

|           |                                                                                                                |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 氏 名       | おおした あきひろ<br>大 下 顕 弘                                                                                           |
| 学位(専攻分野)  | 博 士 (理 学)                                                                                                      |
| 学 位 記 番 号 | 論 理 博 第 1456 号                                                                                                 |
| 学位授与の日付   | 平成 17 年 1 月 24 日                                                                                               |
| 学位授与の要件   | 学 位 規 則 第 4 条 第 2 項 該 当                                                                                        |
| 学位論文題目    | On the Stiefel-Whitney classes of the adjoint representation of $E_8$<br>( $E_8$ の随伴表現の Stiefel-Whitney 類について) |
| 論文調査委員    | (主 査)<br>教 授 河 野 明 教 授 西 田 吾 郎 助教授 國 府 寛 司                                                                     |

### 論 文 内 容 の 要 旨

Lie 群は数学において多岐に亘る重要な対象である。(1 連結) 単純 Lie 群は既に É. Cartan の頃に分類され (Dynkin-Coxeter 図式), 古典型  $A_l, B_l, C_l, D_l$  及び五つの例外型  $E_6, F_4, G_2$  ( $l=6, 7, 8$ ) で全てである。ここに  $l$  は Lie 群の階数を表す。古典型はよく知られた線形 Lie 群に概ね直接に結びつくが, 例外型は少し事情が異なる。そして代数的位相幾何学において独特の困難さを有する。実際それら群  $G$  自体にせよその分類空間  $BG$  にせよ, 標数  $p(>0)$  の素体  $F_p$  上の常コホモロジー  $H^*(G; F_p), H^*(BG; F_p)$  は A. Borel, 戸田宏, 荒木捷朗を始めとした錚々たる先達のもと決定されてきたが, 今なお  $BE_7$  の mod 2 コホモロジーの環構造は詳らかでなく,  $H^*(BE_8; F_2)$  に至っては加群構造も分かっていない。

ここで  $E_l$  の随伴表現  $Ad_{E_l}$  の Stiefel-Whitney 類  $w_i(Ad_{E_l})$  に注目する。本論文はこれを調べることで Eilenberg-Moore スペクトル系列, May スペクトル系列の情報を得ようとする路線にあるが, 関連して以下のことが知られている。まず  $w_i(Ad_{E_l})$  は  $H^*(BE_l; F_2)$  の元であるが,  $BE_l$  の代わりにその 4 連結被覆空間  $\tilde{BE}_l$  を用い,  $w_i(Ad_{E_l})$  の  $H^*(\tilde{BE}_l; F_2)$  での像を考えるのが便利である。実際  $H^*(\tilde{BE}_l; F_2)$  は多項式環であることが知られている:

本論文では,  $w_i(Ad_{E_l})$  の像を決定し, このことから  $H^*(BE_l; F_2)$  の像について情報を得た。

その方法として次の可換図式を用いる。

$$\begin{array}{ccccc}
 B\tilde{T}^l & \xrightarrow{\tilde{\pi}_l} & BT^l & \xrightarrow{q'} & K(Z, 4) \\
 \tilde{\lambda}_l \downarrow & & \lambda_l \downarrow & & \parallel \\
 B\tilde{E}_l & \xrightarrow{\pi_l} & BE_l & \xrightarrow{q} & K(Z, 4)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 B\tilde{E}_{l-1} & \xrightarrow{\pi_{l-1}} & BE_{l-1} \\
 \tilde{\varphi}_l \downarrow & & \varphi_l \downarrow \\
 B\tilde{E}_l & \xrightarrow{\pi_l} & BE_l
 \end{array}$$

ここに  $T^l$  は  $E_l$  の極大トーラス, 左の図式で上下の行はファイバー空間であって, 写像  $q$  は  $H^4(BE_l; Z)$  の生成元を表し, 他は自然な (標準的な) 写像である。 $H^*(\tilde{BE}_l; F_2), H^*(BT^l; F_2)$  は mod 2 Steenrod 代数  $A^*$  の作用を含めて完全に分かっているし, 次を得る。

