

Inverse K -Chevalley formula for type A semi-infinite flag manifolds

東京工業大学・理学院数学系 河野 隆史

Takafumi Kouno

Department of Mathematics,
Tokyo Institute of Technology

概要

半無限旗多様体における同変 K 群は、通常の旗多様体の量子 K 理論と密接な関係があり、重要な研究対象である。近年、半無限旗多様体の同変 K 群の (テンソル) 積構造を明らかにするために、Chevalley 公式と呼ばれる等式が研究されてきた。本研究の主な目的は、 A 型の単純代数群について、Chevalley 公式を逆に解いた公式を具体的に記述することである。本稿では、本研究で得られた結果について、証明等の詳細を省いて概説する。本稿は、RIMS 共同研究「組合せ論的表現論の最近の進展」における講演 “Inverse K -Chevalley formula for type A semi-infinite flag manifolds” のまとめである。なお、本稿は内藤聡氏、Daniel Orr 氏、佐垣大輔氏との共同研究に基づく。

1 Introduction

本稿を通して、 G を連結かつ単連結な単純代数群とし、 H を G の極大トーラス、 N を G の冪単根基とする。また、 Δ を G のルート系、 Δ^+ を G の正ルート全体の集合とし、 P を G のウェイト格子、 $P^+ \subset P$ を G の優整ウェイト全体の集合、 Q を G のルート格子とする。続いて、 I を G の Dynkin 図形の頂点全体のなす集合とし、 G の単純ルート全体の集合を $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ 、 G の単純余ルート全体の集合を $\{\alpha_i^\vee \mid i \in I\}$ 、 G の基本ウェイト全体の集合を $\{\varpi_i \mid i \in I\}$ と書く。

本節では、本稿で主として扱う半無限多様体やその同変 K -群の定義を復習し、本研究で考察した「逆 Chevalley 公式」を導入する。半無限旗多様体の定義や性質等について、詳しくは [KNS] や [O] などを参照していただきたい。

1.1 半無限旗多様体

代数群 G から構成される半無限旗多様体 $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ とは、 $\mathbb{C}$ -値点の集合 $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}(\mathbb{C})$ が $G(\mathbb{C}((z)))/(H(\mathbb{C}) \cdot N(\mathbb{C}((z))))$ に一致するような被約 ind-スキームである。ここで、 $\mathbb{C}((z))$ は $\mathbb{C}$ -係数 Laurent 級数全体のなす体である。半無限旗多様体 $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ は、通常の旗多様体 $G/(HN)$ のある種のループ化であ

る. 本稿では $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ の同変 K 理論について議論するため, まずは必要な設定を以下で復習する.

半無限旗多様体 $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ には, 通常の旗多様体の Bruhat 分解の類似に当たる分解が存在することが知られている. $\mathbf{I}$ を $G(\mathbb{C}[[z]])$ の岩堀部分群とする. ここで $\mathbb{C}[[z]]$ は $\mathbb{C}$ -係数形式的冪級数環である. そして, $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ の $\mathbf{I}$ -作用に関する軌道全体の集合は, G のアフィン Weyl 群 W_{af} と 1 対 1 に対応する. そこで, $x \in W_{\text{af}}$ に対応する $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ の $\mathbf{I}$ -軌道の閉包を $\mathbf{Q}_G(x)$ と書き, これを x に対応する半無限 Schubert 多様体と呼ぶ. とくに, 単位元 $e \in W_{\text{af}}$ に対応する半無限 Schubert 多様体 $\mathbf{Q}_G(e)$ を単に $\mathbf{Q}_G$ と書き, 特に混乱のない限り $\mathbf{Q}_G$ も半無限旗多様体と呼ぶ. 各 $x \in W_{\text{af}}$ に対し, 半無限 Schubert 多様体 $\mathbf{Q}_G(x)$ の構造層を $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}$ と書く.

また, 通常の旗多様体と同様に, 各 $\lambda \in P$ に対して $\mathbf{Q}_G$ 上の直線束を次のように構成することができる. 各 $\mu \in P^+$ に対し, μ を最高ウェイトにもつ G の既約最高ウェイト表現を $L(\mu)$ と書くとき, $\mathbf{Q}_G$ の射影空間への埋め込み

$$\mathbf{Q}_G \hookrightarrow \mathbb{P} := \prod_{i \in I} \mathbb{P}(L(\varpi_i) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[z]]) \quad (1)$$

が存在する. そこで, $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P$ ($m_i \in \mathbb{Z}$) に付随する $\mathbf{Q}_G$ 上の直線束 $\mathcal{O}(\lambda)$ を, 射影空間 $\mathbb{P}$ 上の直線束 $\boxtimes_{i \in I} \mathcal{O}(m_i)$ の, 埋め込み (1) による引き戻しとして定義する.

