

Mould の集合と非可換べき級数環の間の代数的な対応について

小見山尚 (名古屋大学)

本稿は、Ecalle ([E81]) により導入され、多重ゼータ値の研究に応用 ([E03, E11]) された mould や、その重要な対象である alternal mould や symmetral mould の性質を記述するのに使われる dimould ([Sau]) について復習する。また、これらを一般化した $S_\bullet$ -mould を導入し、Unique prolongation theorem という mould の間の関係式を導く定理を紹介する。さらに、Schneps ([Sch12, Sch15]) により導入されている 2 変数非可換多項式環から mould の集合への写像 ma の一般化を考え、いくつかの性質を述べる。この原稿の内容は古庄英和氏と広瀬稔氏（ともに名古屋大学）との共同研究 ([FHK]) に基づくものである。

1 Mould と Dimould、 $S_\bullet$ -mould

この節では、mould 及び dimould とそれらの一般化である $S_\bullet$ -mould について説明する。また、形式的べき級数で成り立つ関係式を mould の関係式へ持ち上げるために使用される Unique prolongation theorem についても触れる。

1.1 Mould

この節では Γ を与えられた集合とする。また m 変数形式的べき級数環 $\mathcal{F}_{\text{ser},m} = \mathbb{Q}[[x_1, \dots, x_m]]$ に対し、 $\mathcal{F}_{\text{ser}} := \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{F}_{\text{ser},m}$ とし、 $\mathcal{F}_{\text{ser},m}$ の商体 $\mathcal{F}_{\text{Lau},m} = \mathbb{Q}((x_1, \dots, x_m))$ に対し、 $\mathcal{F}_{\text{Lau}} := \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{F}_{\text{Lau},m}$ とする。簡単のため $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{ser}}$ (resp. $\mathcal{F}_{\text{Lau}}$) に対し、 $\mathcal{F}_m$ により $\mathcal{F}_{\text{ser},m}$ (resp. $\mathcal{F}_{\text{Lau},m}$) を表すとする。

定義 1.1. ($\mathcal{F} = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{F}_m$ に値を持ち集合 Γ によりインデックス付けされる) *mould* とは族

$$M = \left(M \left(\begin{smallmatrix} x_1, \dots, x_m \\ \sigma_1, \dots, \sigma_m \end{smallmatrix} \right) \right)_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sigma_i \in \Gamma},$$

であって、 $m \geq 0$ に対し $M \left(\begin{smallmatrix} x_1, \dots, x_m \\ \sigma_1, \dots, \sigma_m \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{F}_m$ となるときをいう。 $\mathcal{F}$ に値を持ち集合 Γ によりインデックス付けされる *mould* 全体の集合を $\mathcal{M}(\mathcal{F}; \Gamma)$ により表す。この集合 $\mathcal{M}(\mathcal{F}; \Gamma)$ は次のような演算により非可換 $\mathbb{Q}$ -代数の構造を持つ：

$$A + B := \left(A \left(\begin{smallmatrix} x_1, \dots, x_m \\ \sigma_1, \dots, \sigma_m \end{smallmatrix} \right) + B \left(\begin{smallmatrix} x_1, \dots, x_m \\ \sigma_1, \dots, \sigma_m \end{smallmatrix} \right) \right)_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sigma_i \in \Gamma},$$

$$A \times B := \left(\sum_{i=0}^m A \left(\begin{smallmatrix} x_1, \dots, x_i \\ \sigma_1, \dots, \sigma_i \end{smallmatrix} \right) B \left(\begin{smallmatrix} x_{i+1}, \dots, x_m \\ \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_m \end{smallmatrix} \right) \right)_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sigma_i \in \Gamma}.$$

ここで、単位元 $I \in \mathcal{M}(\mathcal{F}; \Gamma)$ は

$$I \left(\begin{smallmatrix} x_1, \dots, x_m \\ \sigma_1, \dots, \sigma_m \end{smallmatrix} \right) := \begin{cases} 1 & (m = 0), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

として与えられる（ただし $m \geq 0$ かつ $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \Gamma^m$ ）。また、すべての成分が $\mathbb{Q}$ に属する *mould* を **constant-mould** と呼ぶ（単位元 I は *constant-mould* の一例である）。

