

単一特性的でない場合の没田の定理について

名大 理 相原正樹

京大 数研 河合隆裕

没田の定理は、単一特性的な作用素 P に対し、その陪特性曲線が初期平面と横断的に交わる時、初期データと解の構造の関係を明快にした。それは、我々の立場から言えば、 P の "Riemann 函数" の満たす極大過剰決定系を求めていること他ならない。(たとえば、佐藤-河合-相原、数学 25-3 定理 2-17 を参照) 没田の定理は、 P が多重度一定の場合には容易に拡張される。(佐藤-河合-相原の同上定理、又、没田氏自身による(接触変換を用いない)証明もある。(氏の学会講演('74. 4)) しかしながら、 P が単一特性的でない時、あるいは、単一特性的であっても陪特性曲線が初期平面と接する時には本質的に新しい困難が生じる。しかも、幾何学に自然に現われる作用素で単一特性的でないものもあり、又、^(たとえば) 同折波の現象を理解するにはどうしても後者の困難は克服しなければならない。

実は、単一特性的の場合と異なり、解の特異点のまわりのモロドロミーの構造は複雑であり、その為、実領域での結果を得るには、更に多くの努力が必要とされるので、ここでは、複素領域における基礎的な部分の解説を行う。尚、単一特性的でない作用素の実領域での解析については、相原-河合-

大島による ^(本集会での) 講演を思い出さみたい。

さて, P が単一特異ではあるが, 陪特異曲線が初期平面 $\{x_1=0\}$ に接する場合の考察をまず行おう。

この場合, generic な場合には, P は $P_0 = D_1^2 - (x_2 + ax_3)D_2^2$ (near $(0; dx_2 \infty)$) という標準型を (micro-local に) 持つ, と予想されている。(佐藤) Tricomi の作用素は, この退化した場合を考えられる。では, P_0 について "渡田の定理" はどのような形になるか, 具体的に計算してみよう。即ち, 試みに次の方程式の解を形式的に求めてみよう。(以下 P_0 を本稿では佐藤の作用素と呼ぶことにする。)

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 u = 0 \\ u|_{x_1=0} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_1=0} = (x_2 + ax_3)^\lambda \end{array} \right.$$

この解は,

$$u = (x_1 + x_3)x_2^\lambda F_4\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}(-\lambda+1); \frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4(x_1+x_3)^3}{9(x_2+ax_3)^2}, \frac{4x_3^3}{9(x_2+ax_3)^3}\right) \\ - x_3 x_2^\lambda F_4\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}(-\lambda+1); \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{4(x_1+x_3)^3}{9(x_2+ax_3)^2}, \frac{4x_3^3}{9(x_2+ax_3)^3}\right)$$

と与えられる。

同様に

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 v = 0 \\ v|_{x_1=0} = (x_2 + ax_3)^\lambda \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} \Big|_{x_1=0} = 0 \end{array} \right.$$

の形式解は $v =$

$$= (x_2 + ax_3)^\lambda F_4 \left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}; \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{4(x_2 + x_3)^3}{9(x_2 + ax_3)^2}, \frac{4x_3^3}{9(x_2 + ax_3)^2} \right) \\ - \frac{1}{2} \lambda (\lambda - 1) (x_2 + ax_3)^{\lambda-2} (x_2 + x_3) x_3^2 \times \\ \times F_4 \left(\frac{1}{2}(-\lambda+2), \frac{1}{2}(-\lambda+3); \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{4(x_2 + x_3)^3}{9(x_2 + ax_3)^2}, \frac{4x_3^3}{9(x_2 + ax_3)^2} \right)$$

により与えられる。但し、ここは $F_4(\alpha, \beta; \gamma, \gamma'; x, y)$ は

Appell の 2 変数超幾何函数

$$\sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n.$$

勿論、ここで $x_3 = 0$ とおけば、これは Bader-Germain, Leray, Delache 等により研究された、Tricomi の方程式の基本解となり、通常の超幾何函数で表現される。このことから、Tricomi の方程式は屈折波の現象のモデルとしては、やや特殊に過ぎることが理解されよう。(初期平面を $\{x_2 = 0\}$ とする限り。) Ludwig 等による caustics における漸近解の研究も、この意味で不十分であるように思われる。たゞ Tricomi の方程式はかなり取り扱い易いので、ここで我々の立場でそれをどのように捕えるべきかを考えておこう。まず、Tricomi の作用素にしろ、佐藤の作用素にしろ、単一特性故、境界条件を考慮