1.2 同変 K -群

これまでの準備をもとに, $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ の同変 K -群の定義を復習する. $q \in R(\mathbb{C}^*)$ を loop rotation 作用に関する指標とする. すなわち, $q: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$; $q(a) := a^{-1}$ である. まず群 $K_{\mathbf{I} \rtimes \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$ を

$$K_{\mathbf{I} \rtimes \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G) := \left\{ f = \sum_{\lambda \in P} f_{\lambda} [\mathcal{O}(\lambda)] \mid f_{\lambda} \in \mathbb{Z}[P][[q^{-1}]], \text{ and } f \text{ satisfies } (\#) \right\} / \sim,$$

$$(\#): \sum_{\lambda \in P} |f_{\lambda}| \operatorname{gch} H^0(\mathbf{Q}_G, \mathcal{O}(\lambda + \mu)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[P][[q^{-1}]] \text{ for all } \mu \in P,$$

$$(\sim): f \sim 0 \iff \sum_{\lambda \in P} f_{\lambda} \operatorname{gch} H^0(\mathbf{Q}_G, \mathcal{O}(\lambda + \mu)) = 0 \text{ for all } \mu \gg 0.$$

と定める. ここで, 各 $\nu \in P$ に対し, コホモロジー群 $H^k(\mathbf{Q}_G, \mathcal{O}(\nu))$ ($k \geq 0$) は $(H \times \mathbb{C}^*)$ -加群であり, $\operatorname{gch} H^k(\mathbf{Q}_G, \mathcal{O}(\nu))$ とは $H^k(\mathbf{Q}_G, \mathcal{O}(\nu))$ の $(H \times \mathbb{C}^*)$ -加群としての指標である. また, $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \lambda \in P} m_{k, \lambda} q^{-k} e^{\lambda} \in \mathbb{Z}[P][[q^{-1}]]$ ($m_{k, \lambda} \in \mathbb{Z}$) に対し, $|f| := \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \lambda \in P} |m_{k, \lambda}| q^{-k} e^{\lambda}$ と定めている. なお, $\mu \gg 0$ の定義は省略するが, μ が “十分優整ウェイト” であることを意味している. (ただし, 後に定義する「 S に関して十分優整」とは条件が異なることに注意する.)

続いて $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ の同変 K -群を定義する. 各 $\beta \in Q^{\vee, +} := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^{\vee}$ に対し, 埋め込み $(i_{\beta})_*: K_{\mathbf{I} \rtimes \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G) \rightarrow K_{\mathbf{I} \rtimes \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$ であって, $(i_{\beta})_*([\mathcal{O}(\lambda)]) = q^{(\lambda, \beta)} [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(t_{-w_{\beta}} \beta)} \otimes \mathcal{O}(\lambda)]$ ($\lambda \in P$) が成り立つものが存在する. ただし, w_{β} は G の Weyl 群 W の最長元であり, 各 $\xi \in Q^{\vee} = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i^{\vee}$ に対し, $t_{\xi} \in W_{\text{af}}$ は平行移動元である. すると, 帰納系 $((K_{\alpha})_{\alpha}, (i_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta})$ を, 各 $\alpha \in Q^{\vee, +}$ に対

し $K_\alpha := K_{\mathbf{I} \rtimes \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$, また $\beta - \alpha \in Q^{\vee,+}$ を満たす $\alpha, \beta \in Q^{\vee,+}$ に対し $i_{\alpha,\beta} := (i_{\beta-\alpha})_*$ で定めることができる. $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ の $(\mathbf{I} \rtimes \mathbb{C}^*)$ -同変 K -群 $K_{\mathbf{I} \rtimes \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G^{\text{rat}})$ は, この帰納系 $((K_\alpha)_\alpha, (i_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta})$ の帰納極限として定まる. すなわち

$$K_{\mathbf{I} \rtimes \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}) := \mathbb{Z}[P][[q^{-1}]] \otimes_{\mathbb{Z}[P][[q^{-1}]]} \varinjlim_{\alpha} K_\alpha$$

と定める.

