

変形しないフレームの構成

琉球大学 前原潤 (Hiroshi Maehara)

1. はじめに.

伸び縮みしないいくつかの棒を、「自在ジョイント」でつなぎ合わせた構造物をフレームという。フレームについては、それが自由に變形するかどうか、1つの関心事となる。これを数学的対象として扱うため、次のように定義する。

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 内に頂点をもつグラフを $\mathbb{R}^d$ 内の フレーム (framework) という。 $\mathbb{R}^d$ 内のフレームの各頂点を動かして

- (1) 隣接する頂点間の距離を変えないで
- (2) 隣接しない頂点間の距離を1つ以上変える

ことができるとき、フレーム F は (d 次元で) 變形する という。このようなことが不可能なら、 F は (d 次元で) 變形しない とか 定形である という。例えば、フレーム F が完全グラフなら、 F には隣接しない2点は存在しないから、 F は定形である。

n 個の頂点をもつグラフ G に対して、 $\mathbb{R}^d$ の点 $p_1, \dots, p_n$ を頂点とする G と同型なグラフ (フレーム) を G の 実現 といい、

記号 $G(p_1, \dots, p_n)$ または、 $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{nd}$ として、

簡単に $G(p)$ で表す。残念ながら、フレーム $G(p)$ が變形するか

どうかは, グラフ G の構造だけでは決まらず, 点 $p \in \mathbb{R}^{nd}$ のとり方にも依存する。例えば 図 1 の 2 つのフレームは, 同一のグラフの平面上の 2 つの実現であるが, 一方は変形し, 他方は定形である。

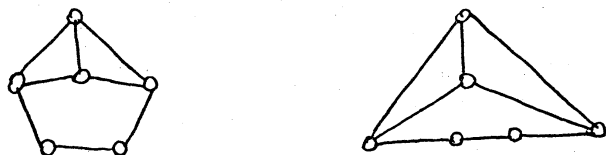


図 1

点 $p \in \mathbb{R}^{nd}$ のすべての座標が有理数体上, 代数的に独立 のとき 点 p を 一般点 と呼ぶことにしよう。またこのとき $G(p)$ を グラフ G の 一般実現 というにする。グラフ G の一般実現 $G(p)$ については, 変形するかどうかは グラフ G の構造のみで決まり, 一般点 p のとり方によらないのである。

一般実現 $G(p)$ が定形するとき, グラフ G は d 次元で一般に定形 (簡単に d -定形) といい, $G(p)$ が変形するとき G は d 次元で一般に変形 (d -変形) するという。

このノートでは d -定形グラフ G から, 頂点数がもっと多い d -定形グラフを作る 簡単な方法を示し, それを利用して, グラフの join, 完全多組グラフ等の定形性に関するいくつかの結果を導く。

2. グラフの辺関数, ヤコビ行列 (復習)

一般に, 頂点数が一定のグラフでは, 辺の個数が増えていくと, d -定形となるチャンスが大きくなる。辺の個数は, 2点間の距離を指定する方程式の個数となるからである。しかし, "独立な"方程式が何個得られるかということについては難しい問題がある。

グラフの定形性の問題に, 陰関数定理を利用したのは, Asimov-Roth (1978) あたりからであろう。以下, どのように陰関数定理が用いられるかを述べよう。

G を n 個の頂点 $1, 2, \dots, n$ をもつグラフとする。 $\mathbb{R}^d$ 内に n 個の点 $p_1, \dots, p_n$ をとり, ij が G の辺であるときに限り p_i と p_j を辺で結んで G の実現 $G(p)$ ($p := (p_1, \dots, p_n)$) を得る。 G の各辺 e に対して 対応する $G(p)$ の辺 (線分) の長さの 2 乗を $f_e(p)$ とする。例えば, $e = ij$ なら

$$f_e(p) = \|p_i - p_j\|^2$$

$f_e(p)$ は $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{nd}$ の関数である。これを G の, 辺 e に対応する 辺関数 という。 p の nd 個の座標を $x_1, \dots, x_{nd}$ とすると 明らかに $f_e(p)$ は $x_1, \dots, x_{nd}$ の "多項式" である。

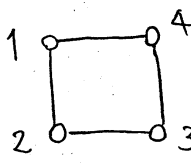
(実は, $f_e(p)$ を p の座標の多項式と与えるために $\|p_i - p_j\|$ の 2 乗をとったのである。) グラフ G が m 本の辺をもち, 対応する辺関数を $f_1(p), \dots, f_m(p)$ とする。このとき $m \times nd$ -行列

$$\left(\frac{\partial f_i(p)}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, nd}}$$

