frac{\int_{-1}^1 \tilde{\phi} [U_1 \delta \phi_0 - U_1'' \phi_0 - \frac{\tilde{R}}{i\alpha} \sqrt{\frac{1}{R_\infty} - \frac{1}{R_0}} \delta^2 \phi_0] dy}{\int_{-1}^1 \tilde{\phi} \delta \phi_0 dy}, \quad (4-7)$$

の形に得られる。 $\text{im } c_0 \equiv 0$ から準中立擾乱の線形増幅率は

$$G_{qn} = \varepsilon \alpha \cdot \text{im } c_1 + O(\varepsilon^2). \quad (4-8)$$

一般に(4-5)の解は(2-14)式の γ に τ の関数 $A(\tau)$ と α の積の形で求められるべきであるが, ここでは $A(\tau) \equiv 1$ とおいた。この仮定は Fig. 7 で正当化されている。

Fig. 7 は γ に依存しない増幅率 $G_{\hat{\psi}(0, \tau)}$, $G_{\bar{e}}$, G_{qs} と G_{qn} の時

間変化を示したものである。 $G_{\hat{\psi}}(0, \tau)$ の G_{qs} に対する補正量は最大で 4.76% ($\tau=0.02$) であり、この値は Grabowski¹⁸⁾ の補正量とほぼ一致している。また $\tau > 0.08$ では 1% 以下におさまっており、非定常性は $\tau < 0.2$ に局在している。さらに、準中立擾乱を仮定しても、 G の α 依存性による差を考えると十分良い近似であるといえる。

Fig. 8 に種々の波数 α をもつ単色波擾乱の増幅率の τ 依存性を G の代表として $G_{\hat{\psi}}(0, \tau)$ で示した。

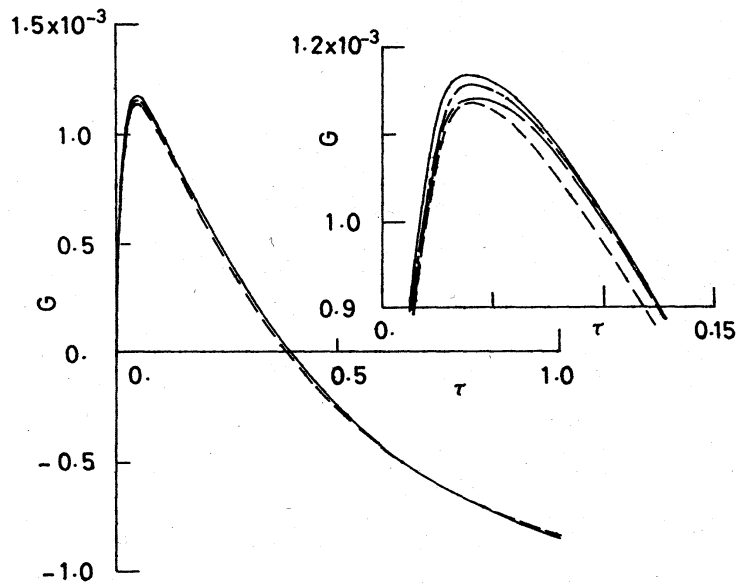


Fig.7 Change of the growth rates :

—, $G_{\hat{\psi}}(0, \tau)$; ---, $G_{\bar{e}}$; - · -, G_{qs} ;
····, G_{qn} . $\alpha = \alpha_c$.