さらに, 本稿で主として扱う同変 K -群を次のように定める. 各 $x \in W_{\text{af}}$ に対し, $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}$ のクラス $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}] \in K_{\mathbf{I} \rtimes \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G^{\text{rat}})$ が定まる. このクラス $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}]$ を半無限 Schubert 類と呼ぶ. $W_{\text{af}}^{\geq 0} := W \times \{t_\xi \mid \xi \in Q^{\vee,+}\} \subset W_{\text{af}}$ とするとき, $\mathbf{Q}_G$ の $(H \times \mathbb{C}^*)$ -同変 K -群 $K_{H \times \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$ は, $\sum_{x \in W_{\text{af}}^{\geq 0}} |f_x| \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[[q^{-1}]] [P]$ を満たすすべての $\sum_{x \in W_{\text{af}}^{\geq 0}} f_x [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}]$ ($f_x \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}][P]$) から成る $K_{\mathbf{I} \rtimes \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G^{\text{rat}})$ の $\mathbb{Z}[q, q^{-1}][P]$ -部分加群として定義される.

1.3 Chevalley 公式と逆 Chevalley 公式

半無限旗多様体 $\mathbf{Q}_G$ の $(H \times \mathbb{C}^*)$ -同変 K -群 $K_{H \times \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$ は, 通常の旗多様体 $G/(HN)$ の量子 K 理論と密接な関係があることが知られている. よって, $K_{H \times \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$ の (テンソル) 積構造を調べることは重要な意義がある.

この構造を調べる手法のひとつとして, Chevalley 公式を記述することが挙げられる. Chevalley 公式とは, 半無限 Schubert 類 $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}]$ と直線束のクラス $[\mathcal{O}(\lambda)]$ のテンソル積 $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)} \otimes \mathcal{O}(\lambda)]$ を, 半無限 Schubert 類 $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(y)}]$ にトーラス H の表現環 $R(H) = \mathbb{Z}[P] \ni e^\mu$ を作用させて得られるクラス $e^\mu \cdot [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(y)}] := [\mathbb{C}_\mu \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(y)}]$ たちの整数係数 (ある種の無限) 一次結合として具体的に表す公式である. すなわち, 以下のような形の等式である.

$$[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)} \otimes \mathcal{O}(\lambda)] = \sum_{\mu \in P, y \in W_{\text{af}}} c_{\mu,y} e^\mu \cdot [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(y)}]$$

ここで, $c_{\mu,y} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ である.

Chevalley 公式についてはこれまで様々な設定で研究され, λ が優整ウェイトのときは [KNS], λ が反優整ウェイトのときは [NOS] でそれぞれ具体的に記述された. また, 優整または反優整とは限らない一般の λ に対する Chevalley 公式も [LNS] で研究されている.

我々の目標は, Chevalley 公式をある種逆に解いた次のような公式 (逆 Chevalley 公式と呼ぶ) を記述することである:

$$e^\mu \cdot [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(y)}] = \sum_{x \in W_{\text{af}}, \lambda \in P} d_{x,\lambda} [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)} \otimes \mathcal{O}(\lambda)],$$

ここで $d_{x,\lambda} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ である.

本研究では, G が A 型で, かつ μ が第 1 基本ウェイト ϖ_1 の W -軌道の元である場合に, 係数 $d_{x,\lambda}$ の具体的な記述を得た. 本稿では, この結果について説明する. なお, G が A 型の場合は, すべての整ウェイト $\mu \in P$ は第 1 基本ウェイト ϖ_1 の W -軌道の元たちの非負整数係数一次

結合として表すことができる．従って，第 1 基本ウェイトの W -軌道に属するウェイトに対して逆 Chevalley 公式を記述することができれば，任意の整ウェイトに対する逆 Chevalley 公式を記述できることに注意する．

2 量子 Bruhat グラフと extremal ウェイト加群

本節では，結果の記述に必要な量子 Bruhat グラフ，および extremal ウェイト加群を導入する．

2.1 量子 Bruhat グラフ

量子 Bruhat グラフは [BFP] において導入された W 上の有向グラフであり，表現論や組合せ論などの様々な場面で現れる．ここでは，その定義を復習し，いくつかの記号を導入する．いま $\rho := (1/2) \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$ とおき，各 $\alpha \in \Delta$ に対応する余ルートを $\alpha^\vee$ と書く．また， ℓ を W の長さ関数とする．

定義 2.1 ([BFP, Definition 6.1]). 次で定まるラベル付き有向グラフを**量子 Bruhat グラフ**と呼び， $\text{QBG}(W)$ と書く．

- 頂点集合 : W
- ラベルの集合 : Δ^+
- 辺 : $x, y \in W$ に対し， $x \xrightarrow{\alpha} y \iff y = xs_\alpha$ かつ
 - (B) $\ell(y) = \ell(x) + 1$ または
 - (Q) $\ell(y) = \ell(x) - 2\langle \rho, \alpha^\vee \rangle + 1$.