(関数 $f_1, \dots, f_m$ のヤコビ行列) を G の (辺関数の) ヤコビ行列

といい, $J_G(p)$ で表す。 $J_G(p)$ は $m \times nd$ -行列であるが,

各要素を d 次元ベクトル で表して $m \times n$ -行列 として書く

方が簡単である。例えば グラフ  の

ヤコビ行列は, $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ として

		頂点			
		1	2	3	4
辺	12	$2(p_1 - p_2)$	$2(p_2 - p_1)$	0	0
	23	0	$2(p_2 - p_3)$	$2(p_3 - p_1)$	0
	34	0	0	$2(p_3 - p_4)$	$2(p_4 - p_3)$
	41	$2(p_1 - p_4)$	0	0	$2(p_4 - p_1)$

と表わされる。

グラフ G のヤコビ行列 $J_G(p)$ ($p \in \mathbb{R}^{nd}$) のランクの最大値
を G の d -rank といい, $\text{rank}_d(G)$ で表わす。

定理 2.1 G を頂点数 n の空でないグラフとすると, $n > d$ なら

$$\text{rank}_d(G) \leq nd - \binom{d+1}{2}$$

である。また点 $p^0 \in \mathbb{R}^{nd}$ での $J_G(p^0)$ のランクが $\text{rank}_d(G)$ に等しいとき

(1) $\text{rank}_d(G) < nd - \binom{d+1}{2}$ なら $G(p^0)$ は変形である

(2) $\text{rank}_d(G) = nd - \binom{d+1}{2}$ なら $G(p^0)$ は定形である。

これを証明するため、陰関数定理の1つの帰結である次の定理を用いる。

定理 2.2. m 個の N 変数の微分可能な関数

$$f_i(x_1, \dots, x_N) \quad (i=1, \dots, m)$$

のヤコビ行列 $(\partial f_i / \partial x_j)$ が点 $p^\circ \in \mathbb{R}^N$ で最大ランク r をとる。このとき点 p° の近間で

$$(*) \quad f_i(x_1, \dots, x_N) = f_i(p^\circ) \quad (i=1, \dots, m)$$

を満足するような点の全体は " $(N-r)$ -次元の曲面" をなす。

特に $r=N$ なら点 p° の近間で $(*)$ を満たす点、は p° 以外にない。□

陰関数定理については、例えば、松島与三「多様体入門」、高木貞一「解析概論」や、L. Auslander - R.E. Mackenzie の "Introduction to Differentiable Manifolds" を見るとよい。

定理 2.1 の証明. G の辺の個数を m とし、 $f_1, \dots, f_m$ を G の辺関数とする。 G のヤコビ行列 J_G が点 p° で最大 rank r をとるとしよう。まず、 $T_{p^\circ} G$ は $\mathbb{R}^d$ 内で "変形" しないように動かすことができる。つまり、 $G(p^\circ)$ を $\mathbb{R}^d$ 内の剛体とみて、運動させることができる。 $\mathbb{R}^d$ 内の剛体運動は $d(d+1)/2 = \binom{d+1}{2}$ 個のパラメータで一意的に記述される。 $(\mathbb{R}^d$ の回転群 $SO(d)$ が

$d(d-1)/2$ 次元, 平行移動が d 次元, 従って $d(d-1)/2 + d = d(d+1)/2$ 次元) 故に $G(p)$ を $\mathbb{R}^d$ 内で剛体運動させたとき 対応する点 $p^\circ = (p_1, \dots, p_n)$ の $\mathbb{R}^{nd}$ 内での軌跡 M は $\binom{d+1}{2}$ 次元の曲面(多様体)となる。また曲面 M 上では G の辺関数の値は一定であるから 点 p° の近傍で

$$(**) \quad f_i(x_1, \dots, x_{nd}) = f_i(p^\circ) \quad (i=1, \dots, m)$$

を満足するような点 $(x_1, \dots, x_{nd})$ の全体 W は, 少なくとも $\binom{d+1}{2}$ 次元以上の曲面でなければならない。よって 定理 2.2 から $nd - r \geq \binom{d+1}{2}$, つまり $r = \text{rank}_d(G) \leq nd - \binom{d+1}{2}$.