注意 1.2. $\mathcal{M}(\mathcal{F}; \Gamma)$ の部分集合として

$$\text{ARI}(\mathcal{F}; \Gamma) := \{M \in \mathcal{M}(\mathcal{F}; \Gamma) \mid M(\emptyset) = 0\},$$

$$\text{GARI}(\mathcal{F}; \Gamma) := \{M \in \mathcal{M}(\mathcal{F}; \Gamma) \mid M(\emptyset) = 1\},$$

を考えると、 $(\text{ARI}(\mathcal{F}; \Gamma), [,])$ はリー代数に、 $(\text{GARI}(\mathcal{F}; \Gamma), \times)$ は群になることが分かる。ここで、 $[A, B] := A \times B - B \times A$ ($A, B \in \text{ARI}(\mathcal{F}; \Gamma)$) とした。

次に集合 $\text{ARI}(\mathcal{F}; \Gamma)$, $\text{GARI}(\mathcal{F}; \Gamma)$ の部分集合を導入する。集合 $X := \{ \left(\begin{smallmatrix} x_i \\ \sigma \end{smallmatrix} \right) \}_{i \in \mathbb{N}, \sigma \in \Gamma}$ に対し

$$X_{\mathbb{Z}} := \{ \left(\begin{smallmatrix} u \\ \sigma \end{smallmatrix} \right) \mid u = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k, \ k \in \mathbb{N}, \ a_j \in \mathbb{Z}, \ \sigma \in \Gamma \},$$

と定め、 $X_{\mathbb{Z}}$ のすべての元により生成される非可換自由モノイドを $X_{\mathbb{Z}}^{\bullet}$ により表す。また、 $X_{\mathbb{Z}}$ の元により生成される $\mathbb{Q}$ 上非可換多項式環を $\mathbb{Q}\langle X_{\mathbb{Z}} \rangle$ により表す（単位元は $\emptyset$ と書く）。 $\mathbb{Q}\langle X_{\mathbb{Z}} \rangle$ 上の積 $\sqcup$ を $\emptyset \sqcup \omega := \omega \sqcup \emptyset := \omega$ かつ

$$u\omega \sqcup v\eta := u(\omega \sqcup v\eta) + v(u\omega \sqcup \eta),$$

により定める（ただし $u, v \in X_{\mathbb{Z}}$ かつ $\omega, \eta \in X_{\mathbb{Z}}^{\bullet}$ ）。このとき、 $(\mathbb{Q}\langle X_{\mathbb{Z}} \rangle, \sqcup)$ は可換な $\mathbb{Q}$ 上結合代数になる。今、整数の族 $\{\text{Sh}_{\alpha}^{(\omega; \eta)}\}_{\omega, \eta, \alpha \in X_{\mathbb{Z}}^{\bullet}}$ を

$$\omega \sqcup \eta = \sum_{\alpha \in X_{\mathbb{Z}}^{\bullet}} \text{Sh}_{\alpha}^{(\omega; \eta)} \alpha,$$

により定める。

定義 1.3. *Mould* $M \in \text{ARI}(\mathcal{F}; \Gamma)$ (*resp.* $\in \text{GARI}(\mathcal{F}; \Gamma)$) が

$$\sum_{\alpha \in X_{\mathbb{Z}}^{\bullet}} \text{Sh}_{\alpha}^{(\begin{smallmatrix} (x_1, \dots, x_p) \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_p) \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} (x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) \\ (\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+q}) \end{smallmatrix})} M(\alpha) = 0$$

$$(\text{resp. } = M \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_p \\ \sigma_1, \dots, \sigma_p \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x_{p+1}, \dots, x_{p+q} \\ \sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+q} \end{pmatrix}),$$

$(p, q \geq 1)$ をみたすとき、 M は **altern** (*resp.* **symmetr**) であるという。

$\text{ARI}(\mathcal{F}; \Gamma)$, $\text{GARI}(\mathcal{F}; \Gamma)$ の部分集合を

$$\text{ARI}(\mathcal{F}; \Gamma)_{\text{al}} := \{M \in \text{ARI}(\mathcal{F}; \Gamma) \mid M \text{ は altern}\},$$

$$\text{GARI}(\mathcal{F}; \Gamma)_{\text{as}} := \{M \in \text{GARI}(\mathcal{F}; \Gamma) \mid M \text{ は symmetr}\},$$

により定める。このとき、 $(\text{ARI}(\mathcal{F}; \Gamma)_{\text{al}}, [,])$ (*resp.* $(\text{GARI}(\mathcal{F}; \Gamma)_{\text{as}}, \times)$) は $(\text{ARI}(\mathcal{F}; \Gamma), [,])$ (*resp.* $(\text{GARI}(\mathcal{F}; \Gamma), \times)$) の部分リー代数 (*resp.* 部分群) になる。

