

ある非線形波動方程式の解の予想 II.

広 大 工 広田良吾 (Ryogo Hirota)

次の波動方程式 (Spherical Boussinesq equation)

$$W_{tt} + \frac{2}{t}W_t - 3(W^2)_{xx} - W_{xxxx} = 0, \quad (1)$$

に厳密解 (Explode-decay solitary wave solution) が存在
することが中村明氏 (大阪外大) により発見されている

(J. Phys. Soc. Jpn. 54 (1985) 4111). この式の厳密解と
前稿 I. でのべた Classical Boussinesq equation

$$\begin{cases} U_t = [(1+U)V + V_{xx}]_x, \\ V_t = (U + \frac{1}{2}V^2)_x, \end{cases} \quad (2)$$

の解との関係について述べる。

(1)式は変換 $W = 2(\log f)_{xx}$ により、次の2次形式
に変換される

$$(D_t^2 + \frac{2}{t} \frac{d}{dt} - D_x^4 + c) f \cdot f = 0, \quad c: \text{const.} \quad (1)$$

この式は similarity variable z

$$z = \frac{x}{\sqrt{2t}} \quad (\text{前稿の } z \text{ の定義と } z^{-1/2} \text{ による } T_1 \text{ の異な})$$

と置くと,

$$(D_z^4 - z^2 D_z^2 + z \frac{d}{dz} - 4n^2) f_{2n-1} \cdot f_{2n-1} = 0 \quad (5)$$

となる。ここで $c = 4n^2$, $f = f_{2n-1}$ とおくと。

→ classical Boussinesq equation は上記の similarity variable z で表わすと

$$\begin{cases} (D_z^2 + z D_z) f_{2n} \cdot \hat{f}_{2n} = 0, \\ (D_z^3 + \frac{3}{z} D_z^2 + z D_z^2) f_{2n} \cdot \hat{f}_{2n} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

となる。ここで前稿の $f, g \in f_{2n}, \hat{f}_{2n}$ と書き直して置く。

Spherical Boussinesq equation の解と classical Boussinesq equation の解に対して同じ記号 f_n を用いたのは理由があって、どちらも同じ Wronskian を使って、

$f_n(z) = W(H_n(z), H_{n-1}(z), \dots, H_{n-[n-1]/2}(z)), \quad n=1, 2, \dots$
 と表現出来るからである。そして $\hat{f}_{2n}(z)$ は (7)

$$\hat{f}_{2n}(z) = W(H_{2n}(z), H_{2n-1}(z), \dots, H_{n+1}(z), H_n(z)) \quad (8)$$

で定義され、次式

$$D_z f_{2n-1} \cdot f_{2n+1} + (-1)^{[n/2]} (2n+1)n! f_{2n} \hat{f}_{2n} = 0 \quad (9)$$

の関係を見出す。

ここで $[n]$ は Gauss の記号で n を越えない最大の整数を表わす。 $H_n(z)$ は Hermite function で次の微分方程式

$$y'' - xy' + ny = 0 \quad (10)$$

の解 (2種の Hermite function を含む) である。

以上の結果が数式処理 REDUCE 3.1 を使った n が小さいときに証明され、その後、一般の n に対して理論的に証明された。(9)式の関係を発見するのは因数分解の機能が非常に役に立ち、たのびに附記しておく。