さて, グループ $G(p)$ を $\mathbb{R}^d$ 内で動かすというのは, $\mathbb{R}^{nd}$ 内の点 p° から出発する曲線で, その上では各辺関数の値が一定であるような曲線を 1 つ指定することに他ならない。従って 「 p° から出発する W 内の曲線で M から はみでるものが「存在する」というのが, $G(p^\circ)$ が変形するための必要十分条件である。

$r < nd - \binom{d+1}{2}$ としよう。すると, 定理 2.2 より

W の次元 $= nd - r > \binom{d+1}{2} = M$ の次元であるから, W は M より次元の高い曲面となっている。従ってこの場合 p° から出発し, M から はみでる曲線が W 内に存在する。よって $G(p^\circ)$ は変形する。

次に, $\Gamma = nd - \binom{d+1}{2}$ の場合。このときは, W と M は同次元となり, W は M に含まれてしまうから, M からはずれる曲線を W 内にとることは不可能。よって $G(p^0)$ は定形である。□

定理 2.3

(1) $\text{rank}_d(G) = nd - \binom{d+1}{2}$ なら G は d -定形である。

(2) $\text{rank}_d(G) < nd - \binom{d+1}{2}$ なら G は d -変形する。

証明. $\omega \in \mathbb{R}^{nd}$ を一般点 (すべての座標が $\mathbb{Q}$ 上代数的に独立) とする。 G のヤコビ行列が点 ω で最大ランクをとることを言えばよい。

$\text{rank}_d(G) = \Gamma$ としよう。 $J_G(p)$ ($p \in \mathbb{R}^{nd}$) の Γ 次のすべての小行列式を $D_1, \dots, D_N$ ($N = \binom{m}{r} \cdot \binom{nd}{r}$) とする。

$$g(p) = D_1^2 + \dots + D_N^2$$

とみると $g(p)$ は p の座標の多項式である。また $J_G(p)$ のランクの最大値は Γ であるから, $g(p)$ は恒等的に 0 ではない。従って $g(\omega) \neq 0$ (すなわち ω の nd 個の座標は代数的に従属になってしまう!)。故に $\text{rank } J_G(\omega) = \Gamma$ 。 □

系 2.4. 頂点数 n , 辺数 $< nd - \binom{d+1}{2}$ のグラフ G は d -定形でない。

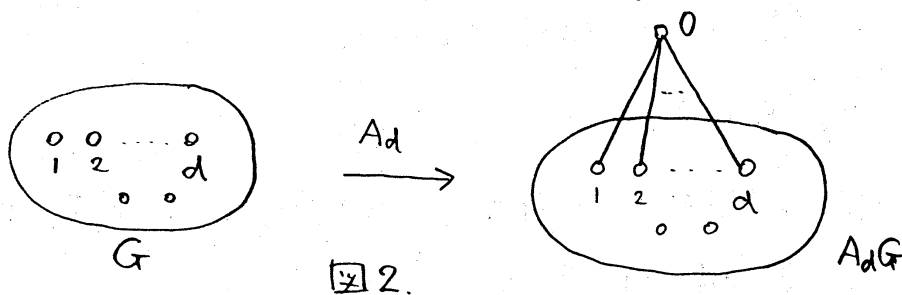
証明. G の辺数 $< nd - \binom{d+1}{2}$ なら, G のヤコビ行列の
 行数 $< nd - \binom{d+1}{2}$. よって $\text{rank}_d(G) < nd - \binom{d+1}{2}$. $\square$

(注) 辺数 $< nd - \binom{d+1}{2}$ でも特別な点配置をとると, 定形な
 フレームになることがある。前の図 1 を見よ。

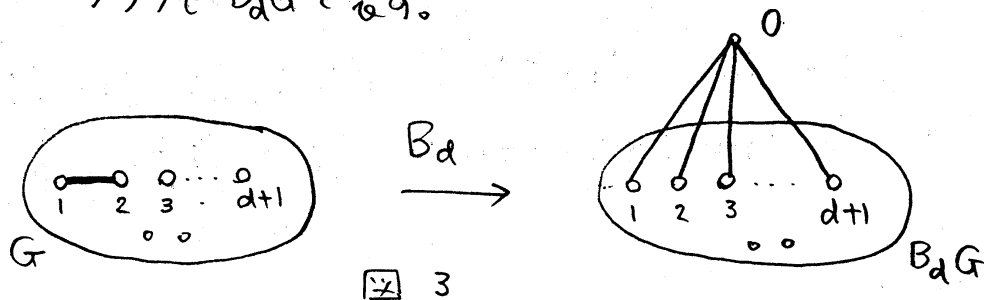
3. 操作 A_d, B_d

頂点数 $\geq d+1$ の d -定形グラフ G から, 頂点数が G より多い
 d -定形グラフを作るための 2 つの操作 A_d, B_d を導入しよう。

操作 A_d : グラフ G に 次数 d の頂点 0 を新しく追加する。
 その結果得られるグラフを $A_d G$ で表す。



操作 B_d : グラフ G に 次数 $d+1$ の頂点 0 を新しく追加し, 0 に隣接
 する 2 点を結ぶ 辺を 1 つ取り除く。その結果得られる
 グラフを $B_d G$ で表す。