1.2 Dimould

定義 1.4. $(\mathcal{F}$ に値を持ち集合 Γ_1, Γ_2 によりインデックス付けされる) *dimould* とは族

$$M := \left(M \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_r; x_{r+1}, \dots, x_{r+s} \\ \sigma_1, \dots, \sigma_r; \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_{r+s} \end{pmatrix} \right)_{r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sigma_1, \dots, \sigma_r \in \Gamma_1, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_{r+s} \in \Gamma_2},$$

であって、 $M(\emptyset; \emptyset) \in \mathbb{Q}$ かつ $M \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_r; x_{r+1}, \dots, x_{r+s} \\ \sigma_1, \dots, \sigma_r; \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_{r+s} \end{pmatrix} \in \mathcal{F}_{r+s}$ ($r \geq 1$ or $s \geq 1$) となるときをいう。*Dimould* 全体の集合を $\mathcal{M}_2(\mathcal{F}; \Gamma_1, \Gamma_2)$ により表す。集合 $\mathcal{M}_2(\mathcal{F}; \Gamma_1, \Gamma_2)$ は次のような積により非可換 $\mathbb{Q}$ 上代数の構造を持つ：

$$(A \times B) \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_r; x_{r+1}, \dots, x_{r+s} \\ \sigma_1, \dots, \sigma_r; \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_{r+s} \end{pmatrix}$$

$$:= \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^s A \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_i; x_{r+1}, \dots, x_{r+j} \\ \sigma_1, \dots, \sigma_i; \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_{r+j} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x_{i+1}, \dots, x_r; x_{r+j+1}, \dots, x_{r+s} \\ \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_r; \sigma_{r+j+1}, \dots, \sigma_{r+s} \end{pmatrix}.$$

ここで、単位元 $I \in \mathcal{M}_2(\mathcal{F}; \Gamma_1, \Gamma_2)$ は次で与えられる。

$$I \left(\begin{smallmatrix} x_1, \dots, x_r; x_{r+1}, \dots, x_{r+s} \\ \sigma_1, \dots, \sigma_r; \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_{r+s} \end{smallmatrix} \right) := \begin{cases} 1 & (r = s = 0), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

Dimould を用いて alternal mould や symmetr al mould の定義を書き換えてみよう。まず、写像を 2 つ導入する。 $\mathbb{Q}$ 上線形写像 $\otimes : \mathcal{M}(\mathcal{F}; \Gamma_1) \otimes \mathcal{M}_2(\mathcal{F}; \Gamma_2) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathcal{F}; \Gamma_1, \Gamma_2)$ を

$$(M \otimes N) \left(\begin{smallmatrix} x_1, \dots, x_r; x_{r+1}, \dots, x_{r+s} \\ \sigma_1, \dots, \sigma_r; \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_{r+s} \end{smallmatrix} \right) := M \left(\begin{smallmatrix} x_1, \dots, x_r \\ \sigma_1, \dots, \sigma_r \end{smallmatrix} \right) \cdot N \left(\begin{smallmatrix} x_{r+1}, \dots, x_{r+s} \\ \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_{r+s} \end{smallmatrix} \right),$$

により定め、 $\mathbb{Q}$ 上線形写像 $\mathcal{Sh} : \mathcal{M}(\mathcal{F}; \Gamma) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathcal{F}; \Gamma, \Gamma)$ を

$$\mathcal{Sh}(M) := \left(\sum_{\alpha \in X_{\mathbb{Z}}^{\bullet}} \text{Sh} \left(\begin{smallmatrix} (x_1, \dots, x_p) \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_p) \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} (x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) \\ (\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+q}) \end{smallmatrix} \right) M(\alpha) \right)_{p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sigma_i \in \Gamma},$$

により定める。次が成り立つ。

補題 1.5 ([FHK]). $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{ser}}$ のとき、テンソル積 $\otimes$ は次の $\mathbb{Q}$ 上代数同型を誘導する。

$$\widehat{\otimes} : \mathcal{M}(\mathcal{F}; \Gamma_1) \widehat{\otimes} \mathcal{M}(\mathcal{F}; \Gamma_2) \simeq \mathcal{M}_2(\mathcal{F}; \Gamma_1, \Gamma_2).$$