しない限り、可解性についての問題はないから、高次の Ext 群は考えなくとも構わないことに注意しておこう。

さて Tricomi の方程式については 2 つの特別な形式解があることを思い出しておこう。それは、

$$u_0 = \left(-\frac{x_1^3}{9} + \frac{x_2^2}{4}\right)^{-\frac{1}{6}} \quad \text{と} \quad u_1 = x_2 \left(-\frac{x_1^3}{9} + \frac{x_2^2}{4}\right)^{-\frac{5}{6}}$$

である。この 2 つの解は、各々、形式的には、 $\frac{\partial u_0}{\partial x_2} \Big|_{x_1=0} = 0$,

$u_1 \Big|_{x_1=0} = 0$ と考えられるけれど、 $\frac{x_1^3}{9} - \frac{x_2^2}{4} = 0$ 上での u_0

の order と u_1 の order の差は $(2/3)$ であり、通常の $\mathcal{D}$ の範囲

内では、 u_0 と u_1 は同値になり得ない。従って、この場合は擬微分作用素

として分数階の物も許しておいた方が都合がいい。それと以

下 $\tilde{\mathcal{D}}$ と記そう。今 $D_{x_2}^\lambda u_0$ の満たす極大過剰決定系を

$\mathcal{M}_\lambda$ としよう。 $\mathcal{M}_\lambda$ は具体的に次式により与えられる。

$$\begin{cases} (D_1^2 - x_2 D_2^2) u = 0 \\ \left(\frac{1}{3} x_1 D_1 + \frac{1}{3} x_2 D_2 + \frac{1}{6} + \lambda\right) u = 0 \\ \left(x_2 D_1 + \frac{x_1^2}{3} D_2 + \lambda D_1 D_2^{-1}\right) u = 0 \end{cases}$$

ここで $\mathcal{M}_\lambda$ の $\{x_1=0\}$ への制限を考えると、それは

$$\mathcal{P}_2 D_1^\lambda x_2^{-\frac{1}{3}} \oplus \mathcal{P}_2 D_2^{\lambda+\frac{2}{3}} x_2^{-\frac{1}{3}}$$

従って $\tilde{\mathcal{D}}$ で考えれば

$$\tilde{\mathcal{M}}_\lambda \Big|_{x_1=0} \simeq [\tilde{\mathcal{D}} \delta(x_2)]^2$$

従って $\tilde{M}_\lambda|_{x_1=0}$ から $\tilde{\mathcal{P}}_2 \delta(x_2) \wedge$ の $\tilde{\mathcal{P}}_2$ -homomorphism は
 独立な物か 2つ 指定できる。即ち, $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{P}}/\tilde{\mathcal{P}}(D_1^2 - x_1 D_2^2)$
 において

$$\text{Hom}_{\tilde{\mathcal{P}}}(\mathcal{L}, \tilde{M}_\lambda) \rightarrow \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{P}}_2}(\mathcal{L}|_{x_1=0}, \tilde{M}_\lambda|_{x_1=0})$$

$$= \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{P}}_2}(\tilde{\mathcal{P}}_2^2, \tilde{M}_\lambda|_{x_1=0}) \rightarrow [\tilde{\mathcal{P}}_2 \delta(x_2)]^2$$

なる写像が 2つ 存在する。この $\tilde{M}_\lambda|_{x_1=0} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_2 \delta(x_2) \wedge$ の写
 像を定めることから、実領域での境界値問題 其他を考える時
 には重要である。

次に、佐藤の作用素の場合には事態はどうかを
 調べよう。この場合、Tricomi の作用素の初期値問題の基本
 解の満たす極大過剰決定系 $\tilde{M}_\lambda$ より出発して、佐藤の作用素に
 対する物 (再び M_λ と記す) も容易に求められる。それは:

$$\begin{cases} E_0 u = 0 \\ M_\lambda: \begin{cases} ((D_1 - D_3)^2 - x_3 D_2^2) u = 0 \\ (\frac{1}{3} x_1 D_1 + \frac{1}{2} x_2 D_2 + \frac{1}{3} x_3 D_3 - \frac{1}{2}(\lambda + \frac{2}{3})) u = 0 \end{cases} \end{cases}$$