定理 3.1 G を頂点数 $\geq d+1$ のグラフとする。このとき

$$(1) G: d\text{-定形} \iff A_d G: d\text{-定形}$$

$$(2) G: d\text{-定形} \Rightarrow B_d G: d\text{-定形}$$

(注) (2) の逆は成立しない。例えば 下図 (図4) を見よ。

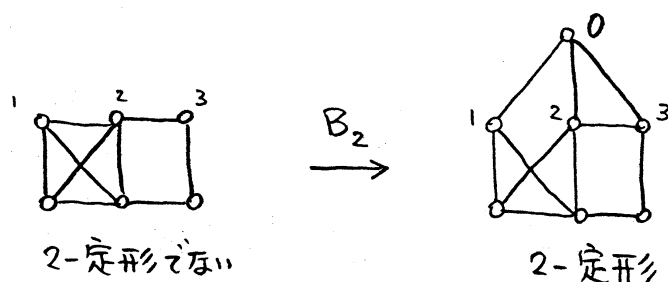


図 4.

証明 定理 2.3 により, 次の (1) (2) を示せば十分である。

$$(1) \text{rank}_d(A_d G) = \text{rank}_d(G) + d$$

$$(2) \text{rank}_d(B_d G) \geq \text{rank}_d(G) + d.$$

(1) の証明は簡単なので (2) の証明を済ませると、そう思うようになる),
以下 (2) の証明だけを行う。

G の頂点を $1, 2, \dots, n$ とし, 1 と 2 が隣接しているとする。

図 3 にあるように, $B_d G$ では “新しい” 頂点 0 が $1, 2, \dots, d-1$ に隣接し, 辺 12 が取り除かれているとする。

$P = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{nd}$, $P^+ = (p_0, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{(n+1)d}$
とし, $G, B_d G$ のヤコビ行列を $J(P), J^B(P^+)$ で表す。

また $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ は一般点だから, $d+1$ コの点, $P_1, P_2, \dots, P_{d+1}$ が $\mathbb{R}^d$ の超平面上に乗ることはない。さて, 点 P_0 を $P_0 = 2P_1 - P_2$ としてとる。すると

$$P_1 - P_0 = P_2 - P_1, \quad P_2 - P_0 = 2(P_1 - P_0)$$

$$\begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ P_0 \quad P_1 \quad P_2 \end{array}$$

である。よって, 上の行が

(a) 第2行目の $(-1/2)$ 倍を第1行目に加え, それから

(b) 第1行目に -1 を掛ける。

すると第1行目は

$$(0, 2(P_0 - P_1), 2(P_1 - P_0), 0, \dots, 0) = (0, 2(P_1 - P_2), 2(P_2 - P_1), 0, \dots, 0)$$

となる。それから

(c) 第1行目と第 $(d+1)$ 行目もとりかえると,

	0	1	2	3	
$0(d+1)$	$2(P_0 - P_{d+1})$	*			
02	$2(P_0 - P_2)$				
$\vdots$	$\vdots$				
$0d$	$2(P_0 - P_d)$				
01	0	$2(P_1 - P_2)$	$2(P_2 - P_1)$	0 ... 0	0
$\vdots$	0	K			
$\vdots$	0				

となる。d コのベクトル $\vec{P_0 P_i}$ ($i=2, 3, \dots, d+1$) は明らかに線形独立だから, $d \times d$ -行列

$$\begin{pmatrix} 2(p_0 - p_{d+1}) \\ 2(p_0 - p_2) \\ \vdots \\ 2(p_0 - p_d) \end{pmatrix}$$

は正則行列である。従って $p_0 = 2p_1 - p_2$ としとると

$$\text{rank}(J^B(p^+)) = \text{rank}(J(p)) + d = \text{rank}_d(G) + d.$$

$$\text{故に } \text{rank}_d(B_d G) \geq \text{rank}_d(G) + d. \quad \square$$

(注) 操作 A_d, B_d は、私自身は、Laman の定理 (Laman (1970)) を一般化しようという試みの中で思いついたものであるが、すでに Tay-Whiteley (1985) で Henneberg の方法 (Henneberg (1911)) の一般化として取り上げられていた。Tay-Whiteley (1985) では、定理 3.1 に相当することを、Whiteley の "substitution principle" というのを用いて "静力学" 的に証明している。