Dimould により alternality や symmetrality は次のように言い換えられる。

命題 1.6 ([K, Sau]). Mould $M \in \mathcal{M}(\mathcal{F}; \Gamma)$ に対し、次が成り立つ：

- (i). $M \in \text{ARI}(\mathcal{F}; \Gamma)_{\text{al}} \iff \mathcal{Sh}(M) = M \otimes I + I \otimes M,$
- (ii). $M \in \text{GARI}(\mathcal{F}; \Gamma)_{\text{as}} \iff \mathcal{Sh}(M) = M \otimes M \text{ かつ } M(\emptyset) = 1.$

1.3 $S_{\bullet}$ -mould

次に、mould や dimould を一般化した概念を導入する。

定義 1.7 ([FHK]). $S_{\bullet} = (S_0, S_1, S_2, \dots)$ を集合の列とする。（ $\mathcal{F}$ に値を持つ） $S_{\bullet}$ -mould とは族

$$M = (M_s(x_1, \dots, x_m))_{m \geq 0, s \in S_m},$$

であって、 $M_s(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{F}_m$ となるときをいう。 $S_{\bullet}$ -mould 全体の集合を $\mathcal{M}(\mathcal{F}, S_{\bullet})$ により表す。

注意 1.8. $S_\bullet$ -mould は以下のように、mould や dimould を特殊な場合に持つ。

1. 集合 Γ に対し、 $S_m = \Gamma^m$ と置くと $\mathcal{M}(\mathcal{F}, S_\bullet) = \mathcal{M}(\mathcal{F}, \Gamma)$ となる。
2. 集合 Γ_1, Γ_2 に対し、 $S_m = \coprod_{i+j=m} \Gamma_1^i \times \Gamma_2^j$ と置くと $\mathcal{M}(\mathcal{F}, S_\bullet) = \mathcal{M}_2(\mathcal{F}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ となる。

以下、簡単のために $\mathcal{M}(\mathcal{F}, S_\bullet) = \mathcal{M}(\mathcal{F}, \Gamma)$ または $\mathcal{M}_2(\mathcal{F}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ として話を進める。

定義 1.9 ([FHK]). $m \geq 0$ とする。(集合の間の) 写像 $f : \mathcal{M}(\mathcal{F}_{\text{Lau}}, S_\bullet) \rightarrow \mathcal{F}_{\text{Lau}, m}$ は任意の $M \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_{\text{Lau}}, S_\bullet)$ に対し $f(M)(x_1, \dots, x_m)$ が $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_m)$ を係数にもつ

$$\left\{ M_s(v_1, \dots, v_n) \left| \begin{array}{l} n \geq 0, s \in S_n, \\ v_1, \dots, v_n: \text{linearly independent in } \mathbb{Q}x_1 + \dots + \mathbb{Q}x_m \end{array} \right. \right\}$$

の多項式として表されるとき **mould-proper** である、という。また写像 $g : \mathcal{M}(\mathcal{F}_{\text{Lau}}, S_\bullet) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{F}_{\text{Lau}}, T_\bullet)$ は、任意の $m \geq 0$ と $t \in T_m$ に対して写像

$$g_t : \mathcal{M}(\mathcal{F}_{\text{Lau}}, S_\bullet) \rightarrow \mathcal{F}_{\text{Lau}, m} ; M \mapsto g(M)_t(x_1, \dots, x_m)$$

が mould-proper であるとき **mould-proper** である、という。

注意 1.10. 上記で導入したいいくつかの mould の演算 $(+, \times, \otimes, \mathfrak{sh})$ は mould-proper な写像の具体例になっている。

定理 1.11 ([FHK], Unique prolongation theorem). $\mathcal{M}(\mathcal{F}_{\text{ser}}, S_\bullet)$ 上の mould-proper な写像は $\mathcal{M}(\mathcal{F}_{\text{Lau}}, S_\bullet)$ 上の mould-proper な写像に一意的に拡張することができる。

系 1.12 ([FHK]). $\mathcal{M}(\mathcal{F}_{\text{Lau}}, S_\bullet)$ 上の写像 f, g が mould-proper であるとする。もしこれらの $\mathcal{M}(\mathcal{F}_{\text{ser}}, S_\bullet)$ への制限が一致するなら、 $f = g$ が成り立つ。

2 写像 ma_Γ

この節では、 Γ は $n-1$ 元集合として、 $\mathfrak{f}_\Gamma$ を n 変数 f_0, f_σ ($\sigma \in \Gamma$) により生成される $\mathbb{Q}$ 上自由リー代数とする。また、 $U\mathfrak{f}_\Gamma := \mathbb{Q}\langle f_0, f_\sigma \mid \sigma \in \Gamma \rangle$ を

