

遷移における形の選択

和歌山大学・教育 水島二郎 (Jiro Mizushima)

1. はじめに

流れの線形安定性理論や弱非線形安定性理論によれば、パラメータ（レイノルズ数・レイリー数など）がある値を越えると1つまたは2つ以上のモード（ある波数を持つ波またはある空間形を持つ流体運動）が不安定となり、さらにパラメータが大きくなると複数個または無限個のモードが不安定となる。これまでの線形または弱非線形安定性理論では不安定となった複数個のモードのうちどのモードが実際に現れるのかを示すことは困難であった。実際に実験で現れるモードを理論的に特定しようとする試みは主に、あるモードの平衡解に対する変調不安定性を調べる方法、モード間の非線形相互作用、平衡解に対する（3次元）微小攪乱による不安定性の3つの方法で行われている。

現在、スチュワートソン・スチュアート方程式またはギンツブルグ・ランダウ方程式と呼ばれている変調不安定性を記述する振幅方程式は Stewartson & Stuart (1971), Taniuti & Washimi (1968), DiPrima, Echhaus & Segel (1971) によって導き出された。この方程式によれば、テイラー・クエット流、ベナール対流、鉛直流体層中の熱対流など定在波攪乱による不安定が起こる流れにおいて実際に現れるモードは臨界波数を中心として線形不安定（波数）領域の $1/\sqrt{3}$ に限定されることが示されている。すなわち、臨界波数を中心として線形不安定（波数）領域の $1/\sqrt{3}$ の外側にあるモードは変調不安定性によりその内側のモードに移り変わってしまうと考えられている。さらに詳しい議論は最近 Proctor (1991) によって行われた。また、T-S 波による不安定が起こる一般の流れにおいてはニューウェルの判別条件により安定となるモードだけが実際には現れる。

平板境界層や平面ポワズイユ流において見いだされたピーク・バレー構造 (Klebanoff, Tidstrom & Sargent, 1962) の形成される機構については Stuart (1962), Itoh (1980), Herbert & Markovin (1980) らによって理論的に調べられた。彼らはこの構造を2次元波と3次元波との相互作用で説明し、2次元波と3次元波の振幅に対する連立振幅方程式を導いた。ノイズレベルが低いときに観測される互い違い構造 (Saric & Thomas, 1984) については Craik (1971) によって3波の共鳴での説明が提案され、3つの波の振幅に対する連立方程式が導かれた。これに対し、Herbert (1984) は Craik の理論ではスパン方向の波長が実験と合わないとして T-S 波の2次不安定で説明されるべきであるとした。

テイラー・クエット流の弱非線形安定性は Davey (1962), DiPrima & Eagles (1977), Herbert (1981) によって調べられ、さらにその平衡解の変調不安定性は Kogelman & DiPrima (1970), Li (1986) により調べられた。Meyer-Spache & Keller (1985), Li (1986) は軸対称な攪乱の平衡解を計算し、不安定領域の中でも平衡解が存在しない領域があることを示し、さらにこの現象は高調波共鳴で説明できるとして、基本波とその高調波の振幅に対する連立振幅方程式を導いた。これは、Fujii, Mimura & Nishiura (1982) により生態系のパターン形成において導かれた式と同じであり、Fujimura & Mizushima (1987) により鉛直流体層の熱対流において導かれた式とも同一の形である。テイラー渦のヒステリシスについては Benjamin (1978a, b) や Benjamin & Mullin (1982), Mullin (1982) により実験的および理論的に調べられた。Stuart & DiPrima (1978) はその理論的な説明を試み、偶・奇両モードの振幅に対する連立方程式を導いた。この方程式は Mizushima & Gotoh (1979) が0次との共鳴で導いた振幅方程式と同じ形をしている。カオスの発生と乱流への遷移について

は実験的に Fenstermacher, Swinney & Gollub (1979) によって調べられ、モデルを用いた数値実験は Yahata (1981) により行われた。

鉛直流体層中の熱対流の平衡解は Nagata & Busse (1983), Mizushima & Saito (1987), Mizushima (1990) によって調べられ、テイラー・クエット流と同様に線形不安定領域において平衡解が存在しない領域のあることが示された。この現象は基本波と高調波の共鳴により説明できることが Fujimura & Mizushima (1987) によって示され、基本波と高調波に対する連立振幅方程式が導かれた。また、Fujimura & Mizushima (1991) は一対の T-S の非線形相互作用、定在波と T-S 波の非線形相互作用を連立振幅方程式を用いて調べた。