例 定理 3.1 を用いて、 $K(2,2,2)$ が 3-定形であることが、下図のように示される。

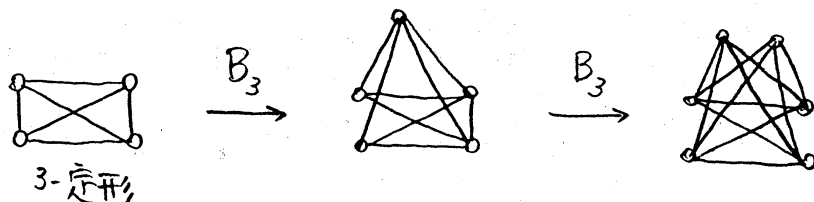


図 5

4. グラフの族 $\mathcal{F}(d)$ とグラフの join

完全グラフ K_{d+1} に操作 A_d, B_d , および “辺の追加” を何回が行って得られるグラフの全体を $\mathcal{F}(d)$ で表す。例えば 図5 から $K(2,2,2) \in \mathcal{F}(3)$ である。次の定理は明らか。

定理4.1 $G \in \mathcal{F}(d) \Rightarrow G: d\text{-定形}$. $\square$

Laman (1970) により 位数 ≥ 3 の 2-定形グラフの全体は $\mathcal{F}(2)$ に一致することがわかる。ところが 位数 ≥ 4 の 3-定形グラフの中には $\mathcal{F}(3)$ に入らないものがある。例えば、正20面体のグラフは 3-定形 (Asimov-Roth 1978) であるが、 $\mathcal{F}(3)$ には入らない。操作 A_d, B_d , 辺の追加 だけでは、3-定形グラフを作るのに十分ではないのである。これについては、後でもう一度ふれるであろう。

2つのグラフ G と H の disjoint union $G \cup H$ は、 G の点と H の点を結ぶ辺をすべて追加して得られるグラフを G と H の join といい、 $G+H$ で表す。また 位数 n の empty グラフを E_n と書く。つまり $E_n = \overline{K_n}$ 。そして $E_m + E_n = K(m, n)$ 。

定理4.2 G を位数 $d+1$, 辺数 m のグラフとするとき、

- (1) $G + E_n$ が $(d+1)$ -定形 $\Leftrightarrow G = K_{d+1} \Leftrightarrow G + E_n \in \mathcal{F}(d+1)$
- (2) $G + E_n$ が d -定形 $\Leftrightarrow n \geq \binom{d+1}{2} - m \Leftrightarrow G + E_n \in \mathcal{F}(d)$

証明 (1). まず, 位数 $d+2$ 以下のグラフが $(d+1)$ -定形であるのは完全グラフの場合に限ることに注意しよう. (例えば, $(K_4 - 1\text{辺})$ は図6に見られるように 3-定形でない. 同様に $(K_{d+2} - 1\text{辺})$ も

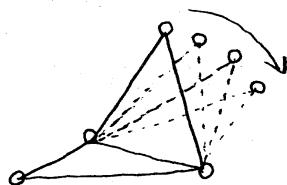


図6.

$(d+1)$ -定形でないことがわかる.) 従って定理 3.1 (1) により

$$\begin{aligned} G + E_n : (d+1)\text{-定形} &\Leftrightarrow G + E_1 : (d+1)\text{-定形} \\ &\Leftrightarrow G + E_1 = K_{d+2} \Leftrightarrow G = K_{d+1} \end{aligned}$$

(2). $n \geq \binom{d+1}{2} - m$ と仮定. G は K_{d+1} から $\binom{d+1}{2} - m$ 個の辺を除くことによって得られるから, K_{d+1} に操作 B_d を

$$k := \binom{d+1}{2} - m$$

回 くりかえして $G + E_k$ を得ることができ. これに操作 A_d を $n-k$ 回 くりかえし, さらに 辺を $n-k$ 個追加して $G + E_n$ が得られる. 故に $G + E_n \in \mathcal{F}(d)$.

「 $G + E_n \in \mathcal{F}(d) \Rightarrow G + E_n : d\text{-定形}$ 」は定理 4.1 による.

最後に $G + E_n$ が d -定形と仮定しよう. すると系 2.4 より

$$G + E_n \text{ の辺数 } = m + (d+1)n \geq (d+1+n)d - \binom{n+1}{d}$$

これから $n \geq \binom{d+1}{2} - m$ を得る. $\square$

$(n \geq 2)$

系 4.3 $G + E_n V$ が d -定形ならば, $G = K_d$ か または, G の
位数 $\geq d+1$. $\square$

定理 4.2 (2) で $G = E_{d+1}$ とおくと.