(i)  $\text{Ker } \tilde{\varphi}_7^* = (y_{28}), \text{Ker } \tilde{\varphi}_8^* = (y_{30}, y_{31})$ 。

(ii)  $\text{Ker } \tilde{\lambda}_6^* = 0, \text{Ker } \tilde{\lambda}_7^* = 0, \text{Ker } \tilde{\lambda}_8^* = (y_{31})$ 。

(iii)  $\text{Im } \pi_6^* \subset F_2[y_{16}, y_{24}], \text{Im } \pi_7^* \subset F_2[y_{16}, y_{24}, y_{28}], \text{Im } \pi_8^* \subset F_2[y_{16}, y_{24}, y_{28}, y_{30}] \oplus (y_{31})$ 。

ここに  $\deg y_i = i$  である。

$H^*(BE_7; F_2)$  は  $A^*$ -代数として,  $x_4$  と  $w_{64}(Ad_{E_7})$ , または  $x_4$  と  $w_{64}(\mu)$  で生成される。 $\mu$  は 56 次元複素表現を実化した 112 次元表現であり, さらに

$$Ad_{E_8}|_{E_7} = Ad_{E_7} \oplus \mu \oplus (3 \text{ 次元自明表現})$$

が知られている。

以上の準備の下に本論文では,  $B\tilde{E}_6$  に関して  $\pi_6^*(w_{32}(\lambda))$  を決定し, より低次の Stiefel-Whitney 類は 0 であることを示す。これは  $H^*(BT^l; F_2)$  が  $H^*(BE_l; F_2)$ -有限であることに注意すれば容易で,  $H^*(B\tilde{T}^6; F_2)$  での像の議論に還元さ

れる。次いで  $BE_7$  に関して類似の方法で  $\pi_7^*(w_{64}(Ad_{E_7}))$ ,  $\pi_7^*(w_{64}(\mu))$  を決定する。再び低次の Stiefel-Whitney 類は 0 となる。これらの結果と  $E_7$  のルート分解を用いて  $\pi_7^*(w_i(Ad_{E_8}))=0 (i \leq 127)$  及び  $\pi_7^*(w_{128}(Ad_{E_8}))=y_{16}^8$  という結論を得る。なお上に引用した事実を使えば,  $H^*(BE_8; F_2)$  の  $H^*(BE_8; F_2)$  での像に関して若干の帰結を得る。 $H^*(BE_6; F_2)$ ,  $H^*(BE_7; F_2)$  に関しては, 像は完全に決まる。

## 論文審査の結果の要旨

Lie 群は数学において多岐に亘る重要な対象である。(1 連結) 単純 Lie 群は既に É. Cartan の頃に分類され (Dynkin-Coxeter 図式), 古典型  $A_l, B_l, C_l, D_l$ , 及び五つの例外型  $E_6, F_4, G_2 (l=6, 7, 8)$  で全てである。ここに  $l$  は Lie 群の階数を表す。古典型はよく知られた線形 Lie 群に概ね直接に結びつくが, 例外型は少し事情が異なる。そして代数的位相幾何学において独特の困難さを有する, 実際それら群  $G$  自体にせよその分類空間  $BG$  にせよ, 標数  $p(>0)$  の素体  $F_p$  上の常コホモロジー  $H^*(G; F_p)$ ,  $H^*(BG; F_p)$  は A. Borel, 戸田宏, 荒木捷朗を始めとした錚々たる先達のもと決定されてきたが, 今なお  $BE_7$  の mod 2 コホモロジーの環構造は詳らかでなく,  $H^*(BE_8; F_2)$  に至っては加群構造も分かっていない。