ベナール対流における 2 次元ロール解の安定性は Schlüter, Lortz & Busse (1965), Busse (1967), Clever & Busse (1974), Busse & Clever (1979) によって調べられ、ジグザグモード・クロスロールモード・エックハウス・振動・ノット・スキュードバリコスなどの不安定性が存在することがわかった。Mizushima & Fujimura (1991) は 2 次元ロール解の平衡振幅分布を詳しく調べることににより、鉛直流体層中の熱対流と同様に線形不安定領域中で平衡振幅の存在しない領域があることを示した。ただし、この場合は鉛直流体層中の熱対流などと異なり、基本波と第 2 高調波との非線形共鳴で説明できることが示された。ベナール対流中に発生するカオスや乱流への遷移については Gollub & Benson (1980), Ahlers & Behringer (1978), Libchaber, Fauvre & Laroche (1983) などにより実験的に、Curry (1978), Yahata (1983) により数値実験的に詳しく調べられた。

これまで述べてきたように、流れの不安定性におけるモード間の非線形相互作用は振幅方程式を用いて調べられてきた。特に、安定性の交代 (Exchange of Stability) が成り立つテイラー・クエット流、鉛直流体層中の熱対流、ベナール対流においてはモード間の非線形共鳴が攪乱の発達に対して重要な役割を果たし、その結果実際に実験で現れうるモードを限定することがわかった。これらの流れについて導かれた非線形共鳴を表す振幅方程式は二つの定在波攪乱が同時に不安定になるときは $O(2)$ 対称性を仮定するだけで、より一般的に導かれることが Dangelmayr (1986), Dangelmayr & Armbruster (1986) によって示された。

ここでは連続的な波数を持つ無限個のモードの非線形相互作用のモデルとして有限個のモードの振幅に対するモデル方程式をつくり、このモデル方程式を用いて層流の遷移について実験的に見いだされている事柄がどの程度説明できるかを調べることにする。すなわち、(1) 複数のモードが線形不安定であるとき成長するモードの選択のメカニズムは何か? (2) パラメータ (レイノルズ数など) が変化すると成長するモードはどのように変化するのか? (3) 非線形共鳴により線形安定なモードの概念が変わること (4) 振幅のカオス的な振舞いと連続スペクトルの発生などを中心に調べる。今回は取り扱わないが、ヒステリシス現象の説明もこのモデルで説明できることが期待される。取り扱う流れは平面ポアズイユ流、鉛直平板間の流体中に発生する熱対流、ベナール対流、テイラー・クエット流などを念頭におくこととする。

2. モデル方程式

これから取り扱う流体系の線形安定性を図 1 で示す。図 1 には各波数を持つモードの線形増幅率 α_c がいくつかのレイノルズ数に対して描かれている。臨界レイノルズ数 R_c は 1 に、臨界波数 α_c も 1 に規格化されている。簡単のためにレイノルズ数が 1 よりも大きくなっても最大増幅モードは常に $\alpha = 1$ のモードであると仮定した。 $R \leq 10$ の範囲では不安定なモードは $\alpha \leq 2$ の範囲に入っている。

無限に広がった系を考えるので波数は 0 から無限に大きい値まで連続的にとることがで

きるが、モデルとして有限の波数領域 $0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}$ の範囲にあるモードだけを考え、この波数領域を N 等分して波数 $\Delta\alpha \times n$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) を持つ $N+1$ 個のモードのみを取り扱うことにする。ここで、 $\Delta\alpha = \alpha_{max}/N$ である。流体力学の基礎方程式から次の形の振幅方程式を振幅展開の方法により導くことができる。

$$\frac{dA_n}{dt} = a_n A_n + \sum_p f_{np} A_{n-p} A_p + \sum_{p,q} g_{npq} A_{n-p-q} A_p A_q, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

ここで、いくつかの注意が必要である。中心多様体定理によれば、系は不安定モードの振幅だけで記述でき、安定モードの振幅は不安定モードの振幅と関数関係で結ばれている。しかし、ここでは特に安定モードの振幅も方程式 (1) で支配されているとしている。このような取扱は乱流の数値シミュレーションではよく行われる方法であり、特に問題はないものと思われる。減衰モードの振幅の時間変化を (1) の形で表すときに問題となるのは波数 $\alpha = 0$ をもつモードとの共鳴の問題である。ここでは A_0 も独立な変数であるとするによりこの困難を避けている。しかし、現実に流体方程式から方程式 (1) の係数 f_{np} , g_{npq} を計算するときには、 $\alpha = 0$ のモードは普通 $1/R$ の間隔で固有値が密集しているため数値計算においては困難があることが予想される。ただし、ベナール対流においては $\alpha = 0$ のモードの固有値は P_r (P_r はプラントル数) の間隔で分布しているため特に小さい値の P_r を考えない限り大きな問題とはならない。方程式 (1) ではすべてのモードが非線形共鳴を行っている。このような共鳴はテイラー・クエット流や鉛直平板間の熱対流では可能であるが、ベナール対流では鉛直方向の対称性のため $1:3:5:7\dots$ の共鳴だけが可能である。方程式 (1) の係数は定在波攪乱に対しては実数であり、TS 波攪乱については複素数となるがここではすべて実数であるとする。すなわち、 A_n は複素振幅の絶対値であるということにする。また、TS 波攪乱については一般には非線形共鳴が起こらず、 $f_{np} \equiv 0$ であり、 $p+q \neq 0$ である p, q に対しては $g_{npq} \equiv 0$ である。