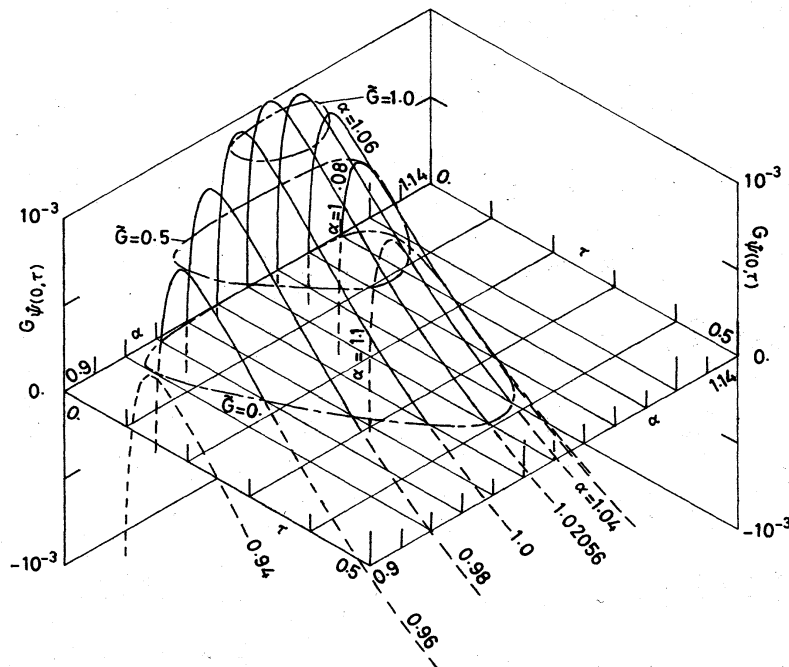


Fig.8 Growth rates $G_{\hat{\psi}}(0, \tau)$ of disturbances with various wave numbers, α . $\tilde{G} = 10^3 \cdot G_{\hat{\psi}}(0, \tau)$

§ 4 の最大の結果は (4-11) 式で与えられるように準中立擾乱の線形増幅率が $O(\varepsilon) T_F$ である。定常流の場合増幅率は $O(\varepsilon^2)$ であるが、主流の非定常性が $O(\varepsilon)$ であることにより、増幅率も $O(\varepsilon)$ である。

§ 5. むすび

多重尺交法を用いて減速流の安定性を調べたが、非定常性による補正量は最大でも 4.76% と小さく、また今回説明を省略した 100% 減速流の結果でも $G_F(0, \tau)$ の G_{qs} に対する補正量は最大で 4.4% であり、非定常補正は非常に微弱である。Eagles⁷⁾ は高次補正を調べた唯一のものであるが、 $\varepsilon=0.4$ でも高次補正が今回扱った最低次の補正の 10% 以下でしかたつていないことを示している。従って今回の流れの場合高次補正の効果は期待できなかつた。実際に非定常補正がこの程度で十分たつたか否かは実験的裏付けを待つ以外にたつたように思われる。しかし Fig. 7, 8 から明らかたつたように、 $\alpha \approx \alpha_c$ では G の定義にかかわらず G は正から負に移行し、 $G > 0$ に有限時間とどまる。その間に線形理論で扱える無限小擾乱は指数関数的に有限値まで増大するのでその後の過程は非線形理論で調べた限り実験値（かもし出されても）との直接の対比は不可能であろう。

たつた、以上の計算は invariant imbedding の手法を用いて行った。

References

- 1) I.Imai : Ryutai Rikigaku (Fluid Dynamics) (Shokabo,Tokyo,1973)
vol.1,p308 [in Japanese]
- 2) D.J.Benney and S.Rosenblat : Phys.Fluids 7 (1964) 1385
- 3) S.Rosenblat and D.M.Herbert : J.Fluid Mech. 43 (1970) 385
- 4) P.G.Drazin : Q.Jl.Mech.appl.Math. 27 (1974) 69
- 5) G.Seminara and P.Hall : Proc.R.Soc.Lond. A346 (1975) 279
- 6) P.Hall and K.H.Parker : J.Fluid Mech. 75 (1976) 305
- 7) P.M.Eagles : Proc.R.Soc.Lond. A355 (1977) 209
- 8) M.Bouthier : J.Méc. 11 (1972) 599
- 9) M.Bouthier : J.Méc. 12 (1973) 75
- 10) M.Gaster : J.Fluid Mech. 66 (1974) 465
- 11) A.H.Nayfeh, W.S.Saric and D.T.Mook : Arch.Mech.Stosow 26
(1974) 401
- 12) W.S.Saric and A.H.Nayfeh : Phys.Fluids 18 (1975) 945
- 13) P.M.Eagles and M.A.Weissman : J.Fluid Mech. 69 (1975) 241
- 14) D.G.Crighton and M.Gaster : J.Fluid Mech. 77 (1976) 397
- 15) V.K.Garg and G.F.Round : J.appl.Mech. 45 (1978) 717
- 16) P.Plaschko : J.Fluid Mech. 92 (1979) 209
- 17) R.L.Zollars and W.B.Krantz : J.Fluid Mech. 96 (1980) 585
- 18) W.J.Grabowski : Phys.Fluids 23 (1980) 1954
- 19) V.K.Garg : J.Fluid Mech. 102 (1981) 127
- 20) P.J.Morris : AIAA J. 19 (1981) 857
- 21) V.K.Garg and S.C.Gupta : Phys.Fluids 24 (1981) 1752
- 22) V.K.Garg and S.C.Gupta : J.appl.Mech. 48 (1981) 243
- 23) H.Takami : J.Phys.Soc.Jpn. 14 (1959) 517