ここで

$$(\#) \quad \tilde{M}_\lambda|_{x_1=0} = \mathcal{P}' u_0 + \mathcal{P} u_1$$

とすれば、 (u_0, u_1) は次の関係式により結ばれている。

$$\begin{cases} D_3^2 u_0 - 2 D_3 u_1 = 0 \\ D_3^2 u_1 - 2(x_3 D_3 + 1) D_3^2 u_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\frac{1}{2} x_2 D_2 + \frac{1}{3} x_3 D_3 - \frac{1}{2} (\lambda + \frac{2}{3})) u_0 = 0 \\ (\frac{1}{2} x_2 D_2 + \frac{1}{3} x_3 D_3 - \frac{\lambda}{2}) u_1 = 0 \end{cases}$$

こゝで

$$\mathcal{M}_\lambda|_{x_1=0} \rightarrow \mathcal{P}' x_2^\lambda$$

なる写像を $u_0 \mapsto 0, u_1 \mapsto x_2^\lambda$ とし定めると,

これは split して ($\because x_2^\lambda \mapsto u_1 - \frac{D_3}{2} u_0$)

$$\mathcal{M}_\lambda|_{x_1=0} = \mathcal{P}' x_2^\lambda \oplus \mathcal{P}' / \mathcal{I}$$

$$\text{但し } \mathcal{I} = \mathcal{P}' (\frac{1}{3} D_3^3 - (2x_3 D_3 + 1) D_2^2)$$

$$+ \mathcal{P}' (\frac{1}{3} x_3 D_3 + \frac{1}{2} x_2 D_2 - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{3})$$

となる。

ここで第2の因子は重複故、第1の因子にのみ注目し

2 $\mathcal{M}_\lambda|_{x_1=0} \xrightarrow{\mathcal{I}} \mathcal{P}' x_2^\lambda$ なる写像を固定すると 2次の同型が成立する:

$$\text{Hom}(\mathcal{L}_0, \mathcal{M}_\lambda) \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} \simeq \text{Hom}(\mathcal{P}'^2, \mathcal{P}' x_2^\lambda)$$

$$(\text{但し } \mathcal{L}_0 = \mathcal{P} / \mathcal{P} E_0)$$

実際、 $\mathcal{M}_\lambda$ の生成元 F を一つ固定すると、 $\text{Hom}(\mathcal{L}_0, \mathcal{M}_\lambda) \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}}$ の元 u は、擬微分作用素に対する除法の定理により、

$$u = S(D_1 - D_3, D_2) F \quad \text{又は} \quad S_0(x_3, D_2) F + S_1(x_3, D_2)(D_1 - D_3) F$$

と表示される。従って (*) という分解に応じて

$$\left\{ \begin{aligned} u|_{x_1=0} &= (S_0(x_3, D_2) - S_1(x_3, D_2) D_3) F_0 \\ &\quad + S_1(x_3, D_2) F_1 \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} &= (S_0(x_3, D_2) - S_1(x_3, D_2) D_3) F_1 \\ &\quad + x_3 S_1(x_3, D_2) D_2^2 F_0 \end{aligned} \right.$$

ここで、定義により $\ell(F_0)=0$, $\ell(F_1)=x_2^2$

$$\left\{ \begin{aligned} \ell(u|_{x_1=0}) &= S_1(x_3, D_2) x_2^2 \\ \ell\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0}\right) &= S_0(x_3, D_2) x_2^2 \end{aligned} \right.$$

故に、 u が与えられると (S_0, S_1) が定まり、逆に、

$\tilde{S}_0, \tilde{S}_1 \in \mathcal{P}'$ が与えられると、 $\mathcal{P}x_2^2 \rightarrow \mathcal{M}_\lambda$ の splitting

を用いて $S_0(x_3, D_2), S_1(x_3, D_2)$ をこれらの上の splitting

による像より得られたものとして、 $u = S_0 F + S_1 (D_1 - D_3) F$

と定めれば、必要の $u \in \mathcal{M}_0(\mathcal{L}_0, \mathcal{M}_\lambda) \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}}$ が得

られる。 Q.E.D.