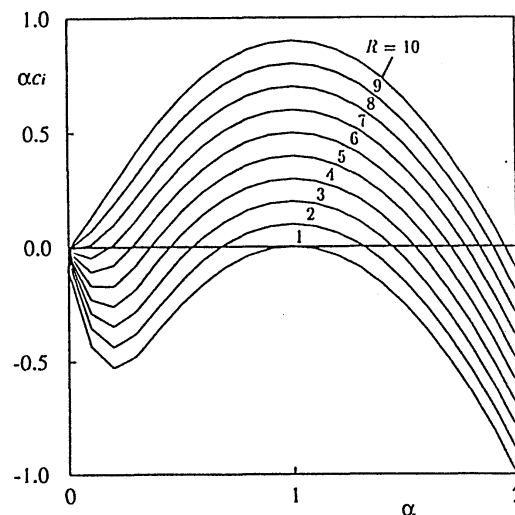


図1. 今回用いたモデル系の線形増幅率.

3. 非共鳴モデル

この節では、モデル方程式 (1) において係数 $f_{np} \equiv 0$ 、 $p+q \neq 0$ に対しては $g_{npq} \equiv 0$ の特別な場合について調べることにする。前節で述べたようにこれは TS 波攪乱の複素振幅の絶対値に対する方程式に相当している。このとき方程式 (1) は

$$\frac{dA_n}{dt} = a_n A_n + \sum_p d_{np} A_p^2 A_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

となる。ここで、 A_0 は $A_n, n = 1, 2, \dots, N$ の時間発展に影響しないものと仮定する。

方程式 (2) 式の定常解は単一モード解と混合モード解がある。単一モード解は $A_{neq} = \sqrt{-a_n/d_{nn}}$ となる。この単一モード解は自分自身のゆらぎに対しては常に安定であるが $q \neq n$ であるモード q のゆらぎに対しては $a_q < a_n \times d_{qn}/d_{nn}$ のとき安定であり、 $a_q > a_n \times d_{qn}/d_{nn}$ のとき不安定である。このことから、もし d_{np} が q に依存せずに一定であるならば線形増幅率が最大のモードだけが安定に残り、それ以外のモードは不安定になり、そのエネルギーは線形増幅率最大のモードに吸収されてしまうことが想像できる。 d_{np} が q に依存して変化するときでも比 d_{qn}/d_{nn} が 1 に近いときには線形増幅率最大のモードを含んでその周りのモードが生き残り、それ以外のモードは不安定になって、減衰してしまう。

混合モード解は d_{np} が n と p に依存しないで一定の時には存在しないが、一定でないときには存在する。混合解が存在する条件は d_{np} がつくる行列の行列式が正則であることである。混合モード解の安定条件は簡単に書き下すことができるが、その物理的解釈は簡単ではないのでここでは議論を行わないことにする。

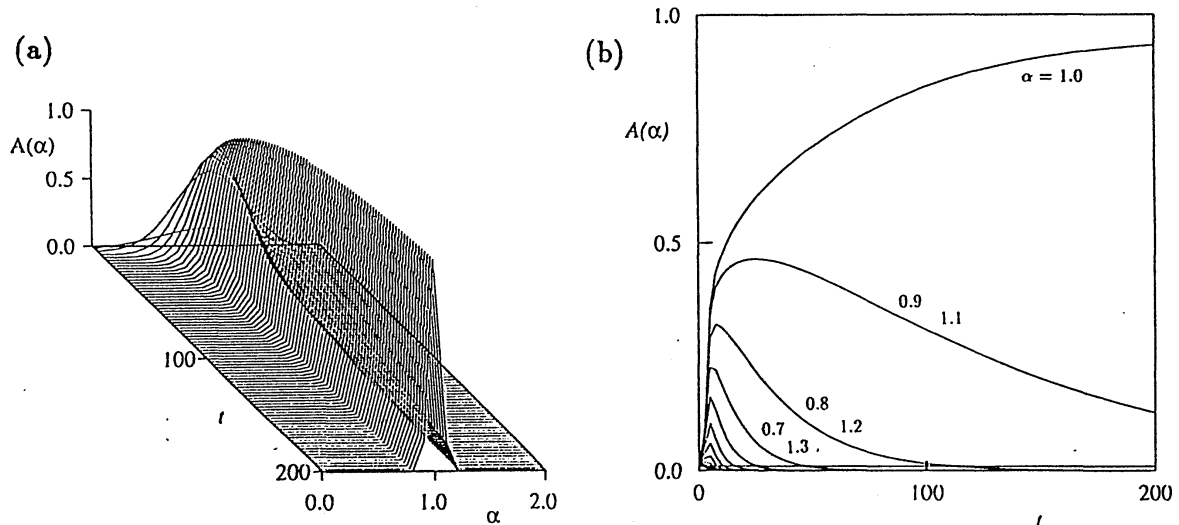


図 2. 非線形共鳴がないときの振幅の時間発展。 $R = 10, d_{np} \equiv -1.0$.