量子 Bruhat グラフ $\text{QBG}(W)$ 上のパス $\mathbf{p} : x_0 \xrightarrow{\gamma_1} x_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_s} x_s$ に対し， $\text{wt}(\mathbf{p}) \in Q^{\vee,+}$ を

$$\text{wt}(\mathbf{p}) := \sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ x_{i-1} \rightarrow x_i \text{ is a quantum edge}}} \gamma_i^\vee$$

で定める．各 $x, y \in W$ に対し， x を始点とし， y を終点とする $\text{QBG}(W)$ 上のパス $\mathbf{p}$ が存在する．そこで，そのような $\mathbf{p}$ のうち長さが最小であるものを一つとり， $\text{wt}(x \Rightarrow y) := \text{wt}(\mathbf{p})$ とする．[P, Lemma 1 (2)] より， $\text{wt}(x \Rightarrow y)$ は well-defined に定まる．

2.2 extremal ウェイト加群とその Demazure 部分加群

$\mathfrak{g}_{\text{af}}$ を， G の Lie 代数 $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ から構成される (untwisted) アフィン Lie 代数とし， P_{af} を $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ のウェイト格子とする．また， $U_{\vee}(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ を $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ から構成される $(\mathbb{C}(\vee))$ 上の量子アフィン代数とする． I_{af} を $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ の Dynkin 図形の頂点の集合とし，各 $i \in I_{\text{af}}$ に対する Chevalley 生成元を $F_i, E_i \in U_{\vee}(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ と書く．さらに， $\{F_i \mid i \in I\}$ で生成される $U_{\vee}(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ の部分代数を $U_{\vee}^-(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ と書く．

$U_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ の表現論において重要な役割を果たす加群のひとつが, [K1] で導入された extremal ウェイト加群およびその Demazure 部分加群である. ただし, extremal ウェイト加群の正確な定義は複雑であるため, 本稿では概略にとどめる. 正確な定義については, [K1] を参照していただきたい.

定義 2.2 ([K1, Definition 8.1.1]). M を可積分 $U_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ -加群とする. $\lambda \in P_{\text{af}}$ に対し, 以下の条件を満たす $v \in M$ をウェイト λ の **extremal ウェイトベクトル**と呼ぶ.

1. v はウェイト λ のウェイトベクトルである.
2. ベクトルの族 $\{v_x\}_{x \in W_{\text{af}}} \subset M$ が存在して, 以下を満たす:
 - $v_e = v$
 - 各 $i \in I_{\text{af}}$ に対し, $\langle x\lambda, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ ならば $E_i v_x = 0$ かつ $F_i^{(\langle x\lambda, \alpha_i^\vee \rangle)} v_x = v_{s_i x}$
 - 各 $i \in I_{\text{af}}$ に対し, $\langle x\lambda, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$ ならば $F_i v_x = 0$ かつ $E_i^{(-\langle x\lambda, \alpha_i^\vee \rangle)} v_x = v_{s_i x}$

ただし, 各 $i \in I_{\text{af}}$ および $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, $F_i^{(k)}$ および $E_i^{(k)}$ は $\mathfrak{v}$ -divided power を表す.

定義 2.3 ([K1, Proposition 8.2.2]). $\lambda \in P_{\text{af}}$ とする. 1 つの元 v_λ で生成され, 「 v_λ がウェイト λ の extremal ウェイトベクトルである」という基本関係式によって定義される可積分 $U_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ -加群をウェイト λ の **extremal ウェイト加群**と呼び, $V(\lambda)$ と書く.

続いて, Demazure 部分加群を復習する. $v_\lambda \in V(\lambda)$ は extremal ウェイトベクトルであるから, ベクトルの族 $\{v_x\}_{x \in W_{\text{af}}} \subset V(\lambda)$ であって, 定義 2.2 の条件を満たすようなものが存在する.