系 4.4 $K(d+1, d(d+1)/2) \in \mathcal{F}(d)$. $\square$

Bolken-Roth (1980) では "stress" space の次元を計算する
ことにより $K(d+1, d(d+1)/2)$ が d -定形であることを示している。

次の定理も明らか。

定理 4.5. $G \in \mathcal{F}(d) \iff G + K_n \in \mathcal{F}(d+n)$ $\square$

5. 完全多組グラフの定形性

系 4.3 より, $K(a, b)$ が d -定形ならば, $a=b=1$ または
 $a, b \geq d+1$ である。次の定理は系 4.4 の拡張である。

定理 5.1. $1 \leq k \leq d$ のとき

$$K(d+k, \binom{d+1}{2} - (k-1)) \in \mathcal{F}(d)$$

証明 頂点数 n のパスを P_n で表す。証明は次の χ -t による。

$$\begin{aligned}
K_{d+1} &= K_d + E_1 \xrightarrow{(B_d)^k} (K_d - (k-1)E_1) + P_k \\
&\xrightarrow{(A_d)^{d-k}} (K_d - (k-1)E_1) + (P_k \cup E_{d-k}) \\
&\xrightarrow{A_d} ((K_d - (k-1)E_1) \cup E_1) + (P_k \cup E_{d-k}) \\
&\xrightarrow{(B_d)^{\binom{d}{2} - (k-1)}} E_{d+1} + (P_k \cup E_{d-k} \cup E_{\binom{d}{2} - (k-1)}) \\
&\xrightarrow{(B_d)^{k-1}} E_{d+k} + E_{\binom{d}{2} + d - (k-1)} \\
&= K(d+k, \binom{d+1}{2} - (k-1)). \quad \square
\end{aligned}$$

1811 $K(3,3) \in \mathcal{F}(2)$; $K(4,6), K(5,5) \in \mathcal{F}(3)$

完全 2 組グラフは、3 角形をもたないから、その定形性は特別に 図 1 味をもたれていたようである。 $K(3,3)$ が 2-定形であるのは、すでに 19 世紀には知られていたようであるが、 $K(4,6)$, $K(5,5)$ が 3-定形であることは、Bolken-Roth (1980) で初めて証明されたようである。Bolken-Roth の方法を用いると、次の定理が得られる (Maehara, 1988)。証明は省略する

定理 5.2 $a, b > 0, a+b > 2$ のとき

$$K(a,b) \text{ が } d\text{-定形} \iff \underbrace{a+b}_{a, b \geq d+1} \geq \binom{d+2}{2} \quad \square$$

この定理は、本質的に Bolker-Roth (1988) に証明されているのだが、不思議なことに、彼等は、このような形に述べなかった。 $K(d+1, d(d+1)/2)$ が d -定形であることは定理として述べているのだが。

— 亦、どんな大きな整数 a, b に対しても、 $K(a, b)$ を平面上に実現したフレームで、変形するものが存在するの？
ある (Homma-Maehara, 1988)

問題. $K(a, b) (\neq K_2)$ が d -定形 $\Rightarrow K(a, b) \in \mathcal{F}(d)$?

($a \leq 2d$ なら正しいことはわがっている (定理 5.1))

定理 5.1 に類似な結果も完全多組グラフに対しても導くことができる。しかし、記述がめずかしいので、完全3組グラフの場合だけをとりあげよう。

定理 5.3 $0 < a \leq b \leq c$; $a+b, b+c, c+a \geq d+1$ かつ

$$a+b+c \geq \binom{d+2}{2} - \max_{\substack{i+j=a+b-(d+1) \\ a \geq i \geq 0, b \geq j \geq 0}} (a-i)(b-j)$$

ならば、 $K(a, b, c) \in \mathcal{F}(d)$.

証明 $a+b = d+1+k$ ($k \geq 0$) とし、 $i+j=k$ ($0 \leq i \leq a$, $0 \leq j \leq b$) なる i, j を 1 組固定する。

$K_{d+1} = K_{a-i} + K_{b-j}$ に操作 B_d を c 回 施して, K_{a-i}, K_{b-j} から c 個の辺を除き

$$(K_{a-i} - p \text{ 辺}) + (K_{b-j} - q \text{ 辺}) + E_c \quad (p+q=c)$$

(もし, 途中で, K_{a-i}, K_{b-j} に辺が 無くなるなら, 以後, 辺は除かなくて

よい.) 次に B_d を $i+j=k$ 回 行つて,

$$(K_{a-i} - p \text{ 辺}), (K_{b-j} - q \text{ 辺})$$

の辺をすべて消し $E_a + E_b + E_c$ とした。.