方程式 (2) を初期値問題として数値的に解く。 $\alpha_{max} = 2.0, N = 20$ とする。 α のきざみ $\Delta\alpha$ は 0.1 である。線形増幅率 a_n は図 1 に示したものをを用い、ランダウ係数に相当する係数 d_{np} は最も簡単な場合として $d_{np} \equiv -1.0$ を用いることにする。初期条件は $A_n = 0.01$ ($n = 1, 2, \dots, N$) とした。 $R = 10$ の場合の結果を図 2(a) に示す。この図で $A(\alpha) = A_n, \alpha = n \times 0.1$ である。図から分かるように初めは ($t \leq 5$) 各モードはそれぞれの持つ線形増幅率に従って増幅するが振幅が大きくなると非線形効果によって、より増幅率の大きいモードによりその成長が抑えられ、最大増幅率を持つモード以外は減衰させられ

てしまう。その結果充分時間が経ったのちには最大増幅モードのみが生き残り他のモードは減衰してしまう。この結果は線形安定性理論では複数個のモードが不安定であるが、実験ではある波数のモードが現れることが多い理由の説明になっている。また、この結果は上の単一モードの安定性から想像できる結果ともよく一致している。同じ結果を横軸に時間をとって違う角度から書き直したのが図 2(b) である。この図と図 2(a) を見比べると、最大増幅モードは時間と共に平衡振幅に近づいており、それ以外のモードは減衰していることがわかる。

ランダウ係数 d_{np} だけを $d_{nn} = -1.0$, $d_{np} = -0.8$ ($n \neq p$) と変えて数値シミュレーションを行った結果を図 3(a) に示す。このときにも初期は各モードの線形増幅率にしたがって成長しているが、時間が経つと最大増幅モードを中心としてあるバンドの幅の中に入ったモードが成長しそれ以外のモードは減衰していくことがわかる。横軸に時間をとった図を図 3(b) に示す。この図から生き残るモードは 5 つであることがわかる。この場合にはある 1 つの波数を持ったモードだけが生き残るのではないのである波数の波をキャリアとしてその波が変調した空間パターンが現れることを示している。

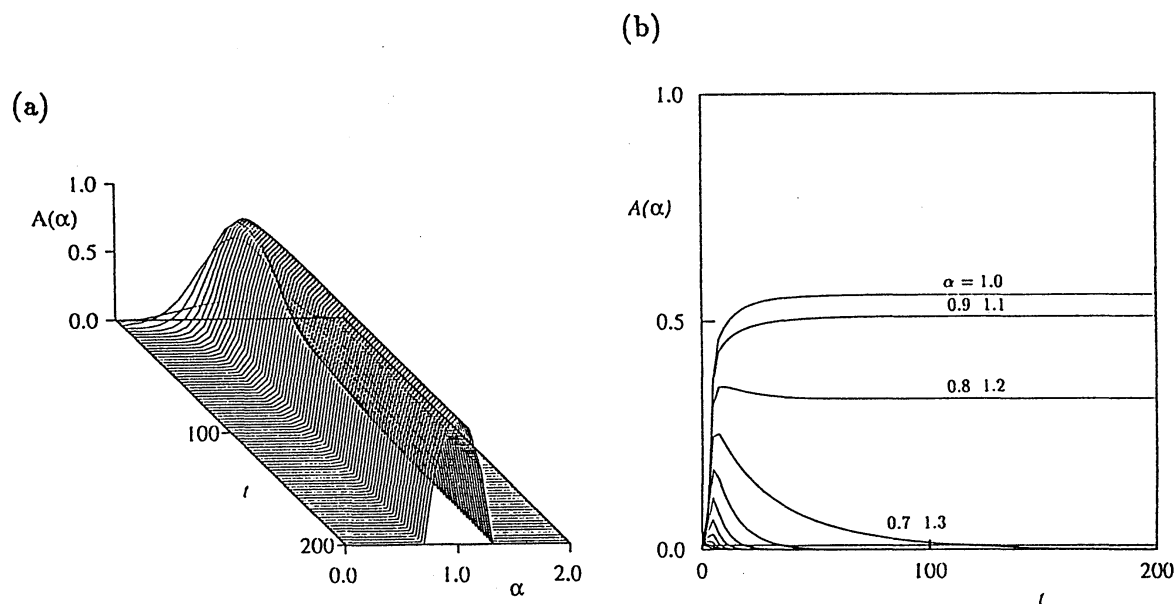


図 3. 非線形共鳴がないときの振幅の時間発展. $R = 10$, $d_{nn} = -1.0$, $d_{np} = -0.8$ ($n \neq p$).