定義 2.4 ([K2, Section 2.8]). $\lambda \in P_{\text{af}}$, $x \in W_{\text{af}}$ に対し, $U_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ の **Demazure 部分加群** $V_x^-(\lambda)$ を $V_x^-(\lambda) := U_v^-(\mathfrak{g}_{\text{af}})v_x$ で定める.

Demazure 部分加群は, 次のようなウェイト分解を持つ:

$$V_x^-(\lambda) = \bigoplus_{\gamma \in Q, k \in \mathbb{Z}} V_x^-(\lambda)_{\lambda + \gamma + k\delta},$$

ここで, 各 $\nu \in P_{\text{af}}$ に対し, $V_x^-(\lambda)_\nu$ は $V_x^-(\lambda)$ のウェイト ν に対するウェイト空間であり, 有限次元である. また, δ は null ルートである. そこで, (次数付き) **Demazure 指標** $\text{gch } V_x^-(\lambda)$ を

$$\text{gch } V_x^-(\lambda) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\gamma \in Q} \dim(V_x^-(\lambda)_{\lambda + \gamma + k\delta}) e^{\lambda + \gamma} \right) q^k$$

と定める.

3 Demazure 指標と K 理論の関係

これ以降、 G は A_n 型であるとする。我々の目標は、次のような形の逆 Chevalley 公式を具体的に記述することであった：

$$e^{y\varpi_1} \cdot [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}] = \sum_{w \in W_{\text{af}}, \mu \in P} d_{w,\mu} [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(w)} \otimes \mathcal{O}(\mu)].$$

この公式を記述するために、等式の両辺に現れる層のコホモロジー群を考える。

いま、ある種の関数のなす $\mathbb{C}[q, q^{-1}][P]$ -加群 $\text{Fun}_P(\mathbb{C}((q^{-1}))[P])$ 、およびその $\mathbb{C}[q, q^{-1}][P]$ -部分加群 $\text{Fun}_P^{\text{neg}}(\mathbb{C}((q^{-1}))[P])$ 、商加群 $\text{Fun}_P^{\text{ess}}(\mathbb{C}((q^{-1}))[P])$ を

$$\begin{aligned} \text{Fun}_P(\mathbb{C}((q^{-1}))[P]) &:= \{\Phi : P \rightarrow \mathbb{C}((q^{-1}))[P]\}, \\ \text{Fun}_P^{\text{neg}}(\mathbb{C}((q^{-1}))[P]) &:= \left\{ \Phi \in \text{Fun}_P(\mathbb{C}((q^{-1}))[P]) \mid \begin{array}{l} \text{There exists } \gamma \in P \\ \text{such that } \Phi(\mu) = 0 \text{ for all } \mu \in \gamma + P^+ \end{array} \right\}, \\ \text{Fun}_P^{\text{ess}}(\mathbb{C}((q^{-1}))[P]) &:= \text{Fun}_P(\mathbb{C}((q^{-1}))[P]) / \text{Fun}_P^{\text{neg}}(\mathbb{C}((q^{-1}))[P]) \end{aligned}$$

で定める。このとき、以下の事実が知られている。

命題 3.1 (cf. [KNS, Lemma 5.7]). $\mathbb{Z}[q, q^{-1}][P]$ -加群の単射準同型写像 $\Psi : K_{H \times \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G) \rightarrow \text{Fun}_P^{\text{ess}}(\mathbb{C}((q^{-1}))[P])$ であって、各クラス $[\mathcal{E}] \in K_{H \times \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$ および $\lambda \in P$ に対し

$$(\Psi([\mathcal{E}])(\lambda)) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{gch } H^i(\mathbf{Q}_G, \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(\lambda))$$

が成り立つものが存在する。

よって、逆 Chevalley 公式の考察においては、半無限 Schubert 多様体の構造層 $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}$ のコホモロジー群が重要な役割を果たす。このコホモロジー群については、以下の事実が知られている。

命題 3.2 ([KNS, Corollary 4.30]). 各 $x \in W_{\text{af}}^{\geq 0}$ および $\lambda \in P$ に対し

$$\text{gch } H^i(\mathbf{Q}_G, \mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)} \otimes \mathcal{O}(\lambda)) = \begin{cases} \text{gch } V_x^-(-w_{\circ}\lambda) & \text{if } \lambda \in P^+ \text{ and } i = 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。