以上の考察を実数域に拡張すること、より具体的に言え

ば $N = \{x_2 = 0\}$. Y をその複素化として、 $S_N^* Y$ から出

る P_0 の陪特性帯の合併に台を持つ $\mathcal{P}$ -加群 $\tilde{\mathcal{M}}$ を

構成して $R\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_0, \tilde{\mathcal{M}}) \simeq R\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_Y, C_N)$ なる同

型を構成することか我々が次にやるやらねばならぬことか

あろう。勿論 N の内、 $x_3 \neq 0$ なる部分については双曲型、又

は楕円型故 困難はない。しかし $x_3=0$ の近傍では Σ の
Lagrangian 多様体の合併上に $\tilde{M}$ を作らねばならないから。
ここに困難が現われる。

以上見てきたように、佐藤の作用素 P_0 に対しては、極大過剰
決定系を用いての定式化が可能である。しかし、単-特位の仮定
が破れる時、即ち、特位多様体 V が特異点を持つ時は、問
題は、かなり難しくなる。たとえば、もっとも簡単な場合として、

$$M = \mathcal{P}/f, \quad V = V_1 \cup V_2, \quad V_1, V_2 \text{ regular.}$$

V_1 と V_2 は normal crossing, $\omega|_{V_1 \cap V_2} \neq 0$, $\sigma(f)$

は reduced, という場合を考えてみる。この時は、たとえば、

$f = \mathcal{P}P$ の場合に考察を行うとして、 P の低階の項が、

generic なら、即ち、 $P = P_1 P_2 + Q$ $\text{ord } Q \leq \text{ord } P_1 + \text{ord } P_2 - 1$,

$$\{ \sigma(P_1) = 0 \} = V_1 \text{ として、 } \left(d \frac{\sigma(Q)}{\{ \sigma(P_2), \sigma(P_1) \}} \wedge \omega \right) \Big|_{V_1 \cap V_2} \neq 0$$

の場合、 P の標準型は判っている。(杉原-河合・大島の

講演参照) たとえば $P = x_1 D_1 + x_2$ ($\text{near } (0; dx_2 \wedge \omega)$)

ととれる。あるいは更に接触変換を行って $P = (D_1 - x_1 D_2)(D_1 + x_1 D_2)$

と考えるとよい。しかし、この時 P の Riemann 函数は、

極大過剰決定系では統制できない。即ち、この種の作用素は

見かけは簡単だが、本質的にはかなり超越的な難しい作

用素である。ただ、極度に特殊な場合、即ち $\sigma(Q)/\{ \sigma(P_2), \sigma(P_1) \} \Big|_{V_1 \cap V_2}$
が定数の時、のみは例外的に極大過剰決定系で統制される。

参考迄に $P = (D_1 - x_1 D_2)(D_1 - x_1 D_2) + \gamma D_2$ ($\gamma \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$) に対し

$$\text{初期条件} \quad \begin{cases} u|_{x_1=0} = \sum_j a_j(x_3, \dots, x_n) x_2^{-j} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}|_{x_1=0} = \sum_j b_j(x_3, \dots, x_n) x_2^{-j} \end{cases}$$

を与えた時の解の具体的な表示を与えておく。

$$\begin{aligned} u = & \sum a_j f_1^{\frac{\gamma+1}{4}-j} f_2^{-j} - \frac{\gamma}{4} F\left(-j+\frac{3}{2}, \frac{\gamma}{4}, \frac{1}{2}, \frac{f_2-f_1}{f_2}\right) \\ & + \sum b_j x_1 f_1^{\frac{\gamma+2}{4}-j} f_2^{-j} - \frac{\gamma+2}{4} F\left(-j+\frac{3}{2}, \frac{\gamma+2}{4}, \frac{3}{2}, \frac{f_2-f_1}{f_2}\right) \end{aligned}$$

但し, $f_1 = x_2 + \frac{x_1^2}{2}$, $f_2 = x_2 - \frac{x_1^2}{2}$, かつそれである。

尚, この表示自身は, γ が (x_1, x_2, D_1, D_2) を含まぬ 0 階の

擬微分作用素であれば、意味のある表示であることを注意

しておく。
(micro-localに)