4. 完全共鳴モデル

この節では全てのモードが共鳴をする場合を取り扱う。ただし、2次の非線形相互作用はすべて取り入れるが、3次の非線形項は前節と同様 $A_p^2 A_n$ の形の項のみを取り入れ、それ以外の3次の非線形項は重要でないと仮定する。このとき方程式(1)は次のように書き換えることができる。

$$\frac{dA_n}{dt} = a_n A_n + \sum_{p=1}^{N-n} b_{np} A_p A_{n+p} + \sum_{p=1}^{[n/2]} c_{np} A_p A_{n-p} + \sum_{p=1}^N d_{np} A_p^2 A_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

ここでも、 A_0 は他のモードの発展に影響を与えないものと仮定した。

このような方程式系で表される流体系では線形安定性という概念を少し変更する必要があることを指摘しておこう (Li, 1986)。図4にここで用いているモデルの中立安定曲線を示す。普通の意味での中立曲線は一番右側の曲線だけである。この図から臨界点が $R_c = 1.0$, $\alpha_c = 1.0$ であることがわかる。この曲線を $1/2, 1/3, \dots, 1/100$ に横方向に縮めた曲線を重ね合わせて描いてある。普通、一番右側の曲線の内側にある点はすべて不安定なモードを表している。ところが、ここで扱っているようにすべてのモードが共鳴をしているときには、もとの中立曲線を横に $1/2$ に縮めた曲線の内側にあるときにはたとえその点が元の中立曲線の外側にあってもその点に対応するモードはどんなに振幅が小さくてもやがて系を不安定にしてしまうのである。なぜなら、そのモードは直ちに2倍波数のモードを励起し、その2倍波数のモードは通常の意味で線形不安定なので成長し、元の流れから2次流れへと変えてしまうのである。同様に、元の中立曲線を $1/3, 1/4, \dots$ した曲線の内側にある点に対応するモードもすべて線形不安定と呼ぶことができる。すなわち、これらの曲線の縫絡線の上方の点がすべて線形不安定であるといえる。実験においては元の中立曲線の外側の点に相当するモードのノイズは入っていても構わないとされていたが非線形共鳴を行う系ではこのようなノイズも入ることが許されないのである。

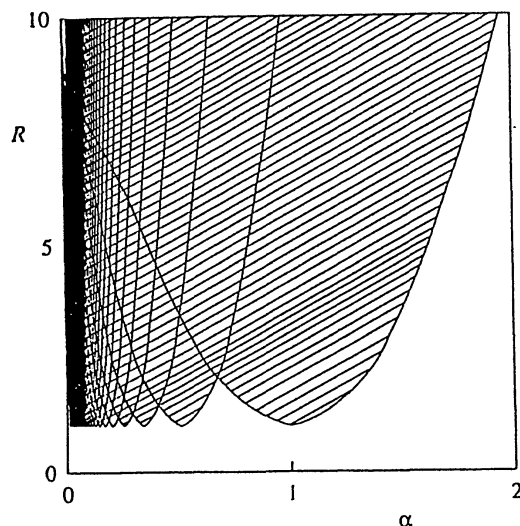


図4. 2次の共鳴があるときの非線形安定性の解釈。斜線を引いた領域が線形不安定であると解釈できる。

次に、方程式 (3) を初期値問題として数値的に解く。前節と同様に $\alpha_{max} = 2.0$, $N = 20$ とする。また、ランダウ係数に相当する係数 d_{np} は最も簡単な場合として $d_{np} \equiv -1.0$ を用いる。共鳴項の係数を $b_{np} = -0.1$, $c_{np} = 0.1$ とし、初期条件を $A_1 = 0.01$, $A_n = 0.0$ ($n = 2, 3, \dots, N$) にとり、 $R = 10$ とした場合の結果を図 5 に示す。この図から初めは A_1 から他のモードにエネルギーが移り、その後複雑な相互作用を行った後、 $\alpha = 1.0$ のモードだけが生き残り、他のモードは全て減衰していることがわかる。

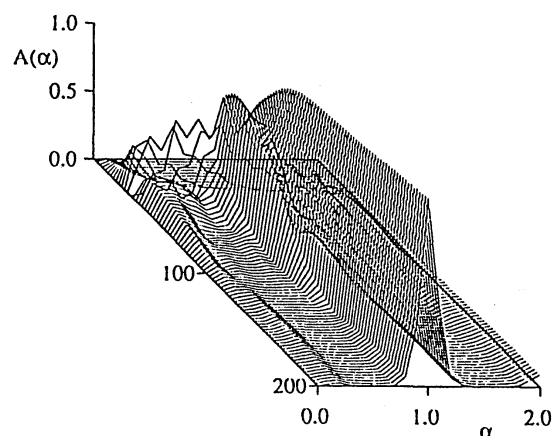


図 5. 非線形共鳴があるときの振幅の時間発展. $R = 10$, $b_{np} = -0.1$, $c_{np} = 0.1$.