注意 3.3. 命題 3.1 および命題 3.2 は、 G が A_n 型でなくても成り立つ。

これらの事実を用いて、逆 Chevalley 公式を Demazure 指標に関する等式に言い換える。 $S \subset W_{\text{af}} \times P$ を有限集合とする。 $\lambda \in P^+$ は、次の条件 (SD) を満たすとき S に関して十分優整であると呼ぶ。

(SD) $(w, \mu) \in S$ となる $w \in W$ が存在するような任意の $\mu \in P$ に対し $\lambda + \mu \in P^+$

命題 3.1, および命題 3.2 の系として, 以下が従う.

系 3.4. $x, y \in W$ とし, 有限集合 $S \subset W_{\text{af}} \times P$ と族 $\{d_{w,\mu}\}_{(w,\mu) \in S} \subset \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ を固定する. このとき, 次の 1. と 2. は同値である.

1. 等式

$$e^{y\varpi_1} \cdot [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}] = \sum_{(w,\mu) \in S} d_{w,\mu} [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(w)} \otimes \mathcal{O}(\mu)]$$

が成り立つ.

2. S に関して十分優整である $\lambda \in P^+$ に対し, 等式

$$e^{y\varpi_1} \text{gch } V_x^-(-w_\circ \lambda) = \sum_{(w,\mu) \in S} d_{w,\mu} \text{gch } V_w^-(-w_\circ (\lambda + \mu))$$

が成り立つ.

ゆえに, 系 3.4 の 2. が成り立つような有限集合 $S \subset W_{\text{af}} \times P$ と族 $\{d_{w,\mu}\}_{(w,\mu) \in S} \subset \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ を求めることが目標となる.

4 逆 Chevalley 公式

本節では, 主結果である逆 Chevalley 公式の記述について述べる. 本節において, 単純ルート α_k ($k = 1, \dots, n$) に対する単純鏡映を $s_k := s_{\alpha_k}$ と書く.

まず, $k = 0, 1, \dots, n$ に対し, $y_k := s_k \cdots s_1 \in W$ と定める. このとき, ϖ_1 の安定化群 $W_{\varpi_1} = \{w \in W \mid w\varpi_1 = \varpi_1\}$ による W の商 W/W_{ϖ_1} において, その minimal coset representative の全体の集合を W^{ϖ_1} と書くと, $W^{\varpi_1} = \{e = y_0, y_1, \dots, y_n\}$ が成り立つ.

続いて, $1 \leq i < j \leq n$ である $i, j \in I = \{1, \dots, n\}$ に対し, $\alpha_{i,j} := \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_j$ と定める. すると, G の正ルート全体の集合 Δ^+ は $\Delta^+ = \{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ と記述される. いま, Δ^+ 上の全順序 $\triangleleft_k$ ($k = 1, \dots, n$) を

$$\underbrace{\cdots \triangleleft_k \alpha_{k,n} \triangleleft_k \alpha_{k,n-1} \triangleleft_k \cdots \triangleleft_k \alpha_{k,k}}_{\langle y_{k-1}\varpi_1, -^\vee \rangle \neq 1}$$

となるような reflection order として定める. ここで, Δ^+ 上の全順序 $\triangleleft$ は, 次の条件 (RO) を満たすとき **reflection order** であるという:

(RO) 各 $\alpha, \beta \in \Delta^+$ に対し, $\alpha + \beta \in \Delta^+$ ならば $\alpha \triangleleft \alpha + \beta \triangleleft \beta$ または $\beta \triangleleft \alpha + \beta \triangleleft \alpha$ のいずれかが成り立つ.

そして, $w \in W$ および $k = 1, \dots, n$ に対し, 集合 $\mathbf{DP}_w^{\triangleleft_k}$ を $\text{QBG}(W)$ における次の形のパス $\mathbf{p}$ 全体からなる集合として定義する:

$$\mathbf{p} : w = w_0 \xrightarrow{\alpha_{k,j_1}} w_1 \xrightarrow{\alpha_{k,j_2}} \cdots \xrightarrow{\alpha_{k,j_r}} w_r, \quad n \geq j_1 \geq \cdots \geq j_r \geq k.$$