これは, $k+c \geq \binom{a-i}{2} + \binom{b-j}{2}$ ならば必ず可能である。

$$\begin{aligned} \binom{a-i}{2} + \binom{b-j}{2} &= \frac{1}{2} \{ (a-i)(a-i-1) + (b-j)(b-j-1) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (a-i)(d-(b-j)) + (b-j)(d-(a-i)) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ d((a-i) + (b-j)) - 2(a-i)(b-j) \} = \frac{d(d+1)}{2} - (a-i)(b-j) \end{aligned}$$

よつて

$$c \geq \frac{d(d+1)}{2} - (a-i)(b-j) - k \quad \text{ならば OK.}$$

つまり

$$a+b+c \geq a+b + \frac{d(d+1)}{2} - (a-i)(b-j) - k \quad \text{ならば}$$

$k(a,b,c) \in \mathcal{F}(d)$ である。

$$a+b + \frac{d(d+1)}{2} - (a-i)(b-j) - k = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - (a-i)(b-j)$$

$$\text{つまり } a+b+c \geq \binom{d+2}{2} - (a-i)(b-j)$$

なら $K(a,b,c) \in \mathcal{F}(d)$ である。 i, j は, $a \geq i \geq 0, b \geq j \geq 0, i+j = a+b-(d+1)$ ならどんな i, j でもよいかから, 定理が正しいことがわかる。 $\square$

6. 3-定形, 4-定形の完全多組グラフ

定理 6.1 位数 ≥ 4 の完全多組グラフ G が 3-定形であるための必要十分条件は, G が次の中の1つを部分グラフとして含むことである。

$$K(4,6), K(5,5), K(2,2,2), K(1,3,3), K(1,1,1,1)$$

証明 (必要性) $G = K(a,b)$ なら, 定理 5.2 より, $a, b \geq 4$ なら

$$a+b \geq \binom{5}{2} = 10. \text{ 故に } G \text{ は } K(4,6) \text{ が } K(5,5) \text{ を含む。}$$

$G = K(a,b,c) = K(a,b) + E_c$ ($a \leq b \leq c$) のとき, 系 4.3 より $a+b \geq 4$. 故に G は $K(1,3,3)$ または $K(2,2,2)$ を含む。

G が完全 k 組グラフ ($k \geq 4$) のとき, G は $K(1,1,1,1)$ を含む。

(十分性). $K(4,6), K(5,5)$ は定理 5.1 より 3-定形

$$K(2,2,2) = K(2,2) + E_2, \quad K(1,3,3) = K(1,3) + E_3$$

は定理 4.2 により 3-定形。 $K(1,1,1,1) = K_4$ は明らかに 3-定形。

また, これらのうちの1つを含む完全多組グラフは明らかに $\mathcal{F}(3)$ に属する。

$\square$

定理 6.1 位数 ≥ 5 の完全多組グラフ G が 4-定形

$\Leftrightarrow G$ は 次の中の 1つを部分グラフとして含む.

$$K(5,10), K(6,9), K(7,8)$$

$$K(1,4,6), K(1,5,5), K(2,3,4), K(3,3,3)$$

$$K(1,1,3,3), K(1,2,2,2), K(1,1,1,1,1)$$

証明 ($\Rightarrow$) $G = K(a,b)$ なら, 定理 5.2 より $a, b \geq 5$,

$$a+b \geq \binom{6}{2} = 15. \text{ 故に } G \text{ は } K(5,10), K(6,9), K(7,8) \text{ の}$$

いずれかを含む. $G = K(a,b,c)$ ($a \leq b \leq c$) なら, 系 4.3 より

$$a+b \geq 5. \text{ さらに } a+b=5 \text{ なら 定理 4.2(2) より } c \geq 15-ab-5$$

$$\text{従って, } (a,b) = (1,4) \text{ なら } c \geq 6$$

$$(a,b) = (1,5) \text{ なら } c \geq b = 5$$

$$(a,b) = (2,3) \text{ なら } c \geq 4$$

$$(a,b) = (2,4) \text{ なら } c \geq b = 4$$

$$(a,b) = (3,3) \text{ なら } c \geq b = 3$$

故に, 定理のリストの 2行目のグラフのいずれかを含む.

$$G = K(a,b,c,d) \text{ } (a \leq b \leq c \leq d) \text{ のとき, } a+b+c \geq 5$$

$$\text{よって } (a,b,c) \geq (1,1,3) \text{ または } (a,b,c) \geq (1,2,2)$$

故に G は $K(1,1,3,3)$ または $K(1,2,2,2)$ を含む.

G が 完全 k 組グラフ ($k \geq 5$) のときは $K(1,1,1,1,1)$ を含む.