共鳴項の係数を $b_{np} = -0.3$, $c_{np} = 0.3$ とし、初期条件を $A_n = 0.01$ ($n = 1, 2, 3, \dots, N$) にとり、 $R = 10$ とした場合には図 6 に示すようになる。この場合には周期解に近づいているように見えるが、まだ詳しい解析は行っていないので結論は言えない。

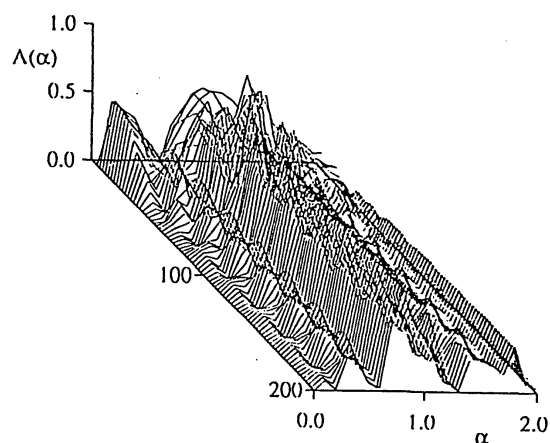


図 6. 非線形共鳴があるときの振幅の時間発展. $R = 10$, $b_{np} = -0.3$, $c_{np} = 0.3$.

さらに共鳴項の係数を大きくし、 $b_{np} = -0.5, c_{np} = 0.5$ としたときの結果を図7に、またこのときの攪乱のエネルギーの変化を図8に示す。共鳴項の係数が大きくなると解はカオス的になっている。この解が本当にカオス的であるのか、カオスであるとすればその性質はどのような性質であり、そのストレンジアトラクターの次元は幾らであるかなど解析を行う必要があるが、まだそれらの解析は行っていないので他の機会に述べることにする。

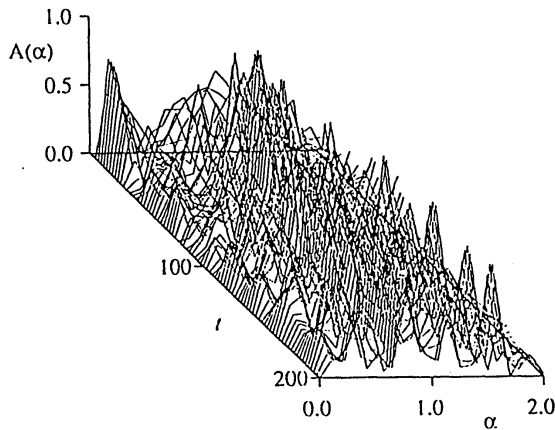


図7. 非線形共鳴があるときの振幅の時間発展.
 $R = 10, b_{np} = -0.5, c_{np} = 0.5$.

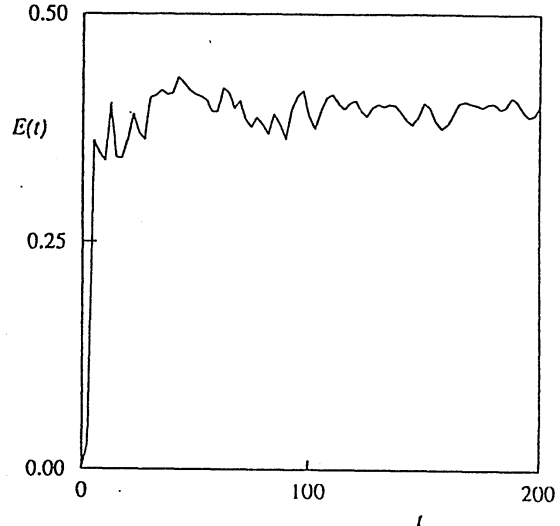


図8. 非線形共鳴があるときの攪乱エネルギーの時間発展.
 $R = 10, b_{np} = -0.3, c_{np} = 0.3$.