以下, $x, y \in W$ を固定し, 整数 $m = m(x, y)$ を $x^{-1}y\varpi_1 = y_m\varpi_1$ が成り立つようにとる. $k = 0, \dots, m$ に対し, 集合 $\mathbf{S}_k$ を $\text{QBG}(W)$ における次の形のパス全体からなる集合として定義する:

$$\mathbf{p}: x = x_0 \xrightarrow{\alpha_{i_1+1, i_0}} x_1 \xrightarrow{\alpha_{i_2+1, i_1}} \dots \xrightarrow{\alpha_{i_p+1, i_{p-1}}} x_p, \quad m = i_0 > i_1 > \dots > i_p = k.$$

すると, 上記の形の $\mathbf{p}$ は減少列 $(i_0, \dots, i_p)$ と同一視できる. この同一視により, $\mathbf{S}_k$ は辞書式順序による全順序集合とみなせる. そこで, $\mathbf{S}_k$ の辞書式順序による最小元 $\min(\mathbf{S}_k)$ をとり, そのパスとしての終点 $\text{end}(\min(\mathbf{S}_k))$ を $v_k(x)$ と書く.

以上の準備をもとに, 本研究の主結果である逆 Chevalley 公式の記述を述べる.

定理 4.1 (K.-Naito-Orr-Sagaki). 全ての $0 \leq k \leq m$ に対して $\lambda + y_k\varpi_1 \in P^+$ であるような $\lambda \in P^+$ に対し, 次の等式が成り立つ:

$$e^{y\varpi_1} \text{gch } V_x^-(\lambda) = \sum_{k=0}^m q^{\langle y_k\varpi_1, \text{wt}(x \Rightarrow v_k(x)) \rangle} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbf{DP}_{v_k(x)}^{\leq k+1}} (-1)^{\ell(\mathbf{p})} \text{gch } V_{\text{end}(\mathbf{p})}^-(\lambda + y_k\varpi_1). \tag{2}$$

注意 4.2. 等式 (2) の右辺は有限和である.

系 3.4 より, 以下が従う.

系 4.3 (K.-Naito-Orr-Sagaki). 各 $x, y \in W$ に対し, 次の等式が成り立つ:

$$e^{y\varpi_1} \cdot [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}] = \sum_{k=0}^m q^{\langle y_k\varpi_1, \text{wt}(x \Rightarrow v_k(x)) \rangle} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbf{DP}_{v_k(x)}^{\leq k+1}} (-1)^{\ell(\mathbf{p})} [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(\text{end}(\mathbf{p}))} t_{\text{wt}(x \Rightarrow v_k(x)) + \text{wt}(\mathbf{p})} \otimes \mathcal{O}(-w_0 y_k\varpi_1)].$$

謝辞

RIMS 共同研究「組合せ論的表現論の最近の進展」にて貴重な講演の機会を頂き, ありがとうございました. また, 共同研究者である内藤聡氏, Daniel Orr 氏, 佐垣大輔氏に感謝申し上げます. なお, 本研究において筆者は JSPS 科研費 20J12058 の助成を受けています.

参考文献

[BFP] F. Brenti, S. Fomin, and A. Postnikov, Mixed Bruhat operators and Yang-Baxter equations for Weyl groups, *Int. Math. Res. Not.* **1999** (1999), 419–441.
 [K1] M. Kashiwara, Crystal bases of modified quantized enveloping algebra, *Duke Math. J.* **73** (1994), no. 2, 383–413.

- [K2] M. Kashiwara, Level zero fundamental representations over quantized affine algebras and Demazure modules, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 223–250.
- [KNS] S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, Equivariant K -theory of semi-infinite flag manifolds and the Pieri-Chevalley formula, *Duke Math. J.* **169** (2020), no. 13, 2421–2500.
- [LNS] C. Lenart, S. Naito, and D. Sagaki, A Chevalley formula for semi-infinite flag manifolds and quantum K -theory, [arXiv:2010.06143](https://arxiv.org/abs/2010.06143).
- [NOS] S. Naito, D. Orr, and D. Sagaki, Chevalley formula for anti-dominant weights in the equivariant K -theory of semi-infinite flag manifolds, [arXiv:1808.01468](https://arxiv.org/abs/1808.01468).
- [O] D. Orr, Equivariant K -theory of the semi-infinite flag manifold as a nil-DAHA module, [arXiv:2001.03490](https://arxiv.org/abs/2001.03490).
- [P] A. Postnikov, Quantum Bruhat graph and Schubert polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), no. 3, 699–709.