($\Leftarrow$) $K(5,10), K(6,9), K(7,8)$ は定理 5.11 より 4-定形。
 $K(1,4,6), K(1,5,5), K(2,3,4), K(3,3,3)$ は定理 5.3 より
 4-定形。 $K(1,1,3,3) = K(1,3,3) + E_1$ と,
 $K(1,2,2,2) = K(2,2,2) + E_1$ は定理 4.51 より $\mathcal{F}(4)$ に属す。
 $K(1,1,1,1,1) = K_5 \in \mathcal{F}(4)$. G がこれらの中の 1つを含む
 なら, 明らかに $G \in \mathcal{F}(4)$. 故に G は 4-定形. $\square$

7. 最後に

2-定形グラフの特徴づけは, Laman (1970) によって
 なされた。しかしながら, 3-定形グラフの特徴づけは難しく
 未解決である。その理由の 1つは, 3-定形グラフを構成する
 方法が十分でないことである。

A_d, B_d に類似な操作として お先に思いいつくのは
 次の C_d であろう

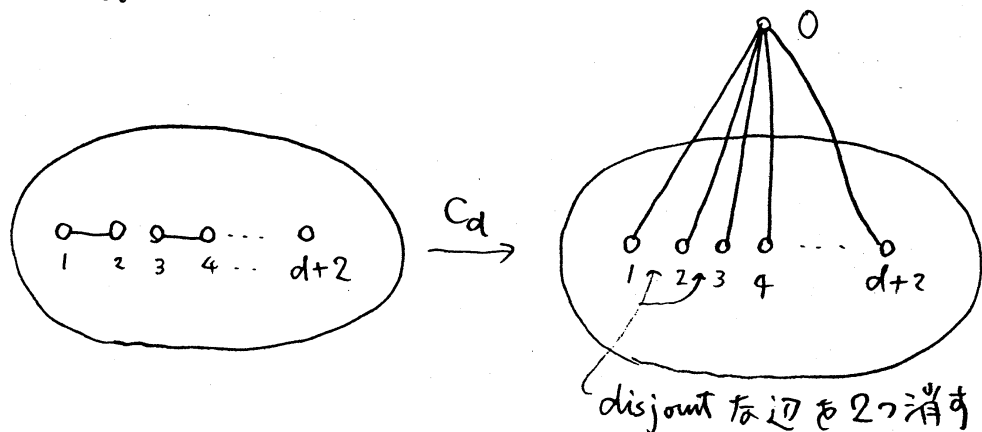


図 7.

Tag-Whitely (1985) は Graver の予想と呼ばれる もう少し
一般的な予想 (Graver 1984) からの直接の帰結として

$$「G: d\text{-定形} \Rightarrow C_d G: d\text{-定形}」$$

を述べている。しかし、これは正しくない、従って Graver の予想も
正しくないことが判明している (Maehara 1988)

従って、3-定形性問題や、Henneberg の方法を拡張
する問題等は、まだこれからのお話と言える。

Lovasz-Yemini (1982) は、6-連結なグラフはすべて
2-定形であることを示した。しかし彼等の方法も本質的に
Laman の定理を用いるので高次元への一般化は難しい。

最後に、多面体 (polyhedral surface) の $\mathbb{R}^3$ への埋込み
について：多面体の各面は、隣接の面と 4 ヲウツガイ でつながり
合 わ せ ら れ て い て、どの 2 面角も (他からの制約がなければ) 自由に動
ける状態にあるとしよう。Euler は、多面体はすべて定形
(rigid) であると予想したが、これは誤りであることが、Connelly
(1978) によって示された。Connelly は、球面と同相で、各面が
3 角形である、「変形」する多面体を作ってみた。

問題. 平面上の任意の実現が定形となるグラフの
特徴づけは？

参考文献

- [1] L. Asimov & B. Roth (1978), Rigidity of graphs,
Trans. Amer. Math. Soc. 245, 279-289
- [2] ————— (1979), Rigidity of graphs II,
J. Math. Anal. App. 68, 279-289
- [3] E.D. Bolker & B. Roth (1980), When is a bipartite graph a
rigid framework?, Pacific J. Math. 90, 27-44.
- [4] R. Connelly (1978), A counter-example to the rigidity conjecture
for polyhedra, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 47, 333-338
- [5] J. Graver (1984), A combinatorial approach to infinitesimal
rigidity,
- [6] L. Henneberg (1911), Die Graphische Statik der Starren
System, Leipzig 1911, Johnson Reprint 1968
- [7] M. Homma & H. Maehara (1988), Algebraic distance graphs
and rigidity, submitted
- [8] G. Laman (1970), On graphs and rigidity of plane skeletal
structure, J. Engineering Math. 4, 331-340
- [9] L. Lovasz & Y. Yemini (1982), On generic rigidity in the plane,
SIAM J. Algebraic & Discrete Methods 3, 91-98
- [10] H. Maehara (1988), On Graver's conjecture, submitted
- [11] B. Roth (1981), Rigid and flexible frameworks, Amer. Math.
Monthly 88, 6-211
- [12] T.S. Tay & W. Whiteley (1984), Recent progress in the generic
rigidity of structures, Structural Topology 9, 31-38
- [13] ————— (1985), Generating isostatic frameworks,
Structural Topology 11, 21-69