$\mathfrak{f}_\Gamma$ の普遍包絡環として、その次数による完備を $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma} := \mathbb{Q}\langle\langle f_0, f_\sigma \mid \sigma \in \Gamma \rangle\rangle$ により表すとする。 $e_0 : \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma} \rightarrow \mathbb{Q}$ を f_0 の係数を取り出す写像とする。このとき、 $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}$ の coproduct Δ を用いて、

$$\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger := \{w \in \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma} \mid (e_0 \otimes \text{id}) \circ \Delta(w) = 0\}.$$

と定める¹。

さて、

$$h = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \Gamma^r} \sum_{k_0, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0} \langle h \mid_{\sigma_1, \dots, \sigma_r}^{k_0, \dots, k_r} \rangle f_0^{k_0} f_{\sigma_1} \cdots f_{\sigma_r} f_0^{k_r} \in \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma},$$

に対して、mould

$$\text{ma}_{\Gamma, h} = \{\text{ma}_{\Gamma, h}^r(x_1, \dots, x_r)_{\sigma_1, \dots, \sigma_r}\}_{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sigma_i \in \Gamma} \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_{\text{ser}}; \Gamma)$$

を次のように構成されるとする。

$$\begin{aligned} \text{ma}_{\Gamma, h}^r(x_1, \dots, x_r)_{\sigma_1, \dots, \sigma_r} &= \text{vimo}_{\Gamma, h}^r(0, x_1, x_1+x_2, \dots, x_1+\cdots+x_r)_{\sigma_1, \dots, \sigma_r}, \\ \text{vimo}_{\Gamma, h}^r(z_0, \dots, z_r)_{\sigma_1, \dots, \sigma_r} &= \sum_{k_0, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0} \langle h \mid_{\sigma_1, \dots, \sigma_r}^{k_0, \dots, k_r} \rangle z_0^{k_0} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_r^{k_r}. \end{aligned}$$

補題 2.1 ([FHK]). $h \in \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}$ に対し、次の4つの条件は同値である：

1. $h \in \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger$.
2. 任意の $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \Gamma$ 及び $k_0, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0$ に対し、

$$\sum_{i=0}^r (k_i + 1) \langle h \mid_{\sigma_1, \dots, \sigma_r}^{k_0, \dots, k_i+1, \dots, k_r} \rangle = 0.$$

3. 任意の $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \Gamma$ に対し、

$$\sum_{i=0}^r \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \right) \text{vimo}_{\Gamma, h}^r(z_0, \dots, z_r)_{\sigma_1, \dots, \sigma_r} = 0.$$

4. 任意の $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \Gamma$ に対し、 $\text{vimo}_{\Gamma, h}^r(z_0, \dots, z_r)_{\sigma_1, \dots, \sigma_r}$ は変換 $(z_0, \dots, z_r) \mapsto (z_0 + \alpha, \dots, z_r + \alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{Q}$) のもとで不変である。

¹ $1, f_\sigma \in \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger$ ($\sigma \in \Gamma$) であるが、 but $f_0^n \notin \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger$ ($n \in \mathbb{N}$) となることに注意。

上記で導入した $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}$ の部分集合 $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger$ は次のような性質を持つ。

補題 2.2 ([FHK]). $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger$ は $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}$ の完備な部分 Hopf 代数になる。

$D^1\mathfrak{f}_\Gamma$ を $\mathfrak{f}_\Gamma$ の $\text{depth} \geq 1$ となる元全体からなる $\mathfrak{f}_\Gamma$ の部分リー代数、すなわち次を満たすとする。

$$\mathfrak{f}_\Gamma = \mathbb{Q}f_0 \oplus D^1\mathfrak{f}_\Gamma.$$

命題 2.3 ([FHK]). 完備な Hopf 代数 $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger$ はリー代数 $D^1\mathfrak{f}_\Gamma$ の完備な普遍包絡環になる、すなわち

$$\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger \simeq \widehat{U}(D^1\mathfrak{f}_\Gamma).$$

Hopf 代数 $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger$ が mould の集合と対応することを以下で見る。