ここで  $E_l$  の随伴表現  $Ad_{E_l}$  の Stiefel-Whitney 類  $w_i(Ad_{E_l})$  に注目する。

$BE_l$  の代わりにその 4 連結被覆空間  $B\tilde{E}_l$  を用い,  $w_i(Ad_{E_l})$  の  $H^*(B\tilde{E}_l; F_2)$  で像を考えるのが便利である。実際  $H^*(B\tilde{E}_l; F_2)$  は多項式環であることが知られている:

$$\begin{aligned} H^*(B\tilde{E}_6; F_2) &= F_2[y_{10}, y_{12}, y_{16}, y_{18}, y_{24}, y_{33}, y_{34}, y_{2l+1} (i \geq 6)], \\ H^*(B\tilde{E}_7; F_2) &= F_2[y_{12}, y_{16}, y_{20}, y_{24}, y_{28}, y_{33}, y_{34}, y_{36}, y_{2l+1} (i \geq 6)], \\ H^*(B\tilde{E}_8; F_2) &= F_2[y_{16}, y_{24}, y_{28}, y_{30}, y_{31}, y_{33}, y_{34}, y_{36}, y_{40}, y_{48}, y_{2l+1} (i \geq 6)]. \end{aligned}$$

ここに  $\deg y_i = i$  である。本論文では  $w_i(Ad_{E_l})$  の像を決定し, このことから  $H^*(BE_l; F_2)$  の像について情報を得た。その方法として次の可換図式を用いる。

$$\begin{array}{ccccc} B\tilde{T}^l & \xrightarrow{\hat{\pi}_l} & BT^l & \xrightarrow{q'} & K(Z, 4) \\ \tilde{\lambda}_l \downarrow & & \lambda_l \downarrow & & \parallel \\ B\tilde{E}_l & \xrightarrow{\pi_l} & BE_l & \xrightarrow{q} & K(Z, 4) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B\tilde{E}_{l-1} & \xrightarrow{\pi_{l-1}} & BE_{l-1} \\ \tilde{\varphi}_l \downarrow & & \varphi_l \downarrow \\ B\tilde{E}_l & \xrightarrow{\pi_l} & BE_l \end{array}$$

ここに  $T^l$  は  $E_l$  の極大トーラス, 左の図式で上下の行はファイバー空間であって, 写像  $q$  は  $H^*(BE_l; Z)$  の生成元を表し, 他は自然な (標準的な) 写像である。 $H^*(B\tilde{E}_l; F_2)$ ,  $H^*(BT^l; F_2)$  は [4] により mod 2 Steenrod 代数  $A^*$  の作用を含めて完全に分かっている。

$H^*(BE_7; F_2)$  は  $A^*$ -代数として,  $x_4$  と  $w_{64}(Ad_{E_7})$ , または  $x_4$  と  $w_{64}(\mu)$  で生成される。 $\mu$  は 56 次元複素表現を実化した 112 次元表現であり,  $Ad_{E_8}|_{E_7} = Ad_{E_7} \oplus \mu \oplus$  (3 次元自明表現) が知られている。

以上の準備の下に本論文では,  $BE_6$  に関して  $\pi_6^*(w_{32}(\lambda))$  を決定し, より低次の Stiefel-Whitney 類は 0 であることを示す。これは  $H^*(BT^l; F_2)$  が  $H^*(BE_l; F_2)$ -有限であることに注意すれば容易で,  $H^*(B\tilde{E}_6; F_2)$  での像の議論に還元される。次いで  $BE_7$  に関して類似の方法で  $\pi_7^*(w_{64}(Ad_{E_7}))$ ,  $\pi_7^*(w_{64}(\mu))$  を決定する。再び低次の Stiefel-Whitney 類は 0 となる。これらの結果と  $E_7$  のルート分解を用いて  $\pi_7^*(w_i(Ad_{E_8}))=0 (i \leq 127)$  及び  $\pi_7^*(w_{128}(Ad_{E_8}))=y_{16}^8$  という結論を得る。

この結論は例外型リー群の分類空間の分類空間の cohomology の本質的な部分を決定するものであり, 博士 (理学) の学位論文として十分なものと認め合格と判定した。また学識についても本研究科博士後期課程修了者と同等であることを確認した。