5. まとめと問題点

ここでは、2つ以上のモードが同時に不安定となる場合について振幅方程式のモデルをつくり、そのモデルの性質を簡単に調べた。その結果、いくつかのモードが同時に線形不安定であるとき、生き残るモードの選択のメカニズムが明らかになった。しかし、このモデルがモードの選択を調べるのに最も適しているかどうかまだ検討の余地がある。さらに、今回はこのモデルの持つ性質についてまだ十分に調べ尽くしてはいない。特に、解がカオス的な性質を持つときの検討が不十分である。

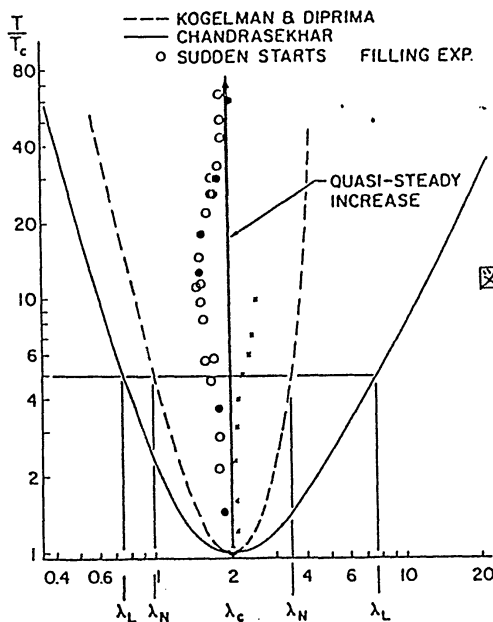


図9. テイラー・クエット流の実験で見いだされる波の波長.
Burkhalter & Koschmieder (1974) より.

ここで提案したモデルを改良してさらに多くの遷移の問題を調べることができる。たとえば、ヒステリシス現象の説明、遷移におけるランダムネスの発生のメカニズム、遷移における連続スペクトルの発生のメカニズムなどが考えられる。また、実験を行うときの条件により出現する形が違ふことがある。Burkhalter & Koschmieder が行ったテイラー・クエット流の実験結果を図9に示す。ゆっくりと内側の円筒の回転数を高くして行くと臨界モード（波長 $\lambda = 2.0$ ）が成長し、突然回転を始めると波長の小さいモードが成長する。内側の円筒と外側の円筒の間に流体を少しずつ満たす場合には長い波長のモードが選ばれるという結果を得ている。

References

- G. Ahlers and R.P. Behringer (1978) Evolution of turbulence for the Rayleigh-Bénard instability, *Phys. Rev. Lett.* **40**, pp712-719.
- T.B. Benjamin (1978) Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid. I. Theory, *Proc. R. Soc. Lond.* **A359**, pp1-26.
- T.B. Benjamin (1978) Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid. II. Experiment, *Proc. R. Soc. Lond.* **A359** pp27-43.
- T.B. Benjamin and T. Mullin (1982) Notes on the multiplicity of flows in the Taylor experiment, *J. Fluid Mech.* **121**, pp.219-230.
- J.E. Burkhalter (1975) Steady supercritical Taylor vortices after sudden starts, *Phys. Fluids* **46**, pp140-150.
- F.H. Busse (1967) On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below, *J. Math. and Phys.* **46**, pp140-150.
- F.H. Busse and R.M. Clever (1979) Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl number, *J. Fluid Mech.* **91**, pp319-335.
- R.M. Clever and F.H. Busse (1974) Transition to time-dependent convection, *J. Fluid Mech.* **65**, pp625-645.
- A.D.D. Craik (1971) Nonlinear resonant instability in boundary layers, *J. Fluid Mech.* **50**, pp393-413.
- J.H. Curry (1978) A generalized Lorenz system, *Comm. Math. Phys.* **60**, pp193-204.
- G. Dangelmayr (1986) Steady-state mode interactions in the presence of $O(2)$ -symmetry, *Dynam. Stab. Syst.* **1**, 159-185.
- G. Dangelmayr & D. Armbruster (1986) Steady-state mode interactions in the presence of $O(2)$ -symmetry and in non-flux boundary value problems, *Contemporary Math.* **56**, 53-67.
- A. Davey (1962) The growth of Taylor vortices in flow between rotating cylinders, *J. Fluid Mech.* **14**, pp.336-368.

- R.C. DiPrima and P.M. Eagles (1977) Amplification rates and torques for Taylor-vortex flows between rotating cylinders, *Phys. Fluids* 20, pp.171-175.
- R.C. DiPrima, W. Eckhaus and L. Segel (1971) Nonlinear wave-number interaction in near-critical two-dimensional flows, *J. Fluid Mech.* 49, pp.705-744.
- P.R. Fenstermacher, H.L. Swinney and J.P. Gollub (1979) Dynamical instabilities and the transition to chaotic Taylor vortex flow, *J. Fluid Mech.* 94, pp.103-128.
- H. Fujii, M. Mimura and Y. Nishiura (1982) A picture of the global bifurcation diagram in ecological interacting and diffusing systems, *Physica* 5D, pp.1-42.
- K. Fujimura and J. Mizushima (1987) Nonlinear interaction of disturbances in free convection between vertical parallel plates, in *Nonlinear Interactions in Fluids* (ed. R.W. Miksad et al.), pp.123-130.
- K. Fujimura and J. Mizushima (1991) Nonlinear equilibrium solutions for travelling waves in a free convection between vertical parallel plates, *Eur. J. Mech., B/Fluids* 10, pp.25-30.
- J.P. Gollub and S.V. Benson (1980) Many routes to turbulent convection, *J. Fluid Mech.* 100, pp.449-470.
- T. Herbert (1981) Numerical studies on nonlinear hydrodynamic stability by computer extended perturbation series, in *7th Internat. Conf. Num. Methods in Fluid Dyn.* (eds. W.C. Reynolds and R.W. MacCormack, Springer), p.200.
- T. Herbert (1984) Modes of secondary instability in plane Poiseuille flow, in *Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids, Proc. IUTAM Symp., Kyoto* (ed. T. Tatsumi, North Holland), pp.53-58.
- T. Herbert and M.V. Markovin (1980) Dialogue on bridging some gaps in stability and transition research, in *Laminar-Turbulent Transition: Proc. IUTAM Symp., Stuttgart* (ed. R. Eppler and H. Fasel, Springer), pp.47-72.
- N. Itoh (1980) Three-dimensional growth of finite wave disturbances in plane Poiseuille flow, *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.* 23, pp.91-103.
- P.S. Klebanoff, P.S. Tidstrom and L.M. Sargent (1962) The three-dimensional nature of boundary-layer instability, *J. Fluid. Mech.* 12, pp.1-34.
- S. Kogelman and R.C. DiPrima (1970) Stability of spatially periodic supercritical flows in hydrodynamics, *Phys. Fluids* 13, pp.1-11.
- R. Li (1986) Analysis for Taylor vortex flow, *Ph.D.thesis, Virginia Polytechnic Institute*.
- R. Libchaber, S. Fauvre and C. Laroche (1983) Two-parameter study of the routes to chaos, *Physica* 7D, pp.83-84.
- R. Meyer-Spasche and H.B. Keller (1985) Some bifurcation diagrams for Taylor vortex flows in finite-length geometries, *Phys. Fluids* 141, pp.1248-1252.
- J. Mizushima (1990) Equilibrium solution of the secondary convection in a vertical fluid layer between two parallel plates, *Fluid Dynamics Research* 5, pp.289-299.
- J. Mizushima and K. Fujimura (1991) Higher harmonic resonance of two-dimensional disturbances in Rayleigh-Bénard convection to appear in *J. Fluid Mech.*

- J. Mizushima and K. Gotoh (1983) Nonlinear stability of parallel flows, *J. Phys. Soc. Jpn.* **52**, pp.1206-1214.
- J. Mizushima and Y. Saito (1988) Equilibrium characteristics of the secondary convection in vertical fluid layer between two flat plates, *F.D.R.* **2**, pp183-191.
- T. Mullin (1982) Mutations of steady cellular flows in the Taylor experiment, *J. Fluid Mech.* **121**, pp.207-218.
- M. Nagata and F.H. Busse (1983) Three-dimensional tertiary motions in a plane shear flow, *J.F.M.* **135**, pp1-26.
- M.R.E. Proctor (1991) Instabilities of roll-like patterns for degenerate marginal curves, *Phys. Fluids A3*, pp299-302.
- W.S. Saric and A.S.W. Thomas (1984) Experiments on the subharmonic route to turbulence in boundary layers, in *Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids, Proc. IU-TAM Symp., Kyoto* (ed. T. Tatsumi, North Holland), pp117-122.
- A. Schlüter, D. Lortz and F.H. Busse (1965) On the stability of steady finite amplitude convection, *J.F.M.* **23**, pp129-144.
- K. Stewartson and J.T. Stuart (1971) A nonlinear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.* **48**, pp529-545.
- J.T. Stuart (1962) On three-dimensional nonlinear effect in the stability of parallel flows, *Adv. Aero. Sci.* **3**, pp.121-142.
- J.T. Stuart and R.C. DiPrima (1978) The Eckhaus and Benjamin-Feir resonance mechanisms, *Proc. R. Soc. Lond.* **A362**, pp.27-41.
- T. Taniuti and H. Washimi (1968) Self-trapping and instability of hydromagnetic waves along the magnetic field in a cold plasma, *Phys. Rev. Lett.* **21**, pp209-238.
- H. Yahata (1981) Temporal development of the Taylor vortices in a rotating fluid: IV, *Prog. Theor. Phys.*, **66**, pp879-891.
- H. Yahata (1983) Period doubling cascade in the Rayleigh-Bénard convection, *Prog. Theor. Phys.*, **69**, pp1802-1805.