定義 2.4 ([E11]). $\mathbb{Q}$ 上線形写像 $\text{pari}, \text{anti} : \mathcal{M}(\mathcal{F}; \Gamma) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{F}; \Gamma)$ を

$$\begin{aligned} \text{pari}(M) \left(\begin{array}{ccc} u_1, & \dots, & u_m \\ \sigma_1, & \dots, & \sigma_m \end{array} \right) &:= (-1)^m M \left(\begin{array}{ccc} u_1, & \dots, & u_m \\ \sigma_1, & \dots, & \sigma_m \end{array} \right), \\ \text{anti}(M) \left(\begin{array}{ccc} u_1, & \dots, & u_m \\ \sigma_1, & \dots, & \sigma_m \end{array} \right) &:= M \left(\begin{array}{ccc} u_m, & \dots, & u_1 \\ \sigma_m, & \dots, & \sigma_1 \end{array} \right), \end{aligned}$$

により定める。

命題 2.5 ([FHK]). 非可換代数 $\mathcal{M}(\mathcal{F}_{\text{ser}}; \Gamma)$ は *coproduc* を $S\hbar$ 、*antipode* を $\text{anti} \circ \text{pari}$ とする完備な Hopf 代数になる。さらに、写像

$$\text{ma}_\Gamma : \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{F}_{\text{ser}}; \Gamma) ; h \mapsto \text{ma}_{\Gamma, h}$$

は完備な Hopf 代数の間の同型を与える。

注意 2.6. $\mathcal{M}(\mathcal{F}_{\text{ser}}; \Gamma)$ の Hopf 代数の構造は補題 1.5 に由来する。一方、 $\mathcal{M}(\mathcal{F}_{\text{Lau}}; \Gamma)$ はこの補題のような同型が存在しない（テンソル積は単射にしかない）ため Hopf 代数の構造を持たない。

最後に $\text{ARI}(\mathcal{F}; \Gamma)_{\text{al}}$, $\text{GARI}(\mathcal{F}; \Gamma)_{\text{as}}$ が写像 ma_Γ により $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger$ のどのような部分集合と対応するか見る。定数項が 0 である $h \in \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}$ に対し、

$$\exp(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \in \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma},$$

と定める。 $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger$ の部分集合として

$$\exp \widehat{\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger := \exp \widehat{\mathfrak{f}_\Gamma} \cap \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger, \quad \widehat{\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger := \widehat{\mathfrak{f}_\Gamma} \cap \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger,$$

を考える。このとき、次が成り立つ。

命題 2.7 ([FHK]). 写像 ma_Γ は群の同型

$$\exp \widehat{\mathfrak{f}}_\Gamma^\dagger \rightarrow \mathrm{GARI}(\mathcal{F}_{\mathrm{ser}}; \Gamma)_{\mathrm{as}},$$

及び、リー代数の同型

$$\widehat{\mathfrak{f}}_\Gamma^\dagger \rightarrow \mathrm{ARI}(\mathcal{F}_{\mathrm{ser}}; \Gamma)_{\mathrm{al}},$$

を誘導する。

参考文献

- [E81] Ecalle, J., *Les fonctions résurgentes. Tome I et II*, Publications Mathématiques d'Orsay **81**, 6. Université de Paris-Sud, Département de Mathématique, Orsay, 1981.
- [E03] Ecalle, J., *ARI/GARI, la dimorphie et l'arithmétique des multizêtas: un premier bilan*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), no. 2, 411–478.
- [E11] Ecalle, J., *The flexion structure and dimorphy: flexion units, singulators, generators, and the enumeration of multizeta irreducibles*, With computational assistance from S. Carr. CRM Series, **12**, Asymptotics in dynamics, geometry and PDEs; generalized Borel summation. Vol. II, 27–211, Ed. Norm., Pisa, 2011.
- [FHK] H. Furusho, M. Hirose, N. Komiyama, *Associators, the Grothendieck-Teichmüller group and the bigaded variants in mould theory*, in preparation.
- [K] N. Komiyama, *On properties of $\mathrm{adari}(\mathrm{pal})$ and $\mathrm{ganit}(\mathrm{pic})$* , arXiv:2110.04834.
- [Sau] D. Sauzin, *Mould expansions for the saddle-node and resurgence monomials*, Renormalization and Galois theories, 83–163, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 15, Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.
- [Sch12] Schneps, L., *Double shuffle and Kashiwara-Vergne Lie algebras*, J. Algebra **367** (2012), 54–74.

- [Sch15] Schneps, L., *ARI, GARI, ZIG and ZAG: An introduction to Ecalle's theory of multiple zeta values*, [arXiv:1507.01534